

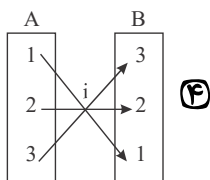
سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

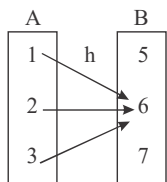


علی هاشمی

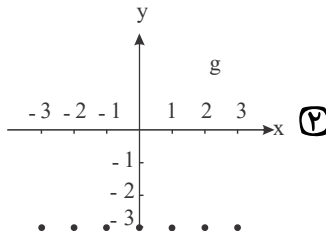
۱- کدام تابع زیر، نمی تواند بیانگر تابعی ثابت باشد؟



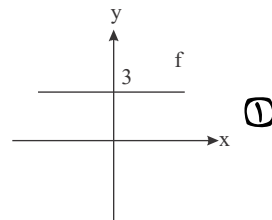
(۴)



(۳)



(۷)



(۱)

۲- اگر جدول زیر مربوط به یک تابع ثابت باشد، در این صورت حاصل $a + b + c$ کدام است؟

x	-۱	-۲		۳	$\sqrt{۲}$
y	\sqrt{a}	$b^۲$	$۲b - ۱$		c

(۴) -۳

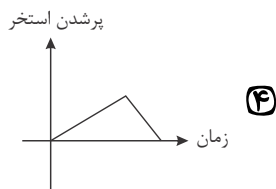
(۳) -۱

(۷) ۳

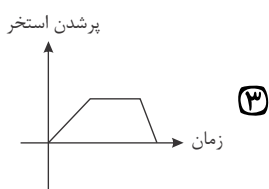
(۱) ۱

۳- کدام نمودار مربوط به داستان زیر است؟

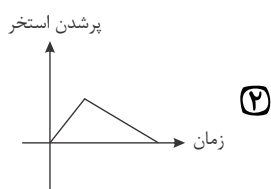
«استخر آبی توسط یک شیر ۷ ساعت طول می کشد تا پر شود. سپس بعد از ۳ ساعت، شیر دیگری را باز می کنیم تا استخر خالی شود که مدت زمان خالی شدن استخر ۴ ساعت طول می کشد.»



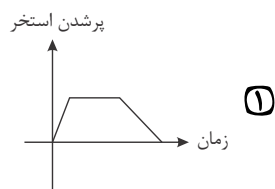
(۴)



(۳)



(۷)



(۱)



۴- اگر f تابعی همانی با دامنه R و g تابعی ثابت با دامنه R برد $\{3\}$ و h تابعی چند ضابطه‌ای به شکل $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -x - 1, & x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل

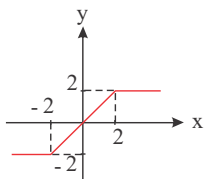
عبارت $A = \frac{2f(-6) + g(1000)}{h(\sqrt{3}) - h(-4)}$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۷)

۸ (۱)



$$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 2 \\ x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -2, & x < -2 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 2 \\ -x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -2, & x < -2 \end{cases} \quad (۴)$$

۵- ضابطه مربوط به تابع زیر کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 0 \\ x - 2, & x < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x > 2 \\ x, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2, & x < -2 \end{cases} \quad (۳)$$

۶- خط $y = 4$ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 4, & x < 0 \end{cases}$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۷)

صفر (۱)

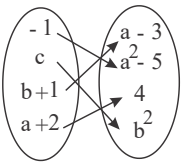
۷- اگر زوج مرتب $(2x - 4, x^2 - 2x - 1)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد، در این صورت مقدار x کدام است؟

۳ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۷)

۲ (۱)



۸- اگر نمودار ون زیر مربوط به یک تابع همانی باشد، در این صورت حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

۲۴ (۲)

۱۶ (۱)

۳۰ (۴)

۱۲ (۳)

۹- اگر $f = \{(5, \sqrt{9}), (6, m - 2n), (10, m + 2n)\}$ تابعی ثابت و $g = \{(\frac{a}{2}, 1), (4, 4), (8, b - 2)\}$ تابعی همانی باشد، حاصل عبارت

$m - n + a - b$ کدام است؟

۶ (۴)

-۶ (۳)

۵ (۲)

-۵ (۱)

۱۰- نمودار مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که هر خط موازی محور نمودار را در یک نقطه قطع کند.

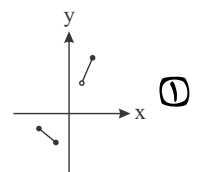
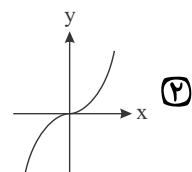
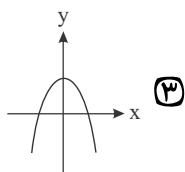
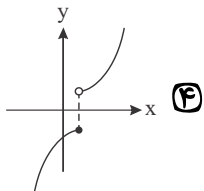
عرض‌ها - حداقل (۴)

عرض‌ها - حداکثر (۳)

طول‌ها - حداقل (۲)

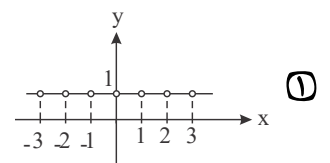
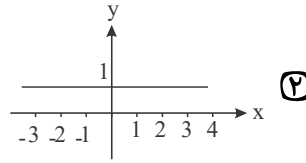
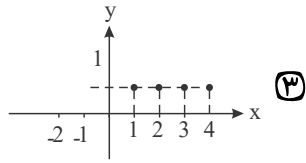
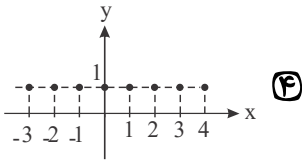
طول‌ها - حداکثر (۱)

۱۱- دامنه کدام تابع مجموعه اعداد حقیقی نیست؟





۱۲- نمودار تابع ثابت $f(x) = \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ f(x) = 1 \end{cases}$ کدام است؟ (\mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی و \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح است.)



۱۳- در تابع ثابت $f(x) = C$ ، $f(x^2 - 3x + 4) = (f(x))^2 - 3f(x) + 4$ است. در این صورت حاصل $f(2)$ کدام است؟

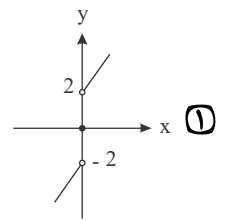
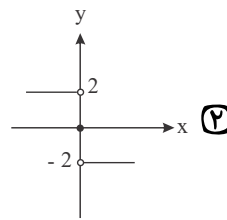
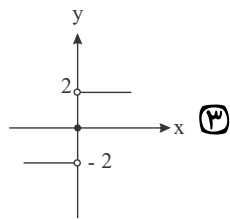
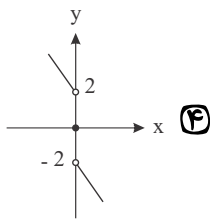
$-\frac{1}{2}$ (A)

$\frac{1}{2}$ (B)

-2 (C)

2 (D)

۱۴- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -2 & , x < 0 \end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟



۱۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} -3 & , x < -1 \\ 2x^2 & , -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $f(-1) + 2f(1)$ برابر است با:

4 (A)

-1 (B)

8 (C)

3 (D)



۱۶- با فرض آن که $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \geq 2 \\ x^2-3 & , x < 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & , x \geq 4 \\ \frac{1}{x^2+3} & , x < 4 \end{cases}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{2f(3) - 5g(13)}{9g(0) + f(\sqrt{2})}$ کدام است؟

۱) ۵٫۵
 ۲) -۵٫۵
 ۳) ۷٫۵
 ۴) -۷٫۵

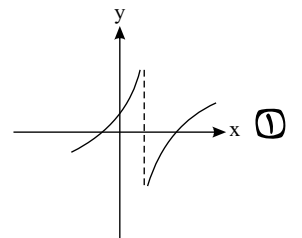
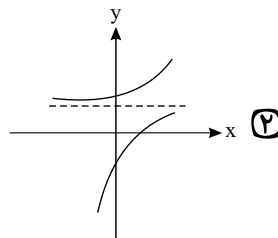
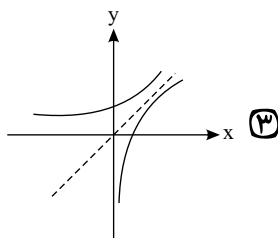
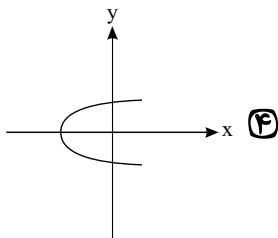
۱۷- به ازای چه مقدار از k نقطه $A(2k-1, 5k+6)$ روی نمودار تابع همانی قرار دارد؟

۱) $\frac{7}{3}$
 ۲) $-\frac{7}{3}$
 ۳) $\frac{3}{7}$
 ۴) $-\frac{3}{7}$

۱۸- اگر دامنه یک تابع همانی برابر $\{-3, a, 1, -5\}$ و برد آن برابر $\{2, 1, -3, b+a\}$ باشد، آن گاه مقدار $b+3a$ کدام است؟

۱) -۱
 ۲) ۱۳
 ۳) ۱
 ۴) -۱۳

۱۹- کدام یک از نمودارهای زیر بیان گر یک تابع است؟





۲۰- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 & , x < -1 \\ x^2 + 2x & , -1 \leq x \leq 2 \\ -4 & , x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارت $f(-2) + f(\sqrt{2}-1) + f(3,5)$ کدام است؟

۱ $4 - 2\sqrt{2}$
 ۲ -1
 ۳ 2
 ۴ -2

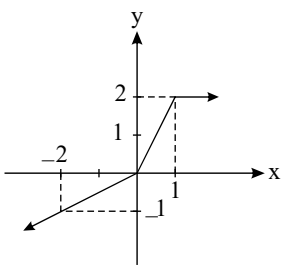
۲۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (a-2)x + 3 & , x \geq 1 \\ b & , x < 1 \end{cases}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱ 1
 ۲ 3
 ۳ 5
 ۴ 2

۲۲- در تابع ثابت $f(x) = c$ اگر $f(x) = c$ باشد، در این صورت مقادیر c کدام است؟

۱ فقط صفر
 ۲ فقط $\frac{1}{3}$
 ۳ فقط $-\frac{1}{3}$
 ۴ صفر یا $-\frac{1}{3}$

۲۳- ضابطهٔ مربوط به تابع نمودار زیر کدام است؟



۱ $f(x) = \begin{cases} 2 & , x \geq 1 \\ 2x & , x \leq 1 \end{cases}$
 ۲ $f(x) = \begin{cases} 2 & , x \geq 1 \\ \frac{x}{2} & , 0 \leq x < 1 \\ 2x & , x < 0 \end{cases}$

۳ $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & , x < 0 \end{cases}$
 ۴ $f(x) = \begin{cases} 2 & , x \geq 1 \\ 2x & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & , x \leq 0 \end{cases}$



۲۴- اگر تابع $f = \{(-2, 8), (4, k-3), (10, m+6)\}$ تابعی ثابت باشد و همچنین رابطه $\frac{f(10)}{2m-t} = 4k$ برقرار باشد، مقدار t کدام است؟

$\frac{11}{7}$ (۴)

$\frac{7}{11}$ (۳)

$\frac{42}{11}$ (۲)

$\frac{11}{42}$ (۱)

۲۵- اگر f تابع همانی و g تابع ثابت باشد و $f(2) \times g(2) = 4$ باشد، ریشه‌های معادله $(f(x))^2 - g(x)f(x) = 15$ کدام است؟

$-1, 15$ (۴)

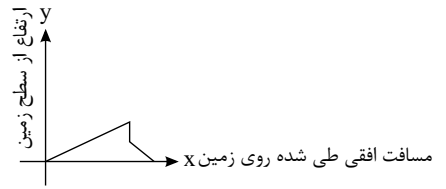
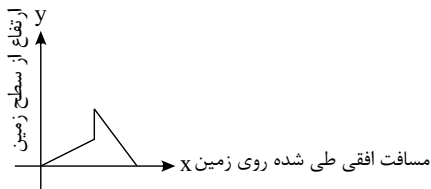
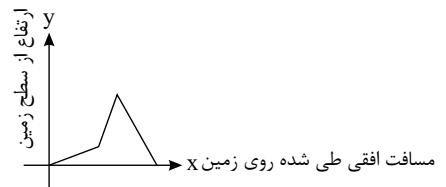
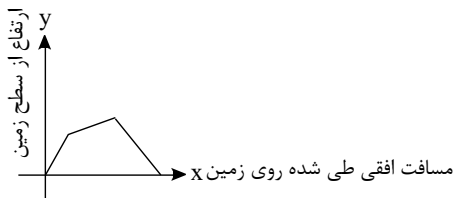
$1, -15$ (۳)

$-5, 3$ (۲)

$5, -3$ (۱)

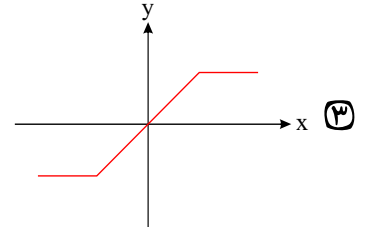
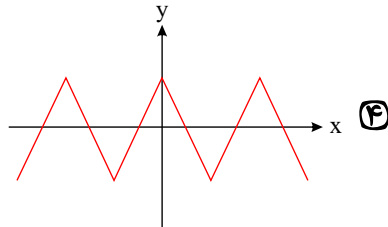
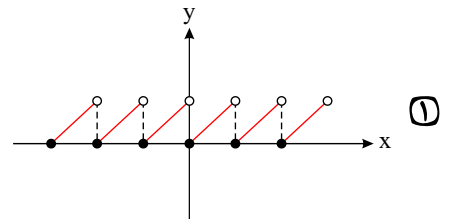
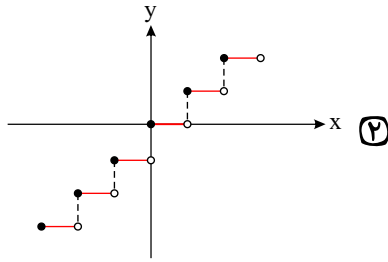
۲۶- کدام نمودار مربوط به داستان زیر است؟

علی با دوچرخه‌اش از پایین یک تپه به سمت بالای تپه حرکت کرد، پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر تپه که شیب ثابت داشت به پایین تپه سرازیر شد. (سرعت حرکت دوچرخه در طی مسیر ثابت می‌ماند).





۲۷- کدام نمودار زیر مربوط به یک تابع پلکانی است؟



۲۸- حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$A = 2 \operatorname{sign}(\sqrt{2} - 4) + 3 \operatorname{sign}(\pi - 1) = ?$$

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۲۹- اگر در تابع همانی f دامنه و برد به ترتیب برابر باشند با $D_f = \{2, -6, a\}$ و $R_f = \{b, 2, 9\}$ آن گاه نمودار تابع $g(x) = ab$ با دامنه \mathbb{Z} از کدام نواحی دستگاه مختصات عبور می کند؟

(۴) سوم و چهارم

(۳) دوم و سوم

(۲) اول و دوم

(۱) اول و چهارم

۳۰- ضابطه تابع $f(x) = (m - 2)x^3 + ax^2 + (b + 3)x + c$ مربوط به یک تابع همانی است. حاصل $\frac{f(a) + f(b)}{f(m) + f(c)}$ کدام است؟

(۴) -۴

(۳) صفر

(۲) -۱

(۱) ۱





پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$f(x) = 3, D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = -3, D_g = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$h(x) = 6, D_h = \{1, 2, 3\}$$

$$i(x) = x, D_i = \{1, 2, 3\}$$

واضح است که فقط تابع i ثابت نیست. (همانی است)
نکته: برد تابع ثابت فقط شامل یک عضو است.

۲ - گزینه ۲ برای این که جدول مورد نظر مربوط به تابع ثابت باشد، می‌بایست اعضای برد آن با یکدیگر برابر باشند، داریم:

$$\sqrt{a} = b^2 = 2b - 1 = c \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 2b - 1 \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b - 1)^2 = 0 \\ \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \\ \sqrt{a} = b^2 \xrightarrow{b=1} \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ c = b^2 \xrightarrow{b=1} c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 1 + 1 + 1 = 3$$

۳ - گزینه ۳ در مرحله اول مدت زمانی که طول می‌کشد استخر پر شود بیشتر از مدت زمانی است که طول می‌کشد استخر خالی شود؛ پس قدر مطلق شیب خط مرحله اول که پر شدن استخر را نشان می‌دهد می‌بایست کمتر از قدر مطلق شیب مرحله خالی شدن آن باشد و از طرفی مدت زمانی استخر به صورت پر باقی می‌ماند؛ پس نمودار گزینه ۳، صحیح است.

۴ - گزینه ۲

$$f(x) = x \Rightarrow f(-6) = -6$$

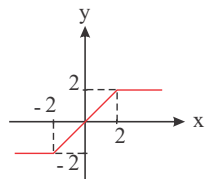
$$g(x) = 3 \Rightarrow g(1000) = 3$$

$$\sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow h(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$-4 < 0 \Rightarrow h(-4) = -(-4) - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$A = \frac{2(-6) + 3}{2 - 3} = \frac{-12 + 3}{-1} = \frac{-9}{-1} = 9$$

۵ - گزینه ۲ همان‌طور که از نمودار مشاهده می‌کنید، نمودار از سه پاره خط تشکیل شده است که ضابطه هر یک از آن‌ها را جداگانه با توجه به محدوده دامنه آن‌ها می‌یابیم.



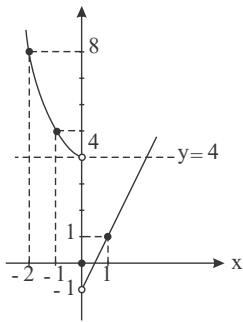
به ازای $x > 2$ تابع مقدار ثابت $y = 2$ را دارد.

به ازای $-2 \leq x \leq 2$ تابع همانی $y = x$ است.

به ازای $x < -2$ تابع مقدار ثابت $y = -2$ را دارد.

۶ - گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0, & \begin{array}{c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 1 \end{array} \\ 0, & x = 0, \\ x^2 + 4, & x < 0, & \begin{array}{c|c} x & 0 & -1 & -2 \\ \hline y & 4 & 5 & 8 \end{array} \end{cases}$$



خط $y = 4$ نمودار f را در ۱ نقطه قطع می‌کند.

۷ - گزینه ۴ اگر زوج مرتبی روی نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) قرار داشته باشد، در این صورت هر دو مؤلفه آن با یکدیگر برابر می‌شود. لذا داریم:

$$x^2 - 2x - 1 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 2x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow (2 \times 1 - 4, 1)^2 - 2 \times (1) - 1 = (-2, -2) \\ x = 3 \Rightarrow (2 \times 3 - 4, 3)^2 - 2 \times (3) - 1 = (2, 2) \end{cases}$$

پس به ازای $x = 1$ یا $x = 3$ این زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار دارد و با توجه به گزینه‌ها $x = 3$ جواب این مسأله است.

۸ - گزینه ۲ اگر نمودار f تابع همانی را به صورت زوج مرتب نمایش دهیم. در این صورت می‌بایست مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌ها با یکدیگر برابر باشند، در این صورت داریم:

$$f = \{(-1, a^2 - 5), (c, b^2), (b + 1, a - 3), (a + 2, 4)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = a^2 - 5 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 & (1) \\ c = b^2 & (2) \\ b + 1 = a - 3 \Rightarrow b = a - 4 & (3) \\ a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2 & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(4), (1)} a = 2$$

$$\xrightarrow{(3)} b = 2 - 4 = -2 \xrightarrow{(2)} c = (-2)^2 = 4$$

پس $a = 2$ و $b = -2$ و $c = 4$ به دست می‌آید. حال داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2)^2 + (-2)^2 + (4)^2 = 4 + 4 + 16 = 24$$

۹ - گزینه ۲ f ثابت است پس بُرد آن، تک عضوی است. کاملاً واضح است که بُرد f برابر $\{3\}$ است، پس حاصل $(m - 2n)$ و $(m + 2n)$ هم باید برابر ۳ باشند.

$$\begin{cases} m - 2n = 3 \\ m + 2n = 3 \end{cases}$$

$$2m = 6 \Rightarrow m = 3 \xrightarrow{\text{جاگذاری در یکی از معادلات}} n = 0$$

جاگذاری در یکی از معادلات

از طرفی g همانی است یعنی در هر زوج مرتب، عضو اول باید با عضو دوم برابر باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \times 1 = 2$$

$$b - 2 = 1 \Rightarrow b = 1 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow m - n + a - b = 3 - 0 + 2 - 1 = 2$$

۱۰ - گزینه ۳ نمودار مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که هر خط موازی عرض‌ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۱۱ - گزینه ۱ برای بدست آوردن دامنه تابع از روی نمودار، تصویر نقاط نمودار را روی محور طول‌ها می‌بایم که با توجه به گزینه‌ها، دامنه تابع در گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» مجموعه اعداد حقیقی است، ولی دامنه تابع در گزینه «۱» مجموعه اعداد حقیقی نیست.

۱۲ - گزینه ۳ دامنه تابع تنها شامل اعداد طبیعی است و برد تابع مقدار ثابت یک است. پس تنها نمودار گزینه «۳» مربوط به این تابع می‌باشد.

۱۳ - گزینه ۱ در تابع ثابت به ازای هر مقدار ورودی تابع، خروجی مقدار ثابتی (c) دارد، لذا داریم:

$$f(x^2 - 3x + 4) = (f(x))^2 - 3f(x) + 4$$

پس این تابع به ازای $x = c$ نیز مقدار c دارد، یعنی:

$$f(x) = c$$

در نتیجه:



$$c = (c)^2 - 3c + 4 \Rightarrow c^2 - 4c + 4 = 0 \Rightarrow (c - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2$$

پس تابع ثابت به صورت $f(x) = 2$ است، لذا $f(2) = 2$ است.

۱۴ - گزینه ۳ ضابطه‌ها، تابع ثابت هستند. پس در نمودار f خط مایل نخواهیم داشت. (پس گزینه ۱ و ۴ رد می‌شوند) فقط کافی است خط افقی $y = 2$ را در فاصله $x > 0$ ، خط افقی $y = -2$ را در فاصله $x < 0$ و نقطه $O(0, 0)$ را رسم کنیم. لذا نمودار گزینه ۳، درست است.

۱۵ - گزینه ۲ برای یافتن $f(-1)$ از ضابطه دوم داریم:

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 = 2 \times 1 = 2$$

برای یافتن $f(1)$ از ضابطه سوم داریم:

$$f(1) = 2 \times (1) + 1 = 3$$

$$\Rightarrow f(-1) + 2f(1) = 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$$

۱۶ - گزینه ۲ برای محاسبه $f(3)$ از ضابطه بالایی f و برای محاسبه $f(\sqrt{2})$ چون $\sqrt{2} \approx 1,4$ است، از ضابطه پائینی f استفاده می‌کنیم.

$$f(3) = 3 - 1 = 2$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

هم‌چنین برای محاسبه $g(13)$ از ضابطه بالایی g و برای محاسبه $g(0)$ از ضابطه پائینی g استفاده می‌کنیم:

$$g(13) = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$g(0) = \frac{1}{0^2 + 3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت مطلوب} = \frac{2 \times (2) - 5 \times (3)}{9 \times \left(\frac{1}{3}\right) + (-1)} = \frac{4 - 15}{3 - 1} = \frac{-11}{2} = -5,5$$

۱۷ - گزینه ۲ نکته: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی در هر زوج مرتب مؤلفه اول و دوم یکسان است. با توجه به نکته بالا داریم:

$$2k - 1 = 5k + 6$$

$$2k - 5k = 6 + 1$$

$$-3k = 7 \Rightarrow k = -\frac{7}{3}$$

۱۸ - گزینه ۱ نکته: تابع همانی هر عضو از دامنه را به روی خودش در برد تابع نسبت می‌دهد.

ابتدا مقدارهای مساوی از دامنه و برد تابع را کنار می‌گذاریم و سپس با مساوی هم قرار دادن مقادیر مجهول را به دست می‌آوریم:

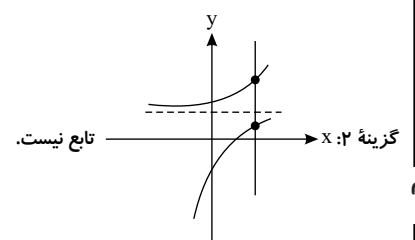
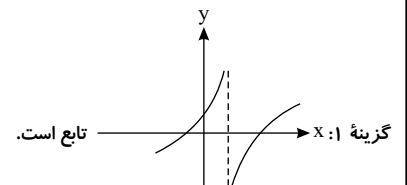
$$\{\cancel{2}, a, \cancel{1}, -5\} = \{2, \cancel{3}, \cancel{4}, b + a\}$$

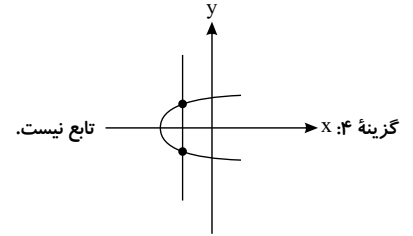
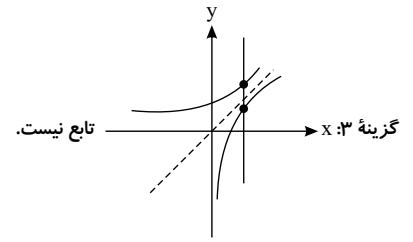
$$\Rightarrow a = 2, b + a = -5 \xrightarrow{a=2} b + 2 = -5 \rightarrow b = -7$$

در نتیجه $b = -7, a = 2$ داریم:

$$b + 3a \stackrel{a=2, b=-7}{=} -7 + 3 \times 2 = -7 + 6 = -1$$

۱۹ - گزینه ۱ نکته: نمودار اختصاصی یک رابطه زمانی یک تابع است که هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. بررسی گزینه‌ها:





۲۰ - گزینه ۲ با توجه به ضابطه تابع در هر قسمت مقادیر تابع را به دست می آوریم:

$$f(-2) \xrightarrow{-2 \in x < -1} \frac{x}{2} + 3 \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{2} + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$f(\sqrt{2}-1) \xrightarrow{\sqrt{2}-1 \in -1 \leq x \leq 2} x^2 + 2x \xrightarrow{x=\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 = 1$$

$$f(3,5) \xrightarrow{3,5 \in x > 2} -4 \Rightarrow f(3,5) = -4$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow f(-2) + f(\sqrt{2}-1) + f(3,5) = 2 + 1 - 4 = 3 - 4 = -1$$

۲۱ - گزینه ۴ نکته: ضابطه توابع ثابت به صورت $f(x) = c$ (c یک مقدار حقیقی است).

با توجه به تابع دو ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} (a-2)x+3 & , x \geq 1 \\ b & , x < 1 \end{cases}$ پس هر دو ضابطه باید مقداری ثابت و با هم برابر باشند در نتیجه داریم:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$(a-2)x+3 = b \xrightarrow{a=2} b = 3$$

$$\Rightarrow a + b \xrightarrow{a=2, b=3} 2 + 3 = 5$$

۲۲ - گزینه ۴ نکته: برد تابع ثابت فقط شامل یک عضو است یعنی به هر مقدار از دامنه مقدار ثابتی را نسبت می دهد.

$f(x) = c$ یک تابع ثابت است در نتیجه داریم:

$$f(3x^2 + 2x) = 3(f(x))^2 + 2f(x) \xrightarrow{f(x)=c} c = 3c^2 + 2c$$

$$\rightarrow 3c^2 + 2c - c = 0 \Rightarrow 3c^2 + c = 0 \Rightarrow c(3c + 1) = 0$$

$$\rightarrow c = 0 \text{ یا } 3c + 1 = 0 \Rightarrow 3c = -1 \rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

پس مقدار c برابر صفر یا $-\frac{1}{3}$ است.

۲۳ - گزینه ۳ نمودار تابع از سه قسمت متفاوت تشکیل شده است که تمام قسمت ها تابع های خطی می باشد و به ازای $x \geq 1$ نمودار تابع به صورت یک تابع ثابت است که ضابطه آن $f(x) = 2$ می باشد و به ازای $0 \leq x \leq 1$ نمودار تابع به صورت خطی است که از دو نقطه $(0, 0)$ و $(1, 2)$ عبور می کند پس ضابطه آن به صورت $y = 2x$ است و به ازای $x \leq 0$ نمودار تابع از دو نقطه $(0, 0)$ و $(-2, -1)$ می گذرد پس ضابطه آن به صورت $y = \frac{x}{2}$ است پس ضابطه تابع به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \geq 1 \\ 2x & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2} & , x \leq 0 \end{cases}$$

۲۴ - گزینه ۲ نکته: در نمایش زوج مرتبی توابع ثابت تمام مؤلفه های دوم با هم برابرند.

ابتدا با توجه به نکته بالا مقادیر m و k را مشخص می کنیم:

$$f = \{(-2, 8), (4, k-3), (1, 0, m+6)\}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} k - 3 = 8 \Rightarrow k = 11 \\ m + 6 = 8 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

حال با داشتن $f(x) = 8, k = 11, m = 2$ داریم:

$$\frac{f(10)}{2m - t} = 4k \xrightarrow{m=2} \frac{8}{2 \times 2 - t} = 4 \times 11$$

$$\Rightarrow \frac{8}{4 - t} = 44 \rightarrow 8 = 44(4 - t) \rightarrow 8 = 176 - 44t$$

$$\rightarrow 44t = 176 - 8 \Rightarrow 44t = 168 \rightarrow t = \frac{168}{44} = \frac{42}{11}$$

۲۵ - گزینه ۱ f یک تابع همانی $(f(x) = x)$ و g تابع ثابت است در نتیجه داریم:

$$f(2) \times g(2) = 4 \Rightarrow 2 \times g(2) = 4 \rightarrow g(2) = \frac{4}{2} = 2$$

در نتیجه برای هر عضو دامنه $g(x) = 2$ است.

$$(f(x))^2 - g(x)f(x) = 15 \Rightarrow x^2 - 2x = 15$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow x = -3 \text{ یا } x = 5$$

۲۶ - گزینه ۲ در ابتدا شیب تپه تند می‌باشد و پس از مدتی شیب آن کمتر می‌شود پس در قسمت اول نمودار دارای شیب تندتری نسبت به قسمت دوم آن می‌باشد و در هنگام پایین آمدن شیب تپه ثابت است. لذا نمودار مربوط به گزینه (۲) پاسخ صحیح است.

۲۷ - گزینه ۲ تابع چند ضابطه‌ای که هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را یک تابع پلکانی می‌نامیم، نمودار مختصاتی توابع پلکانی به صورت قطعه خط‌هایی موازی محور طول‌هاست.

$$\text{گزینه ۲ ضابطهٔ تابع علامت به صورت } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \text{ است.}$$

(مقدار $\text{sign} x$ به ازای x های مثبت برابر ۱، x های منفی -1 و $x = 0$ برابر ۰ است.)

$$\text{sign}(\sqrt{2} - 4) = \frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2} - 4} = -1$$

$$\text{sign}(\pi - 1) = \frac{\pi - 1}{\pi - 1} = 1$$

$$A = 2 \text{sign}(\sqrt{2} - 4) + 3 \text{sign}(\pi - 1) = 2 \times (-1) + 3 \times 1 = -2 + 3 = 1$$

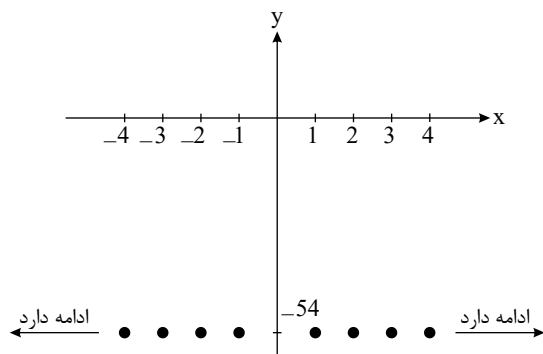
۲۹ - گزینه ۴ تابع f همانی است پس دامنه و برد آن برابر است در نتیجه:

$$R_f = D_f \Rightarrow \{b, 2, 9\} = \{2, -6, a\} \Rightarrow b = -6, a = 9$$

حال با قرار دادن مقادیر a و b داریم:

$$g(x) = ab = 9 \times (-6) = -54$$

تابع $g(x) = -54$ تابعی ثابت با دامنه \mathbb{Z} (اعداد صحیح) است.



با توجه به نمودار مختصاتی تابع g از ناحیه سوم و چهارم عبور می‌کند.

۳۰ - گزینه ۲ نکته: ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

با توجه به نکته بالا داریم:

$$f(x) = (m - 2)x^2 + ax^2 + (b + 3)x + c \Rightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \\ a = 0 \\ b + 3 = 1 \Rightarrow b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

حال با قرار دادن مقادیر a, b, c و m داریم:



$$\frac{f(a) + f(b)}{f(m) + f(c)} = \frac{f(0) + f(-2)}{f(2) + f(0)} = \frac{0 + (-2)}{2 + 0} = \frac{-2}{2} = -1$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۲	۱۱ - ۱	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۴	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۴	۲۷ - ۲
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۱	۱۸ - ۱	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۴
۵ - ۲	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۲	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲