

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



علی هاشمی

۱- اگر x عددی صحیح باشد، در این صورت حاصل عبارت $A = [x] + [-x] + 12$ کدام است؟ ([]، جزء صحیح است.)

۱۴ (۴)

۱۱ (۳)

۱۲ (۵)

۱۰ (۱)

۲- حاصل عبارت مقابل کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$A = \text{sign}([- \sqrt{2}]) - 2[\text{sign}(\sqrt{2})] = ?$$

-۴ (۴)

۴ (۳)

۳ (۵)

-۳ (۱)

۳- به ازای کدام مقادیر زیر تساوی $[x] = 2x - 1$ همواره برقرار است؟

-۱ و $-\frac{1}{2}$ (۴)۱ و $-\frac{1}{2}$ (۳)۱ و $\frac{1}{2}$ (۵)

صفر و ۱ (۱)

۴- با توجه به تابع $f(x) = |x|$ ، عبارت ذکر شده در کدام گزینه نادرست است؟

(۲) نمودار این تابع، از نواحی اول و دوم می‌گذرد.

(۱) دامنه این تابع \mathbb{R} و برد آن $\{y \geq 0\}$ است.(۴) اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه رابطه $f(kx) = kf(x)$ همواره برقرار است.(۳) به ازای هر مقدار حقیقی k رابطه $f(-k) = f(k)$ برقرار است.



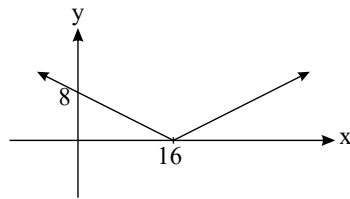
۵- نمودار توابع $y = \text{sign}(x)$ و $y = -|x|$ در چند نقطه با هم تلاقی دارند؟

- ① صفر ② یک نقطه ③ دو نقطه ④ سه نقطه

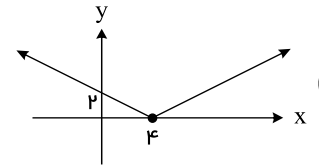
۶- با فرض $x > 2$ حاصل عبارت $A = 3|2x - 4| - |3 - 5x|$ همواره کدام است؟

- ① $9 - x$ ② $x - 9$ ③ $x - 3$ ④ $3 - x$

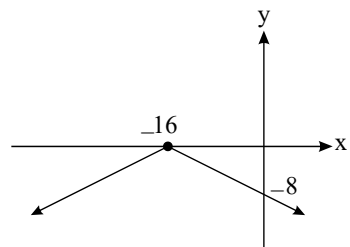
۷- نمودار تابع $y = |-\frac{1}{2}x + 8|$ کدام است؟



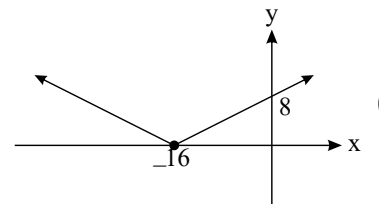
②



①



④



③

۸- می‌خواهیم تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} (m-1)x^2 + 8, & x > 1 \\ \frac{k}{4}x - 1, & x = 1 \\ n - 3, & x < 1 \end{cases}$ را به یک تابع پلکانی تبدیل کنیم. کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

- ① $m = 1$, k هر عدد دلخواه و فقط $n = 3$ ② $m = 1$, فقط $k = 0$ و n هر عدد دلخواه
 ③ $m = 1$, k و n هر عدد دلخواه می‌توانند باشند. ④ $m = 1$, فقط $k = 0$ و فقط $n = 3$



۹- شرکتی تصمیم دارد از ابتدای سال آینده، حقوق کارمندانش را افزایش دهد. این افزایش حقوق به این صورت است: حقوق‌های کمتر از یک میلیون تومان ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. حقوق‌های بین ۱ تا ۲ میلیون تومان به ازای مازاد حقوق از ۱ میلیون، ۱۸ درصد افزایش می‌یابد. حقوق‌های بین ۲ تا ۴ میلیون به ازای مازاد حقوق از ۲ میلیون، ۱۲ درصد افزایش می‌یابد و حقوق‌های بیش از ۴ میلیون تومان به ازای مازاد حقوق از ۴ میلیون تومان، ۱۰ درصد افزایش خواهند یافت. اگر حقوق کارمندی ۵۶۰ هزار تومان افزایش یابد، حقوق قبلی او چه قدر بوده است؟

۳۲۰۰۰۰۰ (۴)

۲۵۰۰۰۰۰ (۳)

۳۵۰۰۰۰۰ (۲)

۴۲۰۰۰۰۰ (۱)

۱۰- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد و داشته باشیم $f(\sqrt{2}) = -1$ ، آنگاه رابطه $\frac{2f(0,1)g(\frac{1}{4})}{-3ag(-2)} = \frac{1}{3}$ به ازای کدام مقدار a همواره برقرار است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

۱۱- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & x < -2 \\ |x^2 - 14| & -2 \leq x < 5 \\ 6 & x \geq 5 \end{cases}$ ، حاصل $f(2\sqrt{2}) - f(-4)$ کدام است؟

۸ (۴)

۱۴ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)

۱۲- مساحت محدود به نمودار تابع $y + |x| - 2 = 0$ و محور x ‌ها کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



۱۳- اگر $f(x) = \left[\frac{x+1}{2} \right]$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\frac{(f \cdot g)(-2)}{f(-\frac{1}{2}) - 2g(0,2)}$ کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

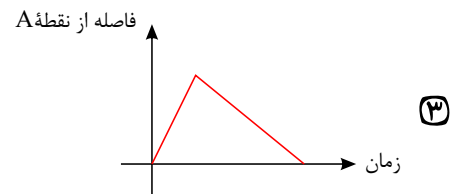
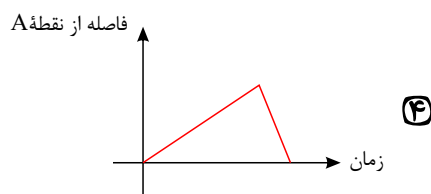
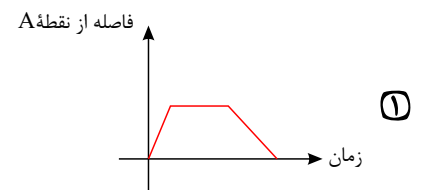
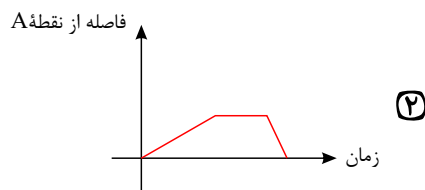
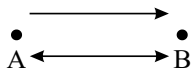
- ① -۱ ② ۲ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$

۱۴- اگر $f = \{(2, 1), (-2, 4), (6, -2)\}$ و $g = \{(4, 1), (2, -3), (3, 7), (6, -4)\}$ باشند، آنگاه $f + g$ کدام است؟

- ① $\{(-2, 2), (-6, 6)\}$ ② $\{(2, 2), (6, 6)\}$ ③ $\{(2, -2), (6, -6)\}$ ④ $\{(-2, -2), (-6, -6)\}$

۱۵- کدام نمودار مربوط به داستان زیر است؟

«دونده‌ای؛ کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت در مدت ۵ دقیقه از نقطه A تا نقطه B شروع به دویدن می‌کند و به مدت ۲ دقیقه در نقطه B می‌ایستد و سپس همان مسیر را با سرعت ثابت در مدت ۲ دقیقه باز می‌گردد تا به نقطه A برسد.»





۱۶- تابع $f(x)$ به ازای $2 < x < 5$ تابعی همانی و به ازای $x \geq 2$ و $x \leq -5$ تابعی ثابت است. اگر $f(1) + f(6) = 5$ و $f(-2) - f(-6) = -1$ باشد، حاصل $\frac{f(-5)f(2)}{f(-2)}$ کدام است؟

- ① -۱ ② ۱ ③ ۲ ④ -۲

۱۷- مقدار k کدام گزینه باشد تا نمودار تابع f از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات عبور کند؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 0 \\ x + k & x \geq 0 \end{cases}$$

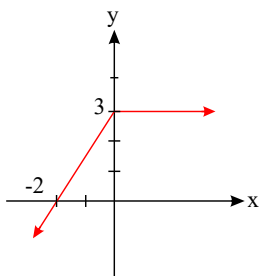
- ① صفر ② ۱ ③ -۱ ④ ۲

۱۸- اگر در تابع زیر $f(2) = 6$ و $f\left(\frac{-4}{3}\right) = 1$ باشد، حاصل $f(-3)$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 2bx^2 + 2ax & x < -2 \\ 3 + bx & -2 \leq x \leq 1 \\ ax^3 - 3x^2 - 6 & x > 1 \end{cases}$$

- ① ۹ ② -۹ ③ ۳۶ ④ -۳۶

۱۹- با توجه به نمودار تابع مقابل، حاصل $2f(-2\sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$ کدام است؟



- ① $-4\sqrt{2} + 9$ ② $-3\sqrt{2} + 6$ ③ $2\sqrt{2} + 6$ ④ $-6\sqrt{2} + 9$



۲۰- اگر رابطه $g(x) = \begin{cases} 2ax + 1 & x \geq 0 \\ x - b & x \leq 0 \end{cases}$ تابع باشد، در این صورت مقدار b کدام است؟

- ① -۱ ② ۱ ③ ۲ ④ بستگی به مقدار a دارد.

۲۱- اگر زوج‌های مرتب $(1, n^2 - 4n + 1)$ و $(-2, n^2 - 6n + 6)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار n کدام است؟

- ① صفر ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۲- اگر تابع $g = \{(a, b), (c, d), (e, f)\}$ ثابت باشد، واریانس داده‌های b, d و f چند برابر میانگین آن‌هاست؟

- ① ۱ ② صفر ③ \sqrt{bdf} ④ $\sqrt{b^2 + d^2 + f^2}$

۲۳- اگر برد تابع ثابت f برابر با $\{4, k - 1\}$ و زوج مرتب $(5, 3m + 1)$ عضو f باشد، مقدار $k - m$ کدام است؟

- ① ۳ ② ۸ ③ ۴ ④ ۲



۲۴- برد تابع علامت ($y = \text{sign}(x)$) کدام است؟

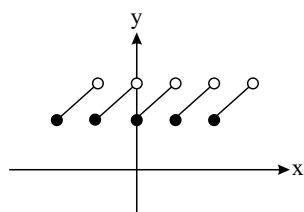
$R - \{-1, 0, 1\}$ (۴)

$\{-1, 0, 1\}$ (۳)

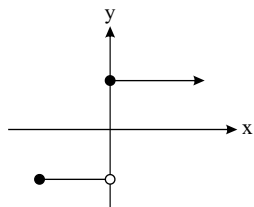
R (۲)

$\{1, -1\}$ (۱)

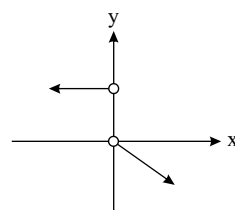
۲۵- کدام نمودار زیر، بیانگر یک تابع پلکانی است؟



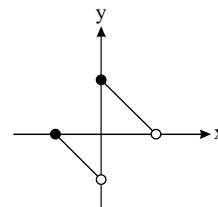
(۲)



(۴)



(۱)



(۳)

۲۶- چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) اگر $x = ۲,۲$ و $y = -۱,۴$ باشد، $[x + y] = [x] + [y]$.

ب) اگر $x = -۲,۲$ باشد، $[۲x] = ۲[x]$.

ج) اگر $x = ۲$ و $y = ۱,۵$ باشد، $[xy] = [x][y]$.

د) اگر $x = -۱,۳$ و $y = -۲,۸$ باشد، $[x - y] = [x] - [y]$.

سه (۴)

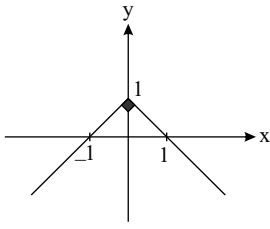
دو (۳)

یک (۲)

صفر (۱)

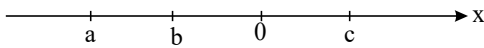


۲۷- با توجه به نمودار تابع قدر مطلق مقابل، ضابطه آن کدام است؟



- ① $y = |x| - 1$
- ② $y = |x| + 1$
- ③ $y = -|x| + 1$
- ④ $y = -|x| - 1$

۲۸- فرض کنید ترتیب قرارگیری a ، b و c روی محور اعداد به شکل زیر باشد. در این صورت حاصل عبارت $|2a + b| - 2|b - c| + |2c - a|$ کدام است؟



- ① $3b + a$
- ② $4c - b + a$
- ③ $b - 3a$
- ④ $4c - 3a - 3b$

۲۹- در یک مؤسسه مالی و اعتباری، پرداخت وام به مشتریان به این صورت است که اگر کل مبلغ وام در ماه اول بازپرداخت شود، سود این وام ۴ درصد خواهد بود. در صورتی که بخشی از اقساط وام به ماه دوم موکول شود به آن قسط ۶ درصد سود اضافه خواهد شد و به همین ترتیب، قسط هر ماه نسبت به ماه قبلی، همراه با ۲ درصد سود پرداخت می‌شود. اگر شخصی ۵ میلیون تومان از این مؤسسه وام بگیرد و بازپرداخت آن را در ۵ ماه و هر ماه یک میلیون تومان (به علاوه سود آن)، پرداخت کند، مؤسسه چه قدر سود از این شخص دریافت خواهد کرد؟

- ① ۴۰۰ هزار تومان
- ② ۴۸۰ هزار تومان
- ③ ۳۶۰ هزار تومان
- ④ ۳۲۰ هزار تومان

۳۰- نمودار دو تابع $y = |x - 3|$ و $y = -|x - 3| + 2$ در چند نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟

- ① هیچ
- ② ۳
- ③ ۱
- ④ ۲





پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ تا به جزء صحیح به ازای هر عدد صحیح برابر خود عدد است.

مثال:

$$[3] = 3 \text{ یا } [-4] = -4$$

در نتیجه چون x عددی صحیح است داریم:

$$A = [x] + [-x] + 12 = \underbrace{x + (-x)}_{x-x=0} + 12 = 12$$

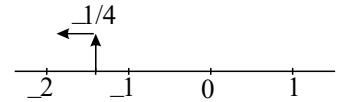
۲ - گزینه ۱ تابع جزء صحیح به ازای هر عدد صحیح برابر خود عدد صحیح و به ازای هر عدد غیر صحیح برابر اولین عدد صحیح در سمت چپ محور اعداد است.

$$\text{ضابطه تابع علامت به صورت } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

داریم: $\sqrt{2} \approx 1,4$

$$[-\sqrt{2}] \approx [-1,4] = -2$$

$$\text{sign}(\sqrt{2}) = \frac{\text{عددی}}{\text{مثبت}} \sqrt{2} = 1$$



$$A = \underbrace{\text{sign}[-\sqrt{2}]}_{\text{sign}(-2)=-1} - 2 \underbrace{\text{sign}(\sqrt{2})}_{[1]=1} = -1 - 2 \times 1 = -3$$

۳ - گزینه ۲ با قرار دادن مقادیر گزینه‌ها در معادله داریم:

گزینه ۱:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \\ 2 \times 0 - 1 = -1 \quad \times \end{cases} \\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} [1] = 1 \\ 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

گزینه ۲:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{2}] = 0 \\ 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} [1] = 1 \\ 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

گزینه ۳:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [-\frac{1}{2}] = -1 \\ 2 \times (-\frac{1}{2}) - 1 = -1 - 1 = -2 \quad \times \end{cases} \\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} [1] = 1 \\ 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

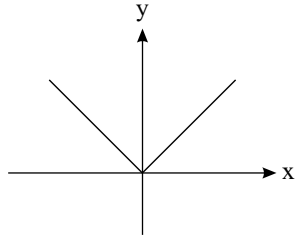
گزینه ۴:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [-\frac{1}{2}] = -1 \\ 2 \times (-\frac{1}{2}) - 1 = -1 - 1 = -2 \quad \times \end{cases} \\ x = -1 \Rightarrow \begin{cases} [-1] = -1 \\ 2 \times (-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \quad \times \end{cases} \end{cases}$$

این تساوی فقط به ازای $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ برقرار است.



نمودار تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$ به صورت مقابل است.



بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: دامنه تابع قدر مطلق \mathbb{R} و برد آن $\{y \geq 0\}$ است. (نمودار x ها مربوط به دامنه و نمودار y ها مربوط به مقادیر برد تابع است).

گزینه ۲: نمودار تابع قدر مطلق از ناحیه اول و دوم می‌گذرد.

گزینه ۳: به ازای هر مقدار حقیقی k رابطه $f(-k) = f(k)$ برقرار است مانند: $|-3| = |3|$ یا $|4.5| = |-4.5|$

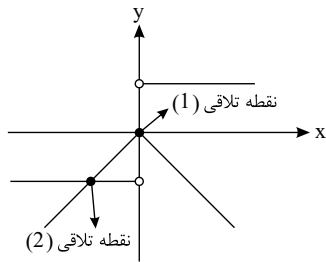
گزینه ۴: نادرست است. به ازای عدد صحیح k برای تابع قدر مطلق رابطه $f(kx) = k f(x)$ همواره برقرار نیست.

$$k = -1 \Rightarrow f(-x) = -1 f(x) \Rightarrow |-x| \neq -|x|$$

۵ - گزینه ۳ برای مشخص کردن تعداد نقاط تلاقی دو تابع $y = -|x|$ و $y = \text{sign}(x)$ دو تابع را در یک نمودار مختصاتی رسم می‌کنیم.

$$y = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = -|x| = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$



دو تابع $y = -|x|$ و $y = \text{sign}(x)$ در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۶ - گزینه ۲ ضابطه تابع قدر مطلق $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ است.

حال علامت هر قسمت را با توجه به $x > 2$ مشخص می‌کنیم.

$$x > 2 \quad 2x - 4 \longrightarrow 2x - 4 > 0$$

$$x > 2 \quad 3 - 5x \longrightarrow 3 - 5x < 0$$

$$A = 3|2x - 4| - |3 - 5x| = 3(2x - 4) - (-(3 - 5x))$$

$$= 3(2x - 4) + 3 - 5x = 6x - 12 + 3 - 5x = x - 9$$

در نتیجه داریم:

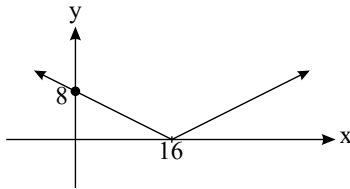
۷ - گزینه ۲ تابع $f(x) = \left| -\frac{1}{2}x + 8 \right|$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \left| -\frac{1}{2}x + 8 \right| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 8, & -\frac{1}{2}x + 8 \geq 0 \\ -(-\frac{1}{2}x + 8), & -\frac{1}{2}x + 8 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 8, & x \leq 16 \\ \frac{1}{2}x - 8, & x > 16 \end{cases}$$



حال با رسم نمودارهای دو ضابطه تابع در قسمت‌های مربوط به دامنه تعریف هر ضابطه داریم:



۸ - گزینه ۳ تابع پلکانی، تابعی چند ضابطه‌ای است که هر ضابطه آن تابعی ثابت باشد. پس در هر قسمت ضرایب مربوط به x را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = \begin{cases} (m-1)x^2 + 8, & x > 1 \\ \frac{k}{2}x - 1, & x = 1 \\ n-3, & x < 1 \end{cases}$$

در ضابطه اول ضریب x^2 یعنی $m-1$ را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

در ضابطه دوم چون x فقط مقدار ۱ را دارد لازم نیست ضریب x یعنی $\frac{k}{2}$ برابر صفر باشد چون با قرار دادن $x = 1$ در $\frac{k}{2}x - 1$ مقدار آن ثابت است.

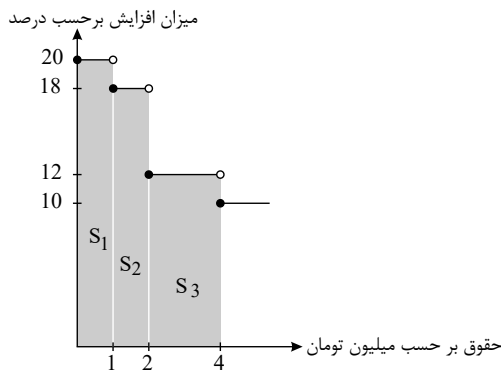
$$\frac{k}{2}x - 1 \Big|_{x=1} = \frac{k}{2} - 1$$

k هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد.

در ضابطه سوم اصلاً متغیر x نداریم و همواره مقدار ثابتی است؛ پس مقدار n نیز می‌تواند هر مقدار دلخواهی باشد.

۹ - گزینه ۲

ابتدا نمودار مختصاتی مربوط به افزایش حقوق کارمندان را رسم می‌کنیم.



حال مساحت نمودار را در هر قسمت محص می‌کنیم.

$$S_1 = 1000000 \times \frac{20}{100} = 200000 \text{ تومان}$$

$$S_2 = 1000000 \times \frac{18}{100} = 180000 \text{ تومان}$$

$$S_3 = 2000000 \times \frac{12}{100} = 240000 \text{ تومان}$$

اگر میزان افزایش حقوق کمتر از S_1 باشد یعنی حقوق اولیه شخص کمتر از یک میلیون تومان است. اگر بین S_1 و S_2 باشد، حقوقش بین یک تا دو میلیون تومان و اگر بین S_2 و S_3 باشد $S_1 + S_2 + S_3$ باشد حقوق بین ۲ تا ۴ میلیون و در غیر این صورت بیشتر از ۴ میلیون تومان است.

$$S_1 = 200000, S_1 + S_2 = 200000 + 180000 = 380000$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 200000 + 180000 + 240000 = 620000$$

افزایش حقوق ۵۶۰۰۰۰ تومان بوده است یعنی بین $S_1 + S_2$ و $S_1 + S_2 + S_3$ پس حقوق بین ۲ تا ۴ میلیون تومان بوده است.

اگر حقوق این کارمند را x تومان در نظر بگیریم، پس میزان افزایش حقوق برابر است با:

$$S_1 + S_2 + (x - 380000) \times \frac{12}{100} = 560000$$

$$\Rightarrow 380000 + (x - 380000) \times \frac{12}{100} = 560000$$



$$\Rightarrow (x - 200000) \times \frac{12}{100} = 180000 \Rightarrow x - 200000 = 150000$$

$$\Rightarrow x = 350000$$

۱۰ - گزینه ۱ می‌دانیم ضابطه تابع ثابت $f(x) = k$ است یعنی خروجی‌ها همواره برابر k می‌باشد، با توجه به $f(\sqrt{2}) = -1$ متوجه می‌شویم که k برابر -1 است بنابراین $f(x) = -1$ از طرفی ضابطه تابع همانی به صورت $g(x) = x$ است یعنی ورودی و خروجی تابع همواره باهم برابر است. پس:

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \text{ و } g(-2) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2f \circ g\left(\frac{1}{4}\right)}{-3ag(-2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2 \times (-1) \times \left(\frac{1}{4}\right)}{-3 \times a \times (-2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{-12a} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -12a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{-12} = \frac{-1}{4}$$

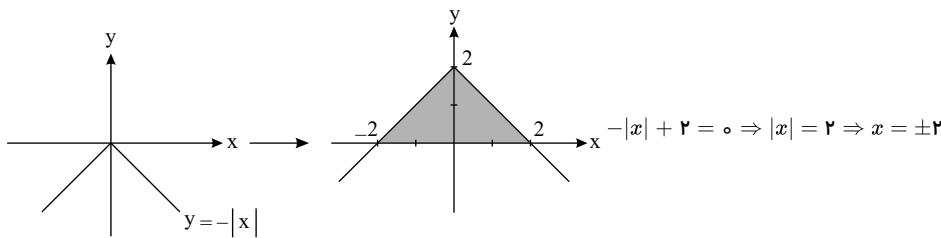
۱۱ - گزینه ۳

$$\begin{cases} f(2\sqrt{2}) = |(2\sqrt{2})^2 - 14| = |4 \times 2 - 14| = 6 \\ 2\sqrt{2} \approx 2 \times 1,4 = 2,8 \end{cases}$$

$$f(-4) = 3(-4) + 4 = -12 + 4 = -8$$

$$\Rightarrow f(2\sqrt{2}) - f(-4) = 6 - (-8) = 14$$

۱۲ - گزینه ۳ با تنها کردن y خواهیم داشت: $y = -|x| + 2$ سپس نمودار را رسم می‌کنیم.



$$S = \frac{1}{2} \times (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

با توجه به شکل بالا داریم:

۱۳ - گزینه ۴

$$g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$(f \cdot g)(-2) = f(-2)g(-2) = \left[\frac{-2+1}{2}\right] \text{sign}(-2) = -1 \times -1 = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}\right] = \left[\frac{1}{4}\right] = 0$$

$$g(0,2) = 1$$

$$\text{مطلوب سؤال: } \frac{1}{0 - 2(1)} = \frac{1}{-2}$$

۱۴ - گزینه ۲ می‌دانیم در صورتی دو زوج مرتب با هم جمع می‌شوند که مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند.

$$f + g = \{(2, -3 + 1), (6, -2 - 4)\} = \{(2, -2), (6, -6)\}$$

۱۵ - گزینه ۲ مدت زمانی که طول می‌کشد تا دنده از نقطه A به نقطه B برسد، بیشتر از مدت زمانی است که دنده از نقطه B به نقطه A می‌رسد پس از نظر اندازه، شیب نمودار فاصله از نقاط A تا B در مرحله اول کمتر از مرحله سوم هنگام برگشت است از طرفی مدت زمانی که دنده در نقطه B توقف داشته ۲ دقیقه است. پس در این مدت نمودار تابع ثابت (موازی محور طول‌ها)



است.

۱۶ - گزینه ۳ تابع $f(x)$ تابعی سه ضابطه‌ای است. از آنجا که تابع $f(x)$ در بازه $۲ < x < ۵$ تابع همانی است در این بازه $f(x) = x$ است پس $f(-۲) = -۲$ و $f(۱) = ۱$ است. طبق فرض سؤال:

$$f(۱) + f(۶) = ۵ \Rightarrow ۱ + f(۶) = ۵ \Rightarrow f(۶) = ۴$$

$$f(-۲) - f(-۶) = -۱ \Rightarrow -۲ - f(-۶) = -۱ \Rightarrow f(-۶) = -۱$$

تابع f به ازای $۲ \geq x$ و $x \leq -۵$ تابعی ثابت است پس ضابطه تابع f ، به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x \leq -۵ \\ x & -۵ < x < ۲ \\ ۴ & x \geq ۲ \end{cases}$$

پس با توجه به ضابطه تابع f داریم:

$$f(-۵) = -۱ \text{ و } f(۲) = ۴ \text{ و } f(-۲) = -۲$$

$$\frac{f(-۵)f(۲)}{f(-۲)} = \frac{(-۱) \times ۴}{-۲} = \frac{-۴}{-۲} = ۲$$

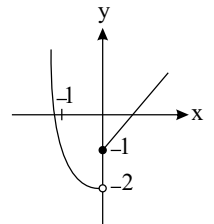
۱۷ - گزینه ۳

x	-۱	۰
$x^۲ - ۲$	-۱	-۲

x	۰	۱
$x + k$	k	$۱ + k$

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲ & x < ۰ \\ x + k & x \geq ۰ \end{cases}$$

از رسم قسمت سهمی نمودار درمی‌یابیم که نمودار از نواحی دوم و سوم می‌گذرد. حال برای اینکه کل نمودار تابع از هر چهار ناحیه عبور کند، می‌بایست نمودار تابع خطی (ضابطه دوم) از نواحی اول و چهارم عبور کند. اگر $k \geq ۰$ در این صورت نمودار تابع خطی فقط از ناحیه اول عبور می‌کند. پس الزاماً می‌بایست مقدار k منفی باشد تا نمودار از ناحیه چهارم نیز عبور کند.



۱۸ - گزینه ۱ با قرار دادن مقادیر $f(۲) = ۶$ و $f(-\frac{۴}{۳}) = ۱$ در ضابطه تابع مقادیر a و b را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \begin{cases} ۲bx^۲ + ۲ax & x < -۲ \\ ۳ + bx & -۲ \leq x \leq ۱ \\ ax^۳ - ۳x^۲ - ۶ & x > ۱ \end{cases}$$

$$f(۲) = ۶ \xrightarrow{\text{ضابطه سوم}} a(۲)^۳ - ۳(۲)^۲ - ۶ = ۶ \Rightarrow ۸a - ۱۲ - ۶ = ۶ \Rightarrow ۸a = ۲۴ \Rightarrow a = ۳$$

$$f(-\frac{۴}{۳}) = ۱ \xrightarrow{\text{ضابطه دوم}} ۳ + b(-\frac{۴}{۳}) = ۱ \Rightarrow ۳ - \frac{۴b}{۳} = ۱ \Rightarrow \frac{۴b}{۳} = ۲ \Rightarrow b = ۲ \times \frac{۳}{۴} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

حال با قرار دادن $a = ۳$ و $b = \frac{۳}{۲}$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + ۶x & x < -۲ \\ ۳ + \frac{۳}{۲}x & -۲ \leq x \leq ۱ \\ ۳x^۳ - ۳x^۲ - ۶ & x > ۱ \end{cases}$$

برای به دست آوردن $f(-۳)$ از ضابطه اول داریم:

$$f(-۳) = ۳(-۳)^۲ + ۶ \times (-۳) = ۲۷ - ۱۸ = ۹$$

۱۹ - گزینه ۴ ابتدا با توجه به نمودار مختصاتی تابع ضابطه آن را مشخص می‌کنیم.

این تابع به ازای مقادیر بزرگتر از صفر، تابع ثابت $f(x) = ۳$ و به ازای مقادیر کوچکتر از صفر به صورت خط گذرنده از دو نقطه $(۰, ۳)$ و $(-۲, ۰)$ است.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰ - ۳}{-۲ - ۰} = \frac{۳}{۲}$$

$$y = mx + h \xrightarrow{\text{جایگذاری (۰, ۳)}} ۳ = m(۰) + h \Rightarrow h = ۳ \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + ۳$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 3 & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

باتوجه به این که $\sqrt{2} > 0$ است پس $f(\sqrt{2}) = 3$ و همچنین $-2\sqrt{2} < 0$ پس $f(-2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}(-2\sqrt{2}) + 3 = -3\sqrt{2} + 3$ و در آخر

$$2f(-2\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = 2(-3\sqrt{2} + 3) + 3 = -6\sqrt{2} + 9$$

۲۰ - گزینه ۱ برای اینکه رابطه $g(x) = \begin{cases} 2ax + 1 & x \geq 0 \\ x - b & x \leq 0 \end{cases}$ تابع باشد باید مقادیر در هر کدام از ضابطه‌ها به ازای $x = 0$ باهم برابر باشند.

$$2ax + 1 = x - b \Rightarrow 2a \times 0 + 1 = 0 - b \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$$

۲۱ - گزینه ۴ هر نقطه روی نیمساز ناحیه اول و سوم دارای طول و عرض یکسان است پس مؤلفه‌های اول و دوم هر کدام از این زوج مرتب‌ها باهم برابرند.

$$(1, n^2 - 4n + 1) \Rightarrow n^2 - 4n + 1 = 1 \Rightarrow n^2 - 4n = 0 \Rightarrow n(n - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$(-2, n^2 - 6n + 6) \Rightarrow n^2 - 6n + 6 = -2 \Rightarrow n^2 - 6n + 8 = 0 \Rightarrow (n - 2)(n - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 4 \end{cases}$$

پس به ازای $n = 4$ که اشتراک مقادیر به دست آمده برای n از دو معادله است دو زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار می‌گیرند.

۲۲ - گزینه ۲ تابع g ، تابعی ثابت است پس مؤلفه‌های دوم همه زوج مرتب‌ها باهم برابرند یعنی $b = d = f$ اگر داده‌ها باهم برابر باشند واریانس آن‌ها برابر صفر و میانگین آن‌ها برابر هر کدام از آن‌هاست. در نتیجه:

$$\frac{f, d, b \text{ واریانس}}{f, d, b \text{ میانگین}} = \frac{0}{b} = \frac{0}{d} = \frac{0}{f} = 0$$

۲۳ - گزینه ۳ برد تابع ثابت، فقط شامل یک عضو است.

$$R_f = \{4, k - 1\} \Rightarrow k - 1 = 4 \Rightarrow k = 5$$

زوج مرتب $(1 + 3m, 5)$ عضوی از تابع f است پس مؤلفه دوم آن باید برابر ۴ باشد.

$$3m + 1 = 4 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$$

پس حاصل $k - m = 5 - 1 = 4$ است.

۲۴ - گزینه ۳ ضابطه تابع علامت به صورت $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ است و برد آن $\{-1, 0, 1\}$ است.

۲۵ - گزینه ۴ تابع پلکانی، تابعی چند ضابطه‌ای است که هر ضابطه آن مقدار تابع عددی ثابت باشد.

۲۶ - گزینه ۳ بررسی گزاره‌ها:

(الف)

$$x = 2, y = -1, 4 \Rightarrow \begin{cases} [x + y] = [2, 2 + (-1, 4)] = [0, 8] = 0 \\ [x] + [y] = [2, 2] + [-1, 4] = 2 + (-2) = 0 \end{cases}$$

درست است.

(ب)

$$x = 2, 2 \Rightarrow \begin{cases} [2x] = [2 \times (-2, 2)] = [-4, 4] = -5 \\ [2][x] = 2[-2, 2] = 2 \times (-3) = -6 \end{cases}$$

نادرست است.

(ج)

$$x = 2, y = 1, 5 \Rightarrow \begin{cases} [xy] = [2 \times 1, 5] = [3] = 3 \\ [x][y] = [2][1, 5] = 2 \times 1 = 2 \end{cases}$$

نادرست است.

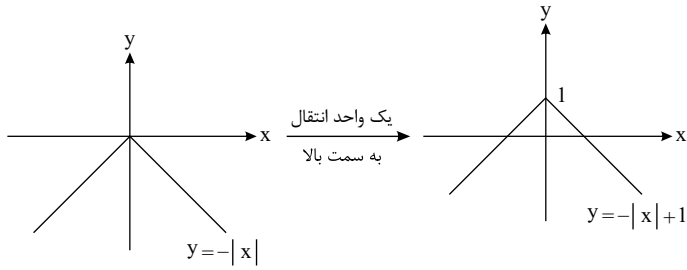
(د)

$$x = -1, 3, y = -2, 8 \Rightarrow \begin{cases} [x - y] = [-1, 3 - (-2, 8)] = [-1, 3 + 2, 8] = [1, 5] = 1 \\ [x] - [y] = [-1, 3] - [-2, 8] = -2 - (-3) = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$

درست است.

پس در بین گزاره‌ها، گزاره‌های (الف) و (د) درست هستند.

۲۷ - گزینه ۳



۲۸ - گزینه ۳ ضابطه تابع قدرمطلق به صورت $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$|2a + b| : a < 0, b < 0 \Rightarrow 2a + b < 0 \Rightarrow |2a + b| = -2a - b$$

$$|b - c| : b < 0, c > 0 \Rightarrow -c < 0 \Rightarrow b - c < 0 \Rightarrow |b - c| = -b + c = c - b$$

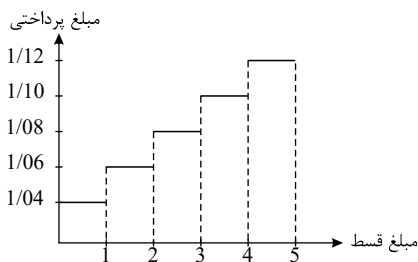
$$|2c - a| : c > 0, a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow 2c - a > 0 \Rightarrow |2c - a| = 2c - a$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |2a + b| - 2|b - c| + |2c - a| &= -2a - b - 2(c - b) + 2c - a \\ &= -2a - b - 2c + 2b + 2c - a = b - 3a \end{aligned}$$

۲۹ - گزینه ۱ نمودار پله‌ای قسط پرداخت شده به صورت زیر است. سود ۴ درصدی برابر ۱٫۰۴ مبلغ قسط است که ماه‌های بعدی این سود افزایش یافته است.

برای به دست آوردن کل مبلغ پرداخت شده کافی است مساحت زیر نمودار را به دست آوریم.

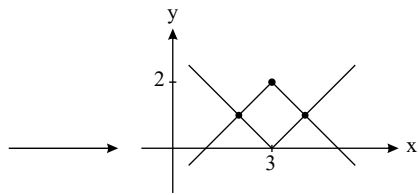
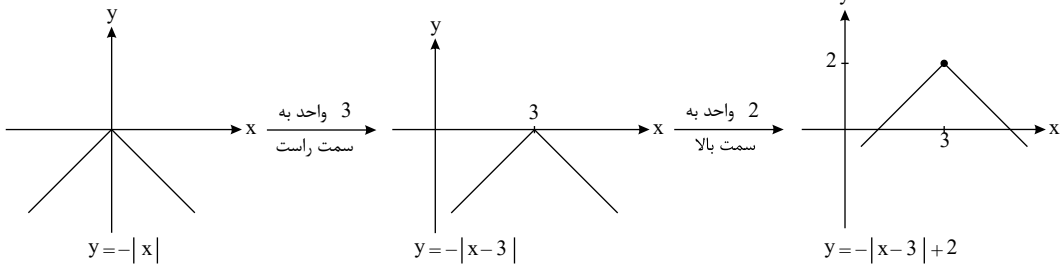
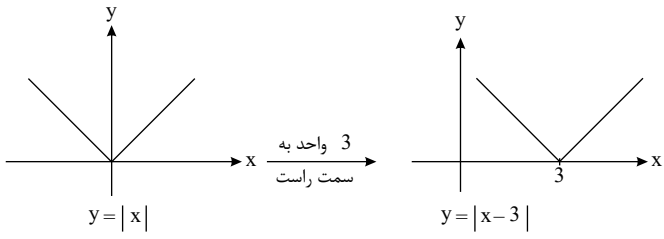


$$\text{مساحت زیر نمودار} : 1 \times 1,04 + 1 \times 1,06 + 1 \times 1,08 + 1 \times 1,10 + 1 \times 1,12 = 5,40$$

$$\Rightarrow 5,40 \times 1000000 = 5400000 \Rightarrow \text{سود مؤسسه} = 400000 \text{ تومان}$$

۳۰ - گزینه ۴ دو نمودار داده شده در یک صفحه مختصات را رسم می‌کنیم.

برای رسم نمودار $y = |x - 3|$ کافیست نمودار تابع $y = |x - 3|$ را در ۳ واحد به سمت راست انتقال دهیم. هم چنین برای رسم نمودار $y = -|x - 3| + 2$ نمودار تابع $y = -|x - 3| + 1$ را ۱ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۲	۱۱ - ۳	۱۶ - ۳	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۲	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۳	۱۳ - ۴	۱۸ - ۱	۲۳ - ۳	۲۸ - ۳
۴ - ۴	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۴	۲۴ - ۳	۲۹ - ۱
۵ - ۳	۱۰ - ۱	۱۵ - ۲	۲۰ - ۱	۲۵ - ۴	۳۰ - ۴