

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



علی هاشمی

۱- نمودار تابع  $f(x) = \text{sign}(x)$  و  $g(x) = ax$  یکدیگر را در نقاط به طول‌های ۲ و -۲ قطع می‌کنند، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) -۲      ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $-\frac{1}{2}$

۲- حاصل  $f(x) = \text{sign}(-x + 2) + 3[-x - 2]$  به ازای  $x = \frac{1}{2}$  برابر کدام گزینه است؟

- ۱) -۶      ۲) -۵      ۳) -۸      ۴) -۹

۳- اگر  $f(x) = \text{sign}(x)$  و  $g(x)$  یک تابع همانی باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{3f(-3) + 4g(3)}{f(5) - g(6)}$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) -۳      ۳)  $-\frac{9}{5}$       ۴)  $-\frac{5}{9}$

۴- اگر  $f(x) = \begin{cases} -2[x] & , x < -2 \\ 3 & , -2 \leq x \leq 1 \\ \text{sign}(x) & , x > 1 \end{cases}$  باشد، حاصل  $f(-\sqrt{5}) + f(\sqrt{5} - 1)$  کدام است؟

- ۱) ۶      ۲) ۷      ۳)  $2\sqrt{5} + 1$       ۴) -۱



۵- اگر  $0 < x < 1$  باشد، حاصل عبارت  $A = [x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$  کدام است؟

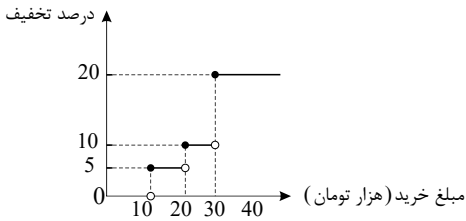
۴) -۳

۳) -۲

۲) -۱

۱) صفر

۶- یک فروشگاه برای خریدهای مشتریان، طبق تابع پلکانی زیر تخفیف می‌دهد. اگر از این فروشگاه ۵۰ هزار تومان خرید کنیم، چقدر تخفیف شامل حال ما خواهد شد؟



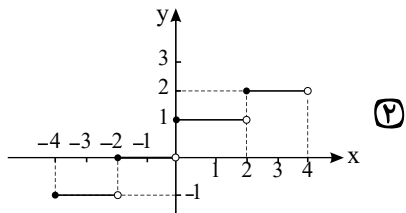
۲) ۵۵۰۰ تومان

۴) ۶۰۰۰ تومان

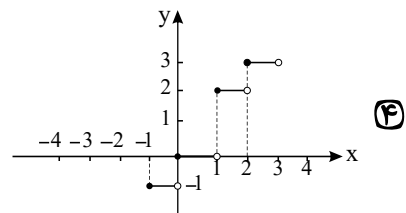
۱) ۴۰۰۰ تومان

۳) ۴۵۰۰ تومان

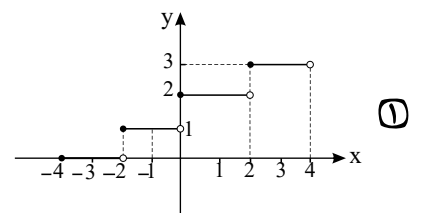
۷- بخشی از نمودار تابع  $f(x) = [\frac{1}{2}x + 2]$  شبیه کدام گزینه است؟



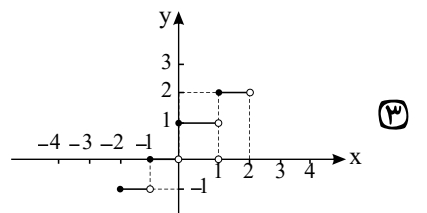
۲)



۴)



۱)



۳)



۸- به ازای  $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1\}$  مقدار کدام یک از تابع‌های زیر بیشتر است؟

$h(x) = \left[\frac{x+1}{2}\right]$  (۴)

$k(x) = \left[\frac{x}{3} - 1\right]$  (۳)

$g(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$  (۲)

$f(x) = \left[2 - \frac{x}{3}\right]$  (۱)

۹- یک شرکت حمل و نقل برای حمل بار بین دو شهر بابت ۳۰ کیلوگرم بار یا کمتر، قیمت ۱۰۰۰۰ تومان و بابت هر اضافه بار کمتر از ده کیلوگرم مبلغ ۵۰۰۰ تومان اضافه دریافت می‌کند. این شرکت برای بارهای بین ۵۰ تا ۵۹ کیلوگرم چه مبلغی دریافت می‌کند؟

۳۵۰۰۰ تومان (۴)

۲۰۰۰۰ تومان (۳)

۳۰۰۰۰ تومان (۲)

۲۵۰۰۰ تومان (۱)

۱۰- حاصل عبارت  $A = [-3x] + 2[x]$  به ازای  $x = -2,8$  برابر کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۲ (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۱- به ازای کدام مقدار  $x$  دو تابع  $f(x) = \text{sign}(x)$  و  $g(x) = [x + 1]$  مقدار مساوی ندارند؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

$-\frac{3}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۱۲- سطح محصور به تابع  $f(x) = x - [x]$  و محور  $x$ ‌ها در بازه  $(0, 1)$  چه قدر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۲ (۴)

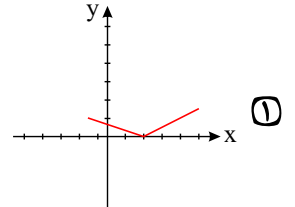
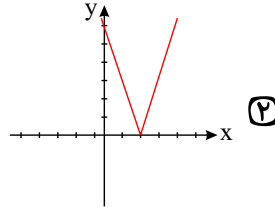
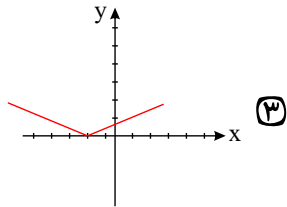
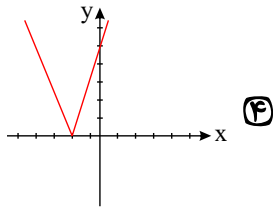
$\frac{3}{2}$  (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)



۱۳- نمودار تابع  $f(x) = \left| \frac{x-2}{3} \right|$  کدام گزینه می‌باشد؟



۱۴- اگر  $f(x) = \text{sign}(x)$  تابع علامت باشد و رابطه  $\text{sign}(x^2 - 4) = 0$  برقرار باشد، مجموع مربعات جواب‌های قابل قبول برای  $x$  کدام است؟

(A) ۱۸

(B) ۱۲

(C) ۱۰

(D) ۸

۱۵- در کدام گزینه، تابع قدر مطلق به درستی به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل نشده است؟

$$y = 3 + |x - 2| = \begin{cases} x + 1, & x \geq 2 \\ 5 - x, & x < 2 \end{cases} \quad \text{(A)}$$

$$y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ 1 - x, & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{(B)}$$

$$y = -|x + 5| - 3 = \begin{cases} x + 2, & x \geq -5 \\ -x - 8, & x < -5 \end{cases} \quad \text{(C)}$$

$$y = -|x| + 4 = \begin{cases} 4 - x, & x \geq 0 \\ 4 + x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{(D)}$$

۱۶- مساحت ناحیه‌ای که نمودار تابع  $f(x) = -|x - 3| + 3$  با محور طول‌ها می‌سازد، کدام است؟

(A) ۱۲

(B) ۶

(C) ۹

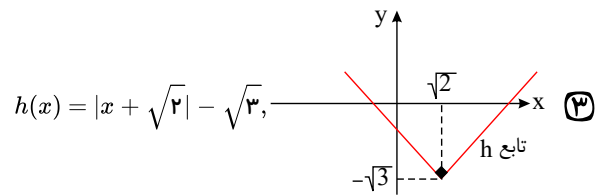
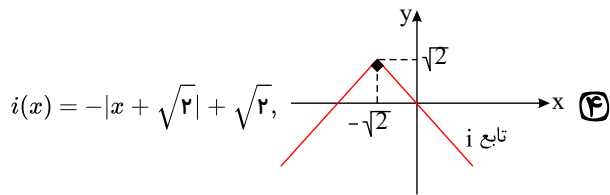
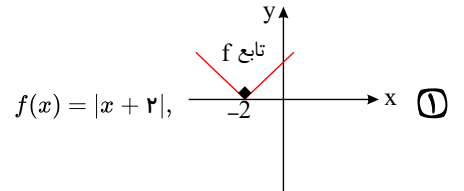
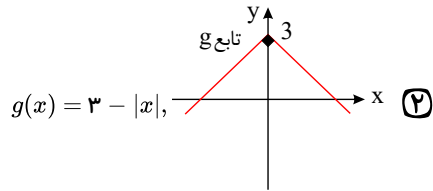
(D) ۱۸



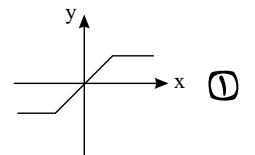
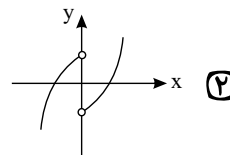
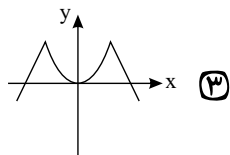
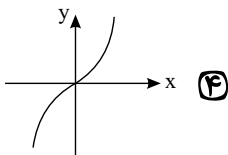
۱۷- تابع با ضابطه  $f(x) = |x - 3| - 2$ ، در نقطه  $A(a, b)$ ، تابع  $g(x) = x - 1$  را قطع می‌کند. حاصل  $a + b$  کدام است؟

- ① صفر      ② ۱      ③ -۱      ④ ۲

۱۸- در کدام گزینه، نمودار و ضابطه تابع، با هم مطابقت ندارند؟



۱۹- دامنه و برد نمودار کدام تابع مجموعه اعداد حقیقی است؟





۲۰- اگر جدول زیر مربوط به یک تابع ثابت باشد، در این صورت میانگین  $a, b, c$  و  $d$  کدام است؟

|     |       |       |       |             |     |         |
|-----|-------|-------|-------|-------------|-----|---------|
| $x$ | ۱     | $-a$  | ۲     | $-\sqrt{۲}$ | ۳   | $d$     |
| $y$ | $a+۲$ | $b+۳$ | $a^۲$ | $b^۲-۳$     | $c$ | $d^۲+۱$ |

$-\frac{۴}{۵}$  (۴)

$\frac{۶}{۵}$  (۳)

$-\frac{۱}{۲}$  (۲)

$\frac{۱}{۲}$  (۱)

۲۱- اگر نمودار تابع همانی  $f$  و نمودار تابع ثابت  $g$  در نقطه‌ای به طول  $x = -۳$  یکدیگر را قطع کنند، در این صورت  $f(۵) - g(۵)$  کدام است؟

صفر (۴)

۸ (۳)

۱۰ (۲)

۲ (۱)

۲۲- اگر در تابع ثابت  $f(x) = c$  داشته باشیم:  $f(x^۲) = (f(x))^۲$ ، در این صورت  $c$  چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

$\{۰, -۱\}$  (۴)

$\{۰, ۱\}$  (۳)

$\{۱, -۱\}$  (۲)

$\{۱, ۲\}$  (۱)

۲۳- اگر  $f$  تابع همانی و  $g$  تابع ثابت باشد و  $f(۲) + g(۲) = ۷$  باشد، آن‌گاه  $(f(۳))^۲ - (g(۳))^۲$  کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱۶ (۲)

۱۶ (۱)

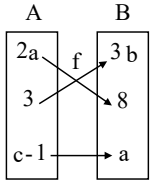
۲۴- اگر  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & , x \geq 1 \\ \sqrt{-x+1} & , x < 1 \end{cases}$  باشد، مقدار عددی  $\frac{f(۵) + ۲f(-۸)}{۲}$  کدام است؟

-۴ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)



$$g: \begin{array}{c|ccc} x & a & 1 & c \\ \hline y & 16 & b & 25 \end{array}$$

۲۵- اگر تابع  $f$  همانی باشد، کدام گزینه در مورد تابع  $g$  درست است؟

- ①  $g$  تابعی همانی است.
- ② ضابطه تابع  $g$  برابر  $y = \sqrt{x}$  است.
- ③ میانگین اعضای دامنه  $g$  برابر با ۵ است.
- ④ میانگین اعضای بُرد  $g$  برابر با ۱۴ است.

۲۶- اگر بُرد تابع  $f = \{(k+3, m-8), (\frac{k}{2}, 10), (2m+1, 2k)\}$  فقط دارای یک عضو باشد، دامنه تابع کدام است؟

- ①  $\{1, \frac{8}{3}, 37\}$
- ②  $\{8, \frac{5}{2}, 37\}$
- ③  $\{8, 37, \frac{15}{2}\}$
- ④  $\{\frac{37}{2}, 1, \frac{5}{2}\}$
- ⑤  $\{1, \frac{8}{3}, 37\}$

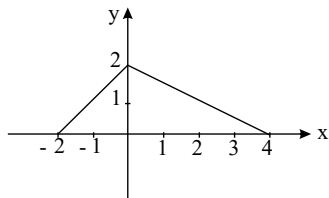
۲۷- هرگاه  $f(x) = \begin{cases} 3x+a & , x \geq -1 \\ ax+4 & , x \leq -1 \end{cases}$  یک تابع باشد، مقدار  $f(-2)$  کدام است؟

- ①  $\frac{7}{2}$
- ②  $-\frac{5}{2}$
- ③  $-3$
- ④  $11$

۲۸- اگر  $f = \{(1, a+2), (2a, b)\}$  تابعی همانی و  $g(x) = \frac{cx^2+4}{x^2+2}$  تابعی ثابت باشد، مقدار  $a+b+c$  کدام است؟

- ①  $-1$
- ②  $-5$
- ③  $2$
- ④  $-3$





۲۹- ضابطه تابع مربوط به نمودار مقابل کدام است؟

۱)  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ x - 2, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

۲)  $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x \leq 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

۳)  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{-x}{2} + 2, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

۴)  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2x + 2, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

۳۰- حاصل عبارت  $A = \frac{3[x] - 4[-x]}{\sqrt{[x]} + [2x]}$  به ازای  $x = 4,8$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

۴)  $\frac{45}{13}$

۳)  $\frac{40}{13}$

۲)  $\frac{32}{11}$

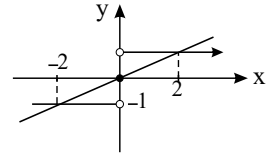
۱)  $\frac{35}{11}$



## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ ابتدا نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، دقت کنید با توجه به نمودار تابع علامت درمی‌یابیم که چون تابع  $g(x)$  تابع  $f(x)$  را در دو نقطه به طول‌های ۲، ۲- قطع کرده است، لذا می‌بایست  $a > 0$  باشد و نمودار آن به صورت زیر در شکل رسم شده است.

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع  $g(x)$  به ازای  $x = 2$  مقدار تابع  $g(2) = 1$  و به ازای  $x = -2$  مقدار تابع  $g(-2) = -1$  است، حال داریم:

$$g(2) = 1 \Rightarrow g(2) = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۲ - گزینه ۳ برای محاسبه تابع علامت ( $\text{sign}$ ) باید مقدار ورودی تابع را از لحاظ مثبت یا منفی بودن بررسی کنیم.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow -x + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{sign}(-x + 2) = 1$$

$$3[-x - 2] = 3\left[-\frac{1}{2} - 2\right] = 3\left[-\frac{5}{2}\right] = 3 \times (-3) = -9$$

$$\Rightarrow \text{sign}(-x + 2) + 3[-x - 2] = 1 - 9 = -8$$

۳ - گزینه ۳

$$f(-3) = \text{sign}(-3) \xrightarrow{-3 < 0} f(-3) = -1, f(5) = \text{sign}(5) \xrightarrow{5 > 0} f(5) = 1$$

$$g(3) = 3, g(6) = 6$$

$$A = \frac{3f(-3) + 4g(3)}{f(5) - g(6)} = \frac{3 \times (-1) + 4 \times 3}{1 - 6} = \frac{-3 + 12}{-5} = \frac{9}{-5}$$

۴ - گزینه ۲

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$$

$$\Rightarrow 2 - 1 < \sqrt{5} - 1 < 3 - 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} - 1 < 2$$

پس برای محاسبه  $f(\sqrt{5} - 1)$  از ضابطه سوم استفاده می‌کنیم و چون مقدار آن مثبت است.

$$\text{sign}(\sqrt{5} - 1) = 1$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2$$

$$f(-\sqrt{5}) = -2[-\sqrt{5}] \xrightarrow{-3 < -\sqrt{5} < -2} -2 \times (-3) = 6$$

$$f(-\sqrt{5}) + f(\sqrt{5} - 1) = 6 + 1 = 7$$

پس برای محاسبه  $f(-\sqrt{5})$  از ضابطه اول استفاده می‌کنیم:

۵ - گزینه ۳

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

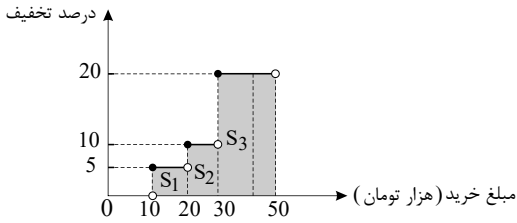
$$0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1$$

$$0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

$$A = [x^4] + [x^3] + [x^2] + [x] = 0 + (-1) + 0 + (-1) = -2$$

۶ - گزینه ۲ برای محاسبه میزان تخفیف، مساحت زیر نمودار تابع پلکانی را محاسبه می‌کنیم.



$$S_1 = \frac{5}{100} \times 10000 = 500$$

$$S_2 = \frac{10}{100} \times 10000 = 1000$$

$$S_3 = \frac{20}{100} \times 20000 = 4000$$

$$S \text{ کل} = 4000 + 1000 + 500 = 5500 \text{ تومان}$$

۷ - گزینه ۱ به ازای بازه‌های مختلف  $x$ , مقدار تابع را به دست می‌آوریم:

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow -\frac{2}{2} \leq \frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow -1 + 2 \leq \frac{x}{2} + 2 < -\frac{1}{2} + 2$$

$$1 \leq \frac{x}{2} + 2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[ \frac{x}{2} + 2 \right] = 1$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + 2 \leq \frac{x}{2} + 2 < 0 + 2 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} + 2 < 2$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x}{2} + 2 \right] = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 + 2 \leq \frac{x}{2} + 2 < \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} + 2 < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x}{2} + 2 \right] = 2$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 \leq \frac{x}{2} + 2 < 1 + 2 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \frac{x}{2} + 2 < 3$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x}{2} + 2 \right] = 2$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow \frac{2}{2} \leq \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + 2 \leq \frac{x}{2} + 2 < \frac{3}{2} + 2 \Rightarrow 3 \leq \frac{x}{2} + 2 < \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x}{2} + 2 \right] = 3$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} < \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} + 2 \leq \frac{x}{2} + 2 < 2 + 2 \Rightarrow \frac{7}{2} \leq \frac{x}{2} + 2 < 4$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x}{2} + 2 \right] = 3$$

با توجه به مقادیر به دست آمده نتیجه می‌گیریم نمودار رسم شده در گزینه ۱، صحیح است.

۸ - گزینه ۱ به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم، داریم:

$$-3 < x < -1 \Rightarrow \frac{-3}{3} < \frac{x}{3} < \frac{-1}{3} \Rightarrow -1 < \frac{x}{3} < \frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{-1}{3} < \frac{-x}{3} < 1$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{3} < 2 - \frac{x}{3} < 2 + 1 \Rightarrow 2 < \frac{7}{3} < 2 - \frac{x}{3} < 3 \Rightarrow f(x) = \left[ 2 - \frac{x}{3} \right] = 2$$

$$-3 < x < -1 \Rightarrow \frac{-3}{4} < \frac{x}{4} < \frac{-1}{4} \Rightarrow -1 < \frac{-3}{4} < \frac{x}{4} < \frac{-1}{4} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{x}{4} < 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \left[ \frac{x}{4} \right] = -1$$

$$-3 < x < -1 \Rightarrow \frac{-3}{3} < \frac{x}{3} < \frac{-1}{3} \Rightarrow -1 < \frac{x}{3} < \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow -1 - 1 < \frac{x}{3} - 1 < \frac{-1}{3} - 1 \Rightarrow -2 < \frac{x}{3} - 1 < \frac{-4}{3} < -1 \Rightarrow -2 < \frac{x}{3} - 1 < -1$$

$$\Rightarrow k(x) = \left[ \frac{x}{3} - 1 \right] = -2$$

$$-3 < x < -1 \Rightarrow -3 + 1 < x + 1 < -1 + 1 \Rightarrow -2 < x + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2} < \frac{x+1}{2} < \frac{0}{2} \Rightarrow -1 < \frac{x+1}{2} < 0 \Rightarrow h(x) = \left[ \frac{x+1}{2} \right] = -1$$

۹ - گزینه ۱ اگر متغیر  $x$  وزن بار باشد، در این صورت تابع حمل و نقل شرکت یک تابع پله‌ای به صورت زیر می‌باشد:



$$f(x) = \begin{cases} 10000, & 0 \leq x < 30 \\ 15000, & 30 \leq x < 40 \\ 20000, & 40 \leq x < 50 \\ 25000, & 50 \leq x < 60 \\ \vdots & \end{cases}$$

بنابراین برای بار بین ۵۰ تا ۵۹ کیلوگرم مبلغ ۲۵۰۰۰ تومان دریافت می‌کند.

تذکر: این تابع پله‌ای برای تا ۶۰ کیلوگرم بار نوشته شده است و به همین ترتیب تا بی‌نهایت ادامه دارد.

۱۰ - گزینه ۴ مقدار  $x$  را در عبارت مورد نظر جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= [-3x] + 2[x] \xrightarrow{x=-2,8} A = [-3 \times (-2,8)] + 2[-2,8] \\ &= [8,4] + 2[-2,8] \xrightarrow{\substack{8 < 8,4 < 9 \\ -3 < -2,8 < -2}} \\ A &= 8 + 2 \times (-3) = 8 - 6 = 2 \end{aligned}$$

۱۱ - گزینه ۲ باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار  $x$  تساوی  $[x + 1] = \text{sign}(x)$  برقرار نیست. به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه ۱:  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow [\frac{1}{2} + 1] = \text{sign}(\frac{1}{2}) \Rightarrow [\frac{3}{2}] = \text{sign}(\frac{1}{2}) \Rightarrow 1 = 1$  (درست)

گزینه ۲:  $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow [-\frac{1}{2} + 1] = \text{sign}(-\frac{1}{2}) \Rightarrow [\frac{1}{2}] = \text{sign}(-\frac{1}{2}) \Rightarrow 0 = -1$  (نادرست)

گزینه ۳:  $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow [-\frac{3}{2} + 1] = \text{sign}(-\frac{3}{2}) \Rightarrow [-\frac{1}{2}] = \text{sign}(-\frac{3}{2})$

$\Rightarrow -1 = -1$  (درست)

گزینه ۴:  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow [\frac{\sqrt{2}}{2} + 1] = \text{sign}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow [\frac{1,4}{2} + 1] = \text{sign}(\frac{1,4}{2})$

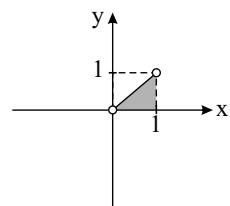
$\Rightarrow [1,7] = \text{sign}(0,7) \Rightarrow 1 = 1$  (درست)

پس به ازای  $x = -\frac{1}{2}$  مقدار دو تابع یکسان نخواهد بود.

۱۲ - گزینه ۱ با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$

$f(x) = x - [x] \xrightarrow{[x]=0} f(x) = x$



پس نمودار تابع در بازه  $(0, 1)$  به صورت یک تابع همانی است، داریم:

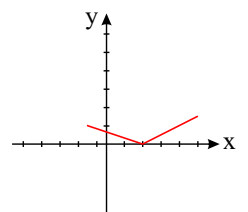
حال مساحت قسمت رنگی برابر است با:  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

۱۳ - گزینه ۱ با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$f(x) = \left| \frac{x-2}{3} \right| = \begin{cases} \frac{x-2}{3}, & \frac{x-2}{3} \geq 0 \\ -(\frac{x-2}{3}), & \frac{x-2}{3} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2}{3}, & x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, & x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2}{3}, & x \geq 2 \\ -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, & x < 2 \end{cases}$$





$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

یعنی اگر ورودی تابع علامت، صفر باشد، حاصل آن برابر صفر است، لذا:

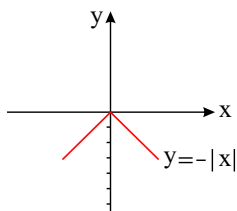
$$\text{sign}(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مربعات جواب‌ها} = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

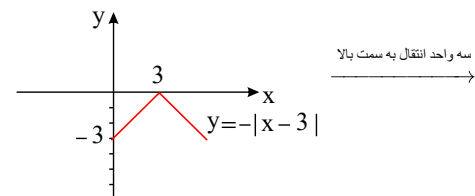
۱۵ - گزینه ۴ در تابع گزینه ۴، ریشه عبارت داخل قدر مطلق  $(-5)$  است، لذا به کمک آن، تابع را دو ضابطه‌ای می‌کنیم، اگر  $x \geq -5$  باشد، حاصل  $(x + 5)$  نامنفی است، پس خودش از قدر مطلق خارج می‌شود ولی اگر  $x < -5$  باشد، حاصل  $(x + 5)$  منفی است و قرینه‌اش از قدر مطلق خارج خواهد شد، لذا:

$$y = -|x + 5| - 3 = \begin{cases} -x - 8 & , x \geq -5 \\ x + 2 & , x < -5 \end{cases}$$

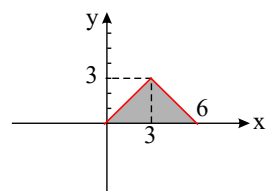
۱۶ - گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع  $y = -|x - 3| + 3$  ابتدا نمودار  $y = -|x|$  را رسم می‌کنیم. سپس نمودار را در راستای افقی ۳ واحد به سمت راست و در راستای عمودی ۳ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم، داریم:



انتقال سه واحد به سمت راست  
→



سه واحد انتقال به سمت بالا



با توجه به شکل مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

۱۷ - گزینه ۲

$$y = |x - 3| - 2 \Rightarrow y = \begin{cases} x - 3 \geq 0 : y = x - 3 - 2 \Rightarrow y = x - 5 \\ x - 3 < 0 : y = -x + 3 - 2 \Rightarrow y = -x + 1 \end{cases}$$

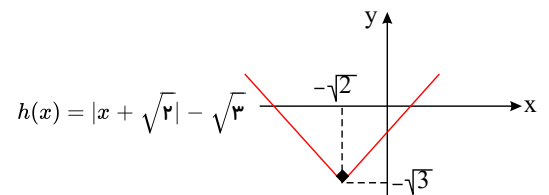
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 5 & , x \geq 3 \\ -x + 1 & , x < 3 \end{cases}$$

حال نقطه تقاطع دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = x - 5 \Rightarrow 1 = 5 \quad (\text{غ ق ق}) \\ x - 1 = -x + 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad (\text{ق ق } x < 3) \Rightarrow y = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$A(1, 0) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1 + 0 = 1$$

۱۸ - گزینه ۳ فقط نمودار مربوط به گزینه ۳، با ضابطه آن هم خوانی ندارد. نمودار مربوط به ضابطه این گزینه به صورت زیر است:



همچنین ضابطه مربوط به نمودار داده شده در گزینه ۳، برابر با  $h(x) = |x - \sqrt{2}| - \sqrt{3}$  است.

۱۹ - گزینه ۴ در نمودار تابع گزینه ۱، دامنه مجموعه نمودار اعداد حقیقی است، ولی برد آن محدود است و همه اعداد حقیقی را شامل نمی‌شود. در نمودار تابع گزینه ۲، دامنه تابع  $\mathbb{R} - \{0\}$  است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است.

در نمودار تابع گزینه ۳، دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی است و برد آن مقادیری از مجموعه اعداد حقیقی مثبت را شامل نمی‌شود.



در نمودار تابع گزینه ۴، دامنه و برد تابع برابر مجموعه اعداد حقیقی است.

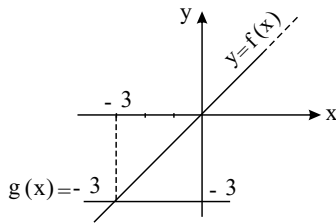
۲۰ - گزینه ۲ برای این که این جدول مربوط به یک تابع ثابت باشد، می بایست همه عرض های مربوط به نقاط برابر یکدیگر باشند، لذا داریم:

$$\begin{cases} a + 2 = a^2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \\ b + 3 = b^2 - 3 \Rightarrow b^2 - b - 6 = 0 \Rightarrow (b - 3)(b + 2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \\ b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \end{cases} \end{cases}$$

در این تابع به ازای  $b = -2$  و  $a = -1$  مقادیر  $y$ ها برابر یک می شود (به ازای  $a = 2$  و  $b = 3$  تابع ثابت نمی باشد)؛ لذا داریم:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{میانگین } d, c, b, a = \frac{-1-2+1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

۲۱ - گزینه ۳



با توجه به نمودارهای رسم شده داریم:

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = -3 \end{cases}$$

$$f(5) - g(5) = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$

۲۲ - گزینه ۳ در تابع  $f$  به ازای هر مقدار ورودی، خروجی تابع مقدار ثابت  $c$  است.

$$f(x^r) = (f(x))^r \Rightarrow c = (c)^r \Rightarrow c^r - c = 0$$

$$\Rightarrow c(c - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

پس مقادیر  $c = \{0, 1\}$  می باشد.

۲۳ - گزینه ۲

$$\begin{cases} f(x) = x : \text{تابع همانی} \\ g(x) = k : \text{تابع ثابت} \end{cases}$$

$$f(2) + g(2) = 7 \Rightarrow 2 + k = 7 \Rightarrow k = 5$$

$$(f(3))^2 - (g(3))^2 = 3^2 - 5^2 = 9 - 25 = -16$$

۲۴ - گزینه ۲ چون  $5 > 1$  است، برای یافتن  $f(5)$  از رابطه بالایی و چون  $-8 < 1$  برای محاسبه  $f(-8)$  از ضابطه پایینی استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} f(5) = \sqrt{5-1} = 2 \\ f(-8) = \sqrt{8+1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(5) + 2f(-8)}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

۲۵ - گزینه ۴

در نمودار و تابع همانی، اعداد ابتدا و انتهای هر فلش (پیکان) باید برابر باشند، لذا:

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4, \quad 3b = 3 \Rightarrow b = 1, \quad c - 1 = a \Rightarrow c - 1 = 4 \Rightarrow c = 5$$

حال مقادیر به دست آمده برای  $a, b, c$  و  $c$  را در تابع  $g$  قرار می دهیم:

$$g: \begin{array}{c|ccc} x & 4 & 1 & 5 \\ \hline y & 16 & 1 & 25 \end{array}$$

واضح است که  $g$  تابع همانی نیست و ضابطه  $g$  برابر  $y = x^2$  است.

ضمناً میانگین اعضای دامنه  $g$  برابر  $\frac{10}{3}$  است:

$$\bar{x} = \frac{4+1+5}{3} = \frac{10}{3}$$

میانگین اعضای برد  $g$  برابر است با:



$$\bar{y} = \frac{16 + 1 + 25}{3} = \frac{42}{3} = 14$$

۲۶ - گزینه ۴ برد تابع فقط دارای یک عضو است که آن عضو هم عدد ۱۰ است، پس عضوهای دوم تمام زوج مرتبها باید ۱۰ باشند:

$$m - 18 = 10 \Rightarrow m = 18, \quad 2k = 10 \Rightarrow k = 5$$

جایگذاری در  $f$

$$\rightarrow f = \{(18, 10), (\frac{5}{2}, 10), (37, 10)\}$$

$$\Rightarrow D_f = \{18, \frac{5}{2}, 37\}$$

۲۷ - گزینه ۳ چون یک  $f(x)$  تابع است و چون  $x = -1$  در هر دو دامنه ضابطهها قرار دارد، لذا باید به ازای  $x = -1$  مقدار ضابطهها برابر باشد، بنابراین داریم:

$$-3 + a = -a + 4 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

چون  $-1 \leq -2$  است، لذا برای محاسبه  $f(-2)$  از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$f(-2) = a \times (-2) + 4 = \frac{7}{2} \times (-2) + 4 = -7 + 4 = -3$$

۲۸ - گزینه ۱ چون  $f(x)$  تابعی همانی است لذا مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتبها با یکدیگر برابر می‌باشند.

$$\begin{cases} (1, a+2) \xrightarrow{\text{تابع همگنی}} a+2=1 \Rightarrow a=-1 & (1) \\ (2a, b) \xrightarrow{\text{تابع همگنی}} 2a=b \xrightarrow{(1)} b=2 \times (-1) = -2 \end{cases}$$

از طرفی چون  $g(x)$  تابعی ثابت است، پس مقدار آن برابر ثابت  $k$  است.

$$g(x) = \frac{cx^2 + 4}{x^2 + 2} = k \Rightarrow \underline{cx^2} + \underline{4} = \underline{kx^2} + \underline{2k} \Rightarrow 4 = 2k \Rightarrow k = 2 \text{ و } c = k \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow a + b + c = -1 - 2 + 2 = -1$$

۲۹ - گزینه ۳ به ازای  $0 \leq x \leq 2$  نمودار تابع خطی است که از دو نقطه  $(0, 2)$  و  $(-2, 0)$  عبور می‌کند و ضابطه آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow m = \frac{0 - 2}{-2 - 0} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y - 0 = 1 \times (x - (-2)) \Rightarrow y = x + 2$$

به ازای  $0 \leq x \leq 4$  ، نمودار تابع خطی است که از دو نقطه  $(0, 2)$  و  $(4, 0)$  می‌گذرد، داریم:

$$m' = \frac{0 - 2}{4 - 0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 2$$

پس ضابطه تابع به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{x}{2} + 2, & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

۳۰ - گزینه ۲

$$A = \frac{3[x] - 4[-x]}{\sqrt{[x]} + [2x]} \xrightarrow{x=4,8} A = \frac{3[4,8] - 4[-4,8]}{\sqrt{[4,8]} + [2 \times 4,8]}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 \times (4) - 4 \times (-5)}{\sqrt{4} + 9} = \frac{12 + 20}{2 + 9} = \frac{32}{11}$$

## پاسخنامه کلیدی

|       |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ۱ - ۳ | ۶ - ۲  | ۱۱ - ۲ | ۱۶ - ۲ | ۲۱ - ۳ | ۲۶ - ۴ |
| ۲ - ۳ | ۷ - ۱  | ۱۲ - ۱ | ۱۷ - ۲ | ۲۲ - ۳ | ۲۷ - ۳ |
| ۳ - ۳ | ۸ - ۱  | ۱۳ - ۱ | ۱۸ - ۳ | ۲۳ - ۲ | ۲۸ - ۱ |
| ۴ - ۲ | ۹ - ۱  | ۱۴ - ۱ | ۱۹ - ۴ | ۲۴ - ۲ | ۲۹ - ۳ |
| ۵ - ۳ | ۱۰ - ۴ | ۱۵ - ۴ | ۲۰ - ۲ | ۲۵ - ۴ | ۳۰ - ۲ |