

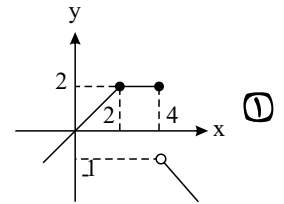
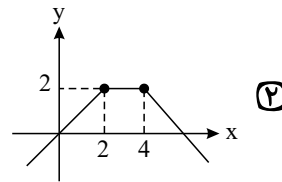
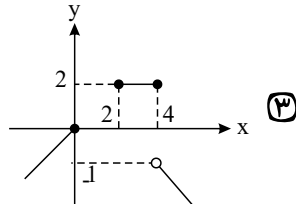
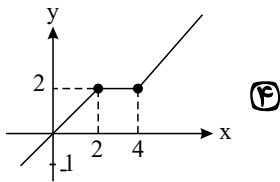
سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



علی هاشمی

۱- نمودار تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 4 \\ 3 - x & x > 4 \end{cases}$ کدام است؟



۲- کدام گزینه درست است؟

① اگر تعداد اعضای دامنه و برد یک تابع با هم برابر باشند، آن تابع همانی است.

② اگر f یک تابع همانی باشد، آنگاه: $f(kx) = kf(x)$.

③ اگر f یک تابع ثابت با دامنه اعداد حقیقی باشد، آنگاه: $f(a) + f(b) = f(a + b)$.

④ اگر f یک تابع ثابت باشد، آنگاه دامنه و برد آن با هم برابر است.

۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (a - 2)x + 3 & x \geq 1 \\ b & x < 1 \end{cases}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

④ ۵

③ ۳

② ۲

① ۱



۴- جدول مقابل، نرخ مالیات کارمندان یک شرکت است. با توجه به این جدول، کارمندی که ۴ میلیون تومان حقوق دریافت می کند باید چند تومان مالیات پرداخت کند؟

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱,۳۰۰,۰۰۰	معاف از مالیات
مازاد بر ۱,۳۰۰,۰۰۰ تا ۲,۵۰۰,۰۰۰	۲۰
مازاد بر ۲,۵۰۰,۰۰۰ تا ۴,۵۰۰,۰۰۰	۲۵
مازاد بر ۴,۵۰۰,۰۰۰	۳۰

- ۱) ۳۰۰,۰۰۰
- ۲) ۴۲۰,۰۰۰
- ۳) ۵۴۰,۰۰۰
- ۴) ۵۲۰,۰۰۰

۵- اگر $A = \{(0, a - b), (2a, b - 1), (ab, c + 3)\}$ تابع همانی باشد، میانگین a و b و c کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{3}$
- ۲) $\frac{2}{3}$
- ۳) $\frac{4}{3}$
- ۴) $\frac{2}{3}$
- ۵) $\frac{-4}{3}$

۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , x > 2 \\ 3x - 2 & , x \leq 2 \end{cases}$ و $a = f(\frac{5}{3})$ در این صورت $f(a)$ کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) $\frac{2}{3}$
- ۴) $\frac{-11}{3}$

۷- اگر دو زوج مرتب $A = (2n + m, n - m - 7)$ و $B = (m + 1, -3n)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشند، در این صورت حاصل $\frac{n}{m}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$
- ۲) $-\frac{1}{4}$
- ۳) ۴
- ۴) -۴



۸- تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} -x - 4, & x \leq -3 \\ -1, & -3 < x < 2 \\ 3x - 7, & x \geq 2 \end{cases}$ مفروض است. خط به معادله $y = 2$ این تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. مساحت محدود بین نمودار تابع و این خط کدام است؟

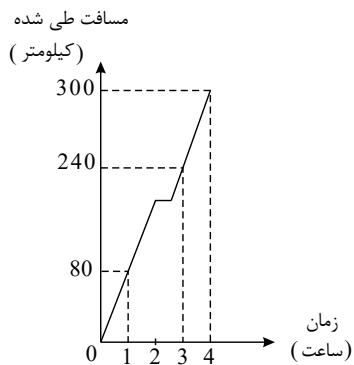
۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

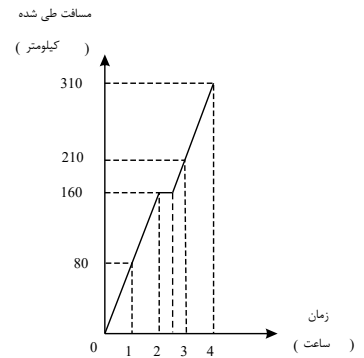
۱۵ (۷)

۲۱ (۱)

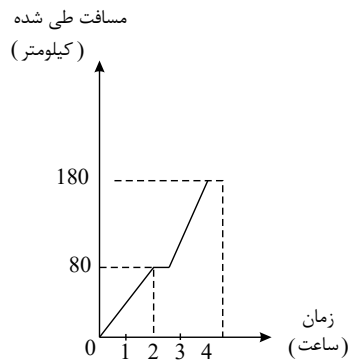
۹- اتومبیلی با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت از مبدأ حرکت می‌کند و پس از دو ساعت حرکت با این سرعت، به مدت نیم ساعت توقف می‌کند. سپس با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت به مسیر خود ادامه می‌دهد و یک و نیم ساعت بعد به مقصد می‌رسد. کدام نمودار، مسافت طی شده بر حسب زمان را بیان می‌کند؟



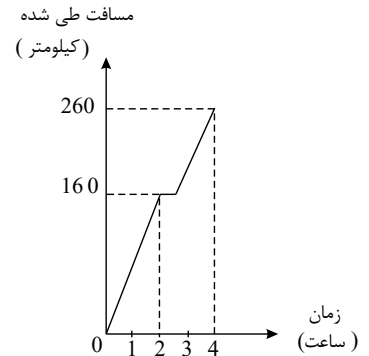
(۲)



(۱)



(۴)



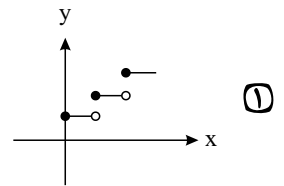
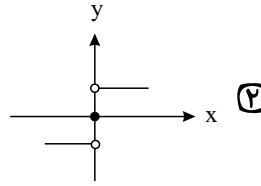
(۳)



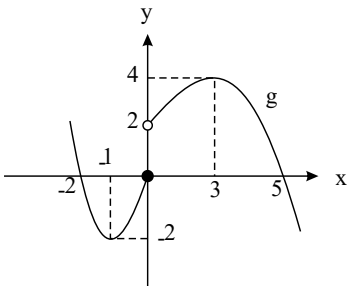
۱۰- کدام تابع زیر، پلکانی محسوب نمی‌شود؟

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , x = 0 \\ 2x & , x = 1 \\ 3x & , x > 1 \end{cases} \quad \text{Ⓕ}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 2 & , x = 1 \\ 3 & , x > 1 \end{cases} \quad \text{Ⓖ}$$

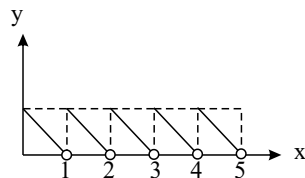


۱۱- اگر $f(x) = \text{sign}(x)$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، حاصل عبارت $\text{sign}(-4) \times g(-1) + f(0) \times g(3)$ کدام است؟

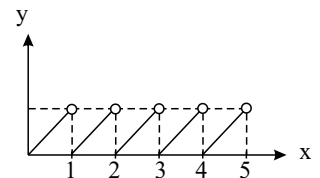


- Ⓐ -۳
- Ⓑ ۳
- Ⓒ -۲
- Ⓓ ۲

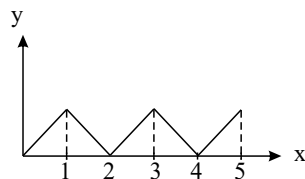
۱۲- اگر مخزن شن یک ساعت شنی با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین بریزد، نمودار مربوط به خالی شدن مخزن آن برای پنج بار کدام است؟ (y حجم شن قسمت بالایی ساعت شنی می‌باشد) (با تغییر)



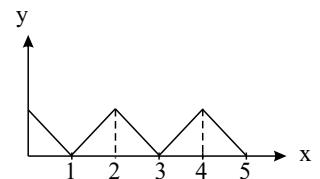
Ⓕ



Ⓐ



Ⓖ



Ⓑ



۱۳ - هزینه گازبهای مصرفی در پنج ماهه فصل سرد در بخش خانگی در یکی از اقلیم‌های آب و هوایی به صورت جدول زیر است. اگر خانواده‌ای ۷۵۰ متر مکعب گاز مصرف کند، در این صورت هزینه پرداختی آن کدام است؟

هزینه گاز مصرفی بر حسب تومان به ازای مترمکعب	گاز مصرفی بر حسب مترمکعب
۴۱	مازاد بر ۰ تا ۳۰۰
۶۹	مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰
۹۶	مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰
۱۲۴	مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰
۱۵۱	مازاد بر ۶۰۰ تا ۷۰۰
۲۲۰	مازاد بر ۷۰۰ تا ۸۰۰
۲۶۲	مازاد بر ۸۰۰ تا ۹۰۰
۳۰۳	مازاد بر ۹۰۰ تا ۱۰۰۰
۴۲۰	مازاد بر ۱۰۰۰

۴۵۲۵۵ (۴)

۸۵۹۶۰ (۳)

۶۷۳۰۰ (۷)

۴۷۳۲۰ (۱)

۱۴ - اگر $f = \left\{ (1, 2), (-2, 3), \left(\frac{1}{2}, 1\right) \right\}$ و $g = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 3\right), (3, -2), (1, 5) \right\}$ ، مجموعه D_{f+g} کدام است؟

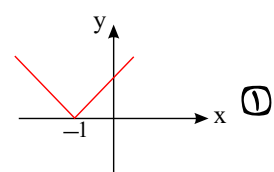
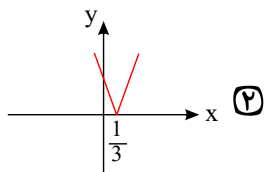
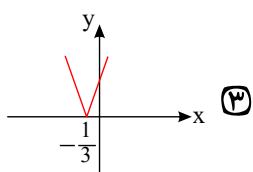
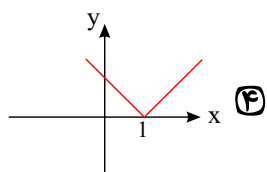
$\left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$ (۴)

$\{3\}$ (۳)

$\left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$ (۷)

$\left\{ \frac{1}{2}, 3, 1, -2 \right\}$ (۱)

۱۵ - نمودار تابع $y = |3x + 1|$ کدام است؟





۱۶- کدام گزینه تابع $f(x) = \begin{cases} 2(x-3) & x \geq 3 \\ 6-2x & x < 3 \end{cases}$ را به صورت یک تابع قدر مطلق بیان می کند؟

$f(x) = |2x - 3|$ (۴)

$f(x) = 2|x + 3|$ (۳)

$f(x) = |2x - 6|$ (۲)

$f(x) = |x - 3|$ (۱)

۱۷- اگر $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 0)\}$ دامنه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

$\{-1\}$ (۴)

\emptyset (۳)

$\{2, 3, 4, -1\}$ (۲)

$\{2, -1\}$ (۱)

۱۸- در تابع $y = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & x \geq a \\ -(2x - 3) & x < a \end{cases}$ مقدار a کدام است؟

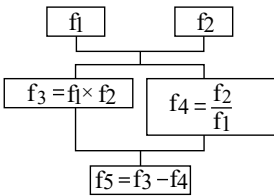
-3 (۴)

3 (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۱۹- اگر $f_1(x) = x - 1$ و $f_2(x) = x + 1$ ، با توجه به درخت روبه رو، حاصل $f_5(x)$ به ازای $x = 3$ کدام است؟



2 (۲)

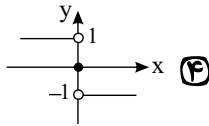
8 (۱)

4 (۴)

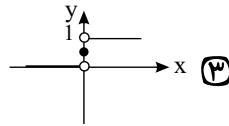
6 (۳)



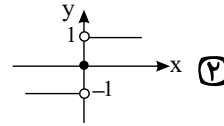
۲۰- کدام گزینه نمودار تابع علامت $f(x) = \text{sign}(x)$ است؟



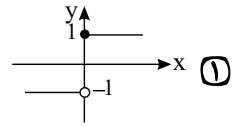
۴



۳



۵



۱

۲۱- اگر $f(x) = [2x] - [x]$ حاصل $f(\frac{5}{2}) - f(\frac{2}{3})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۴ صفر

۳ ۳

۵ ۲

۱ ۱

۲۲- علی برای رسم تابع $f(x)$ ابتدا تابع $y = |x|$ را رسم کرد. سپس این نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کرد و به اندازه ۳ واحد بالا برد. ضابطه تابع $f(x)$ کدام است؟

۴ $f(x) = -|x - 3|$

۳ $f(x) = -|x| + 3$

۵ $f(x) = -|x + 3|$

۱ $f(x) = |-x| + 3$

۲۳- اگر $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g = \{(3, -1), (-2, 2)\}$ تابع $f - g$ کدام است؟

۴ $\{(3, -3), (-2, 0)\}$

۳ $\{(3, 3), (-2, 0)\}$

۵ $\{(-1, 3), (4, 0)\}$

۱ $\{(-1, -1), (4, 2)\}$

۲۴- اگر $f = \{(2, 3), (-1, 4), (1, 2)\}$ و $g = \{(2, a), (4, -1), (1, 2)\}$ و $\frac{f}{g} = \{(1, 1)\}$ آنگاه مقدار a کدام است؟

۴ صفر

۳ -۱

۵ ۲

۱ ۱



۲۹- مساحت زیر منحنی تابع $y = \text{sign}(x)$ به ازای $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 7\}$ کدام است؟

۳ (۴)

صفر (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

۳۰- مقدار $f(x) = \text{sign}(2\sqrt{3} - 4)$ کدام است؟

$2\sqrt{3} - 4$ (۴)

-۱ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)



پاسخنامه تشریحی

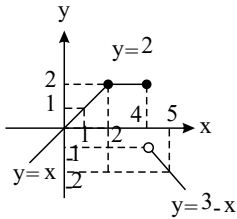
۱ - گزینه ۱ ابتدا جدول نقطه یابی هر یک از ضابطه ها را تشکیل می دهیم:

$y = x$	
x	۲ ۱
y	۲ ۱

$y = 2$	
x	۲ ۴
y	۲ ۲

$y = 3 - x$	
x	۴ ۵
y	-۱ -۲

اکنون نمودار هر یک از ضابطه ها رسم می کنیم:



بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۲ - گزینه ۲ نکته ۱: تابع با ضابطه $f(x) = x$ را تابع همانی می نامند.

نکته ۲: تابع $f : A \rightarrow B$ را که در آن مجموعه $R = \{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می نامند. در تابع ثابت، برد تنها شامل یک عضو است. هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم:
گزینه ۱: الزاماً درست نیست. به مثال مقابل دقت کنید:

$$f = \{(1, 3), (3, 1)\}$$

گزینه ۲: درست است. با توجه به نکته ۱ داریم:

$$f(x) = x \Rightarrow f(kx) = kx = k \times f(x)$$

گزینه ۳: نادرست است. اگر تابع $f(x) = c$ ($c \neq 0$) در نظر بگیریم، داریم:

$$f(a) = c, f(b) = c, f(a+b) = c \Rightarrow f(a) + f(b) = 2c \neq f(a+b) = c$$

گزینه ۴: نادرست است. به مثال مقابل دقت کنید:

$$f = \{(1, 2), (3, 2)\}$$

۳ - گزینه ۴ نکته: تابع $f : A \rightarrow B$ را که در آن مجموعه $R = \{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می نامند. در تابع ثابت برد تنها شامل یک عضو است. باید هر دو ضابطه برابر یک عدد ثابت باشند. برای اینکه ضابطه اول، عدد ثابت باشد باید ضریب x صفر باشد، پس:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین ضابطه اول به صورت $y = 3$ است.

برای اینکه تابع f تابع ثابت باشد، باید ضابطه دوم هم برابر ۳ باشد، پس: $b = 3$.
بنابراین:

$$a + b = 5$$

۴ - گزینه ۲ مطابق جدول داده شده، این کارمند تا ۱,۳۰۰,۰۰۰ تومان حقوق معاف از مالیات است. مازاد بر ۱,۳۰۰,۰۰۰ تا ۲,۵۰۰,۰۰۰ تومان باید ۱۰ درصد مالیات پرداخت کند، پس $1,200,000 = 1,300,000 - 1,000,000$ تومان از حقوق او ۱۰ درصد مالیات دارد. از طرفی مازاد بر ۲,۵۰۰,۰۰۰ تا ۴,۵۰۰,۰۰۰ تومان ۲۰ درصد مالیات دارد، پس $1,500,000 = 2,500,000 - 1,000,000$ تومان از حقوق او ۲۰ درصد مالیات دارد. بنابراین کل مالیاتی که این فرد باید پرداخت کند برابر است با:

$$(1,200,000 \times \frac{10}{100}) + (1,500,000 \times \frac{20}{100}) = 120,000 + 300,000 = 420,000$$

۵ - گزینه ۲ در تابع همانی به صورت زوج مرتبی، مؤلفه های اول و دوم هر زوج مرتب با یکدیگر برابرند، لذا داریم:

$$\begin{cases} a - b = 0 \Rightarrow a = b \\ 2a = b - 1 \Rightarrow 2a = a - 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -1 \\ ab = c + 3 \Rightarrow (-1) \times (-1) = c + 3 \Rightarrow 1 = c + 3 \Rightarrow c = -2 \end{cases}$$

میانگین a و b و c برابر است با:

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{-1 - 1 - 2}{3} = -\frac{4}{3}$$



۶ - گزینه ۱ $\frac{5}{3} \leq 2$ پس $f(\frac{5}{3})$ را از ضابطه پایینی حساب می‌کنیم تا a به دست آید:

$$a = f\left(\frac{5}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{5}{3}\right) - 2 = 3$$

حال برای $f(a) = f(3)$ از ضابطه بالایی استفاده می‌کنیم:

$$f(a) = f(3) = 3^2 - 2 \times 3 = 9 - 6 = 3$$

۷ - گزینه ۲ در هر زوج مرتب هنگامی که روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار دارد، مؤلفه‌های اول و دوم آن‌ها یکسان است، حال داریم:

$$A = (2n + m, n - m - 7) \Rightarrow n - m - 7 = 2n + m$$

$$\Rightarrow n + 2m = -7 \quad (1)$$

$$B = (m + 1, -3n) \Rightarrow m + 1 = -3n \Rightarrow m + 3n = -1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \begin{cases} m + 3n = -1 \\ 2m + n = -7 \end{cases} \xrightarrow{(-3) \times} \begin{cases} m + 3n = -1 \\ -6m - 3n = 21 \end{cases}$$

$$-5m = 20 \Rightarrow m = -4$$

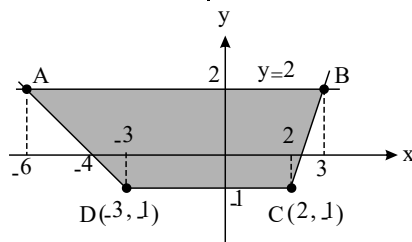
$$\xrightarrow{(1)} n + 2 \times (-4) = -7 \Rightarrow n = 1$$

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

۸ - گزینه ۱ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را با توجه به ضابطه‌ها رسم می‌کنیم:

$$y = -x - 4 \xrightarrow{x \leq -2} \begin{array}{c|cc} x & -3 & -4 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

$$y = 3x - 7 \xrightarrow{x \geq 2} \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline y & -1 & 2 \end{array}$$



حال خط $y = 2$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودار تابع چند ضابطه‌ای با خط $y = 2$ را می‌یابیم:

برای محاسبه مساحت دوزنقه رنگی در شکل فوق باید اندازه ارتفاع و قاعده‌ها مشخص باشد به این منظور، نقاط تلاقی خط $y = 2$ با تابع $f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$-x - 4 = 2 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow y = -(-6) - 4 = 2 \Rightarrow A(-6, 2)$$

$$3x - 7 = 2 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3 \times 3 - 7 = 2 \Rightarrow B(3, 2)$$

پس طول پاره خط AB برابر است: با $3 - (-6) = 9$ واحد.

طول پاره خط CD هم که طبق شکل برابر $5 - (-3) = 8$ واحد است.

ارتفاع دوزنقه نیز ۳ واحد است.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times (9 + 8) \times 3 = \frac{1}{2} \times 17 \times 3 = 25.5$$

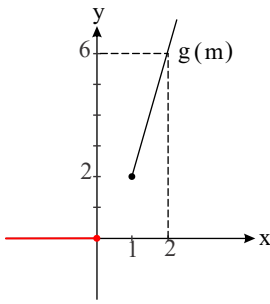
۹ - گزینه ۱ این اتومبیل در ساعت اول ۸۰ کیلومتر طی می‌کند و در ساعت دوم نیز ۸۰ کیلومتر را طی می‌کند و در زمان توقف مسافتی را طی نخواهد کرد تا ساعت سوم، به مدت نیم ساعت با

سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کرده که معادل با ۵۰ کیلومتر است. تا این زمان مجموع مسافت طی شده توسط آن برابر $50 + 160 = 210$ کیلومتر است. تا ساعت چهارم، ۱۰۰

کیلومتر دیگر طی کرده و مجموعاً ۳۱۰ کیلومتر خواهد شد. لذا گزینه ۱، پاسخ صحیح است.

۱۰ - گزینه ۴ یک تابع چند ضابطه‌ای که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است را توابع پلکانی می‌گویند. پس گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) تابع پلکانی هستند.

نکته: همچنین ضابطه تابع پلکانی، نباید شامل متغیر باشد، پس تابع $g(x)$ پلکانی محسوب نمی‌شود.



۱۱ - گزینه ۴

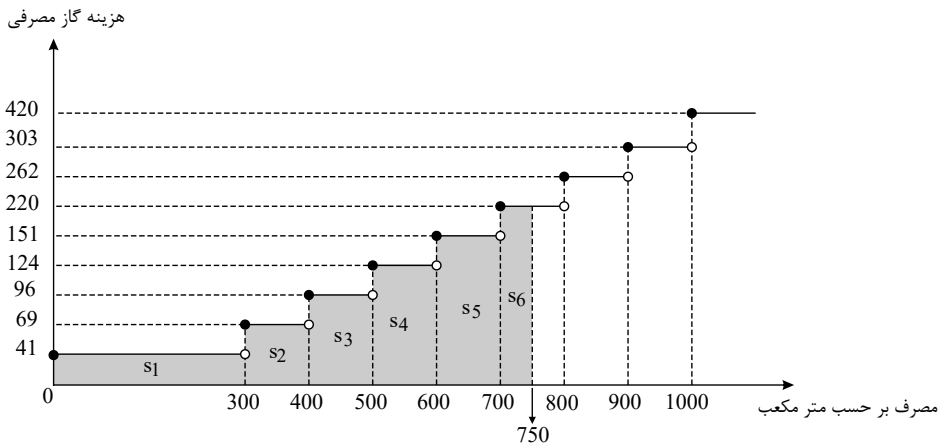
$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ -1 & , x < 0 \Rightarrow f(-4) = -1 \end{cases}$$

همچنین از روی نمودار تابع g متوجه می شویم که: $g(3) = 4$ و $g(-1) = -2$.

$$\Rightarrow \text{عبارت مطلوب} = (-1) \times (-2) + 0 \times 4 = 2$$

۱۲ - گزینه ۲ مخزن شن در ابتدا پر است، سپس در مدت زمان یک ساعت خالی می شود و دوباره آن را برعکس می کنیم و مخزن آن دوباره به حالت پر است، پس نمودار خالی شدن مخزن آن مطابق نمودار گزینه ۲ می باشد.

۱۳ - گزینه ۲ ابتدا نمودار پلکانی گازهای مصرفی را رسم می کنیم، داریم:



هزینه گاز مصرفی برابر سطح زیر نمودار هاشور خورده است، داریم:

$$S_t = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 41 \times 300 + 69 \times 100 + 96 \times 100 + 124 \times 100 + 151 \times 100 + 220 \times 50$$

$$S_t = 12300 + 6900 + 9600 + 12400 + 15100 + 11000$$

$$= 67300 \text{ تومان}$$

۱۴ - گزینه ۲ نکته: عمل جمع روی دو تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) ; D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

با توجه به نکته، ابتدا D_f و D_g را به دست می آوریم:

$$D_f = \left\{ 1, -2, \frac{1}{2} \right\} \text{ و } D_g = \left\{ \frac{1}{2}, 3, 1 \right\}$$

بنابراین:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \left\{ 1, -2, \frac{1}{2} \right\} \cap \left\{ \frac{1}{2}, 3, 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

۱۵ - گزینه ۳ نکته: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

با توجه به نکته برای رسم این تابع داریم:

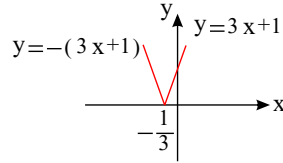
$$y = |3x + 1| = \begin{cases} 3x + 1 & 3x + 1 \geq 0 \\ -(3x + 1) & 3x + 1 < 0 \end{cases}$$

برای تعیین حدود x برای هر کدام از ضابطه ها داریم:



$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ 3x + 1 < 0 \Rightarrow 3x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y = |3x + 1| = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq -\frac{1}{3} \\ -(3x + 1) & x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$



پس ضابطه تابع به صورت مقابل است:

حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۶ - گزینه ۲ نکته: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \\ -(2x - 6) & x < 3 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

بنابراین مطابق نکته، ضابطه این تابع به صورت $f(x) = |2x - 6|$ است.

۱۷ - گزینه ۴ نکته: عمل تقسیم دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}; D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

ابتدا D_g و D_f را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \{2, 4, -1\}, \quad D_g = \{2, 3, -1\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\} = \{2, -1\} - \{2\} = \{-1\}$$

بنابراین:

۱۸ - گزینه ۱

نکته: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

با توجه به نکته داریم:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & 2x - 3 \geq 0 \\ -(2x - 3) & 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

برای تعیین حدود x برای هر کدام از ضابطه‌ها داریم:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین مقدار a برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۹ - گزینه ۳ ابتدا مقادیر تمام توابع f_1, f_2, f_3, f_4 را به ازای $x = 3$ به دست می‌آوریم.

$$f_1(x) = x - 1 \Rightarrow f_1(3) = 2$$

$$f_2(x) = x + 1 \Rightarrow f_2(3) = 4$$

$$f_3(x) = (f_1 \times f_2)(x) \Rightarrow f_3(3) = f_1(3) \times f_2(3) = 2 \times 4 = 8$$

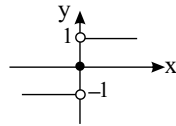
$$f_4(x) = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x) \Rightarrow f_4(3) = \frac{f_2(3)}{f_1(3)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f_5(3) = f_3(3) - f_4(3) = 8 - 2 = 6$$

بنابراین:

۲۰ - گزینه ۲ نکته: تابع علامت $(f(x) = \text{sign}(x))$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نکته، نمودار تابع را رسم می کنیم.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۲۱ - گزینه ۲ نکته: تابعی را که به هر عدد صحیح k ، خود عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k + 1$ ، عدد صحیح k را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح می نامند. با توجه به نکته بالا، مقادیر خواسته شده را به دست می آوریم:

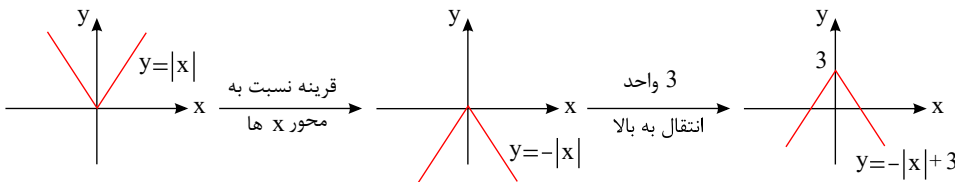
$$f(x) = [2x] - [x]$$

$$\begin{cases} f(\frac{5}{3}) = [2 \times \frac{5}{3}] - [\frac{5}{3}] = [5] - [1,6] = 5 - 1 = 4 \\ f(\frac{2}{3}) = [2 \times \frac{2}{3}] - [\frac{2}{3}] = [1,3] - [0,6] = 1 - 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(\frac{5}{3}) - f(\frac{2}{3}) = 4 - 1 = 3$$

۲۲ - گزینه ۳ نکته: برای رسم تابع $y = f(x) + k$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و به اندازه k واحد روی محور y ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ ، حرکت در جهت مثبت محور y ها و اگر $k < 0$ ، حرکت در جهت منفی محور y ها است.

نکته: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

فرآیندی که علی طی کرده است به صورت زیر است:



بنابراین ضابطه این تابع به صورت $f(x) = -|x| + 3$ است.

۲۳ - گزینه ۳

نکته: عمل تفریق روی دو تابع به صورت مقابل تعریف می شود:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) ; D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \{3, -2\} = \{3, -2\}$$

$$(f - g)(3) = f(3) - g(3) = 2 - (-1) = 3$$

با توجه به نکته بالا، دامنه $f - g$ برابر است با:

اکنون در دامنه مشترک، مقدار تابع را به دست می آوریم:

$$(f - g)(-2) = f(-2) - g(-2) = 2 - 2 = 0$$

بنابراین تابع $f - g$ به صورت مقابل است: $f - g = \{(3, 3), (-2, 0)\}$

۲۴ - گزینه ۴ نکته: عمل تقسیم دو تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} ; D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) \neq 0\}$$

با توجه به سؤال $\frac{f}{g} = \{(1, 1)\}$ ؛ یعنی $D_{\frac{f}{g}} = \{1\}$ ، ولی عدد ۲ در دامنه هر دو تابع f و g وجود دارد، پس تابع g به ازای دامنه ۲، مقدار صفر داشته که از دامنه $\frac{f}{g}$ حذف شده است. بنابراین:

$$a = 0$$

۲۵ - گزینه ۲ نکته: تابعی را که به هر عدد صحیح k ، همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k + 1$ ، عدد صحیح k را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح می نامند.

با توجه به نکته داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

بنابراین در بازه داده شده، این تابع می تواند ۵ مقدار مختلف داشته باشد.

۲۶ - گزینه ۴

نکته: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

با توجه به نکته می توان نوشت:

$$|3x - a| = \begin{cases} 3x - a & 3x - a \geq 0 \\ -(3x - a) & 3x - a < 0 \end{cases}$$

برای تعیین حدود x داریم:

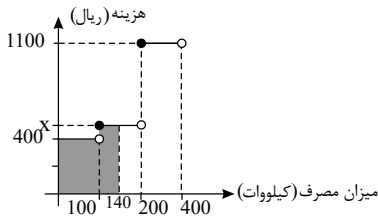
$$\begin{cases} 3x - a \geq 0 \Rightarrow 3x \geq a \Rightarrow x \geq \frac{a}{3} \\ 3x - a < 0 \Rightarrow 3x < a \Rightarrow x < \frac{a}{3} \end{cases}$$



با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = 6$$

۲۷ - گزینه ۱ هزینه برق خانه‌ای که ۱۴۰ کیلووات برق مصرف کرده است، برابر مساحت قسمت هاشور خورده در نمودار زیر است:



با توجه به فرض سؤال، این مقدار برابر ۶۲۰۰۰ ریال است، پس:

$$S = 62000 \Rightarrow 100 \times 400 + x \times 40 = 62000 \Rightarrow 40000 + 40x = 62000 \Rightarrow 40x = 22000 \Rightarrow x = \frac{22000}{40} = 550$$

۲۸ - گزینه ۴ نکته: جمع و تفریق در تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) ; D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) ; D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

با توجه به نکته بالا، به دلیل اینکه دامنه $f+g$ و دامنه $f-g$ یکسان است، داریم:

$$D_{f-g} = \{2, 4\}$$

برای به دست آوردن تابع $f-g$ نیاز به مقادیر $g(2)$ و $g(4)$ داریم. با استفاده از تابع $f+g$ که در صورت سؤال داده شده و نکته داریم:

$$(f+g)(2) = 5 \Rightarrow f(2) + g(2) = 5 \Rightarrow 3 + g(2) = 5 \Rightarrow g(2) = 2$$

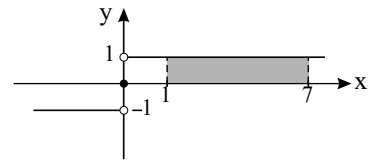
$$(f+g)(4) = 3 \Rightarrow f(4) + g(4) = 3 \Rightarrow 2 + g(4) = 3 \Rightarrow g(4) = 1$$

بنابراین:

$$\begin{cases} (f-g)(2) = f(2) - g(2) = 3 - 2 = 1 \\ (f-g)(4) = f(4) - g(4) = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow f-g = \{(2, 1), (4, 1)\}$$

۲۹ - گزینه ۲

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار مساحت مستطیل برابر است با:

$$\text{مساحت مستطیل} = (7-1) \times 1 = 6 \times 1 = 6$$

۳۰ - گزینه ۳

$$1 < 3 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\Rightarrow 2 < 2\sqrt{3} < 4 \Rightarrow 2 - 4 < 2\sqrt{3} - 4 < 4 - 4$$

$$\Rightarrow -2 < 2\sqrt{3} - 4 < 0$$

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{3} - 4 < 0 \rightarrow f(2\sqrt{3} - 4) = sign(2\sqrt{3} - 4) = -1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۱	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۲	۷ - ۲	۱۲ - ۲	۱۷ - ۴	۲۲ - ۳	۲۷ - ۱
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۲	۱۸ - ۱	۲۳ - ۳	۲۸ - ۴
۴ - ۲	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۳