



علی هاشمی

نام آزمون: شمارش بدون شمردن

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- با ارقام $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ چند عدد ۴ رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۱۴ (۱)

۶۰ (۲)

۴۸ (۳)

۷۲ (۴)

۲- مقدار n در معادله $\binom{21}{n} = \binom{21}{3n-3}$ کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۶ (۴)

۳- از میان ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی، به چند طریق می‌توان یک کمیتهٔ داوران ۵ نفره تشکیل داد به طوری که در این کمیته حداقل ۲ داور ایرانی حضور داشته باشد؟

۶۵ (۱)

۱۰۵ (۲)

۲۱۰ (۳)

۶۰ (۴)

۴- ۳ کتاب ریاضی مختلف و ۲ کتاب فیزیک مختلف را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌های ریاضی، برخلاف کتاب‌های فیزیک، در کنار هم باشند؟

۲۴ (۱)

۷۲ (۲)

۱۲ (۳)

۱۲۰ (۴)



۵- معلمی قصد دارد از یک کلاس، ۳ نفر را به تصادف برای حضور در مسابقات علمی انتخاب کند. اگر او این ۳ نفر را به ۵۶ روش بتواند انتخاب کند، تعداد دانش‌آموزان کلاس چند نفر بوده است؟

- ۱) ۱۰
- ۲) ۹
- ۳) ۱۱
- ۴) ۸

۶- پنج پسر به همراه پدرانشان به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوری که هر فرد بخواهد کنار پدرش باشد؟

- ۱) ۵!
- ۲) $۳۲ \times ۵!$
- ۳) ۱۰!
- ۴) $۳۲ \times ۱۰!$

۷- در یک لیگ فوتبال ۱۵ تیم حضور دارند. در پایان این لیگ، تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

- ۱) $\frac{۱۵!}{۱۲!}$
- ۲) $\frac{۱۵!}{۳!}$
- ۳) $\frac{۱۵!}{۱۳!}$
- ۴) $\frac{۱۵!}{۲!}$

۸- مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}\}$ چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد که شامل عضوهای a_1 و a_2 ، ولی فاقد عضوهای a_9 و a_{10} باشد؟

- ۱) ۲۰
- ۲) ۸
- ۳) ۵۶
- ۴) ۱۲۰



۹- آرش در یک آزمون با ۶ سوال ۴ گزینه‌ای و ۴ سوال ۳ گزینه‌ای شرکت می‌کند. اگر پاسخ به سوال‌های ۳ گزینه‌ای در این آزمون الزامی باشد، آرش به چند طریق می‌تواند پاسخنامه خود را پر کند؟

① $6^4 \times 4^3$

② $4^4 \times 5^6$

③ $4^6 \times 3^4$

④ $5^6 \times 3^4$

۱۰- چند عدد ۴ رقمی طبیعی زوج با ارقام غیر تکراری و کوچک‌تر از ۶ داریم؟

① ۱۰۸

② ۱۵۶

③ ۱۸۰

④ ۲۱۶

۱۱- اگر $1 = (2x - x^2)!$ ، آن‌گاه برای x چند مقدار وجود دارد؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۱۲- چند عدد سه‌رقمی داریم که رقم صدگان آن‌ها برابر مجموع ارقام یکان و دهگان آن باشد؟

① ۵۴

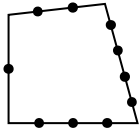
② ۵۵

③ ۴۴

④ ۴۵



۱۳- از میان ۱۰ نقطه زیر، به چند طریق می‌توان ۳ رأس یک مثلث را انتخاب کرد، به طوری که ضلع مثلث بر هیچ‌یک از ضلع‌های چهارضلعی زیر منطبق



نشود؟

- ۱) ۳۸
- ۲) ۴۲
- ۳) ۴۴
- ۴) ۵۰

۱۴- می‌خواهیم شورای ۳ نفره‌ای از بین ۶ نفر سال دهمی، ۵ نفر سال یازدهمی و ۴ نفر سال دوازدهمی تشکیل دهیم، به طوری که حداقل ۲ نفر از آن‌ها سال یازدهمی باشند. به چند روش این کار امکان‌پذیر است؟

- ۱) ۱۰۰
- ۲) ۱۱۰
- ۳) ۴۵
- ۴) ۴۴

۱۵- با حروف کلمه «compute»، چند کلمه ۷ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به طوری که حرف m بعد از o و حرف o بعد از c باشد؟

- ۱) $\frac{7!}{2}$
- ۲) $\frac{7!}{3}$
- ۳) $\frac{7!}{6}$
- ۴) $5!$

۱۶- از شهر A تا شهر B ، ۴ راه و از شهر B تا شهر C ، ۳ راه و از شهر C تا شهر D ، ۲ راه وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت و دوباره به شهر A برگشت به طوری که از هر مسیر حداکثر یک بار عبور کنیم و از تمام شهرها عبور کنیم؟

- ۱) ۹۶
- ۲) ۱۰۴
- ۳) ۱۴۴
- ۴) ۱۴۲



۱۷- مقدار n در معادله $n! = 12!(13! + 12!)$ کدام است؟

- ۱) ۱۱
- ۲) ۱۳
- ۳) ۱۴
- ۴) ۱۵

۱۸- در معادله زیر، مقدار n کدام است؟

$$P(n, 4) = 60 C(n - 2, 2)$$

- ۱) ۲
- ۲) ۶
- ۳) ۵
- ۴) ۸

۱۹- در یک گل‌فروشی، هشت نوع گل متفاوت وجود دارد و برای ایجاد هر دسته گل، به چهار نوع گل نیاز داریم. به چند حالت می‌توان دسته‌گلی تهیه کرد که دو نوع خاص از این گل‌ها در آن وجود نداشته باشد؟

- ۱) ۸
- ۲) ۱۰
- ۳) ۱۲
- ۴) ۱۵

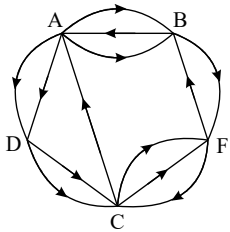
۲۰- با حروف کلمه *soran* چند کلمه سه حرفی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار حروف)

- ۱) ۳۰
- ۲) ۶۰
- ۳) ۱۲۰
- ۴) ۱۲۵



۲۱- با حروف {س, و, ل, د, ز, ی} چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع و به حرف نقطه دار ختم شود؟ (بدون تکرار حروف)

- ۱) ۲۴
- ۲) ۱۲
- ۳) ۳۶
- ۴) ۶



۲۲- با توجه به شکل زیر، به چند طریق می توان از A به C رفت و برگشت؟

- ۱) ۹
- ۲) ۱۸
- ۳) ۱۲
- ۴) ۱۶

۲۳- با حروف کلمه «مغناطیس»، چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که حروف «ط»، «ی» و «س» در آن کنار هم باشند؟

- ۱) ۱۲۰
- ۲) ۱۴۴۰
- ۳) ۳۶۰
- ۴) ۷۲۰

۲۴- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۵, ۸, ۹ بدون تکرار ارقام چند عدد شش رقمی فرد می توان نوشت؟

- ۱) ۱۴۴
- ۲) ۷۲
- ۳) ۲۸۸
- ۴) ۳۶۰

۲۵- در یک جمع ۶ نفره که ۲ نفر از آن ها زن هستند، به چند طریق می توان یک تیم ۳ نفره تشکیل داد به طوری که حداکثر یک زن در این تیم حضور داشته باشد؟

- ۱) ۱۲
- ۲) ۱۶
- ۳) ۲۰
- ۴) ۸



۲۶- چند عدد فرد سه رقمی کوچک تر از ۴۰۰ با ارقام ۲، ۳ و ۵ می توان ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

- ۱) ۱۲
- ۲) ۱۸
- ۳) ۲۰
- ۴) ۲۴

۲۷- دو سکه متفاوت و یک تاس را با هم می ریزیم. احتمال آنکه حداقل یکی از سکه ها رو بیاید، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{8}$
- ۲) $\frac{1}{4}$
- ۳) $\frac{3}{8}$
- ۴) $\frac{3}{4}$

۲۸- چند عدد زوج سه رقمی وجود دارد که یکان و صدگان آن برابرند؟

- ۱) ۳۰
- ۲) ۴۰
- ۳) ۴۵
- ۴) ۵۰

۲۹- یک رئیس، یک خزانه دار و یک منشی را که افراد مختلفی هستند از یک مجموعه ۰ نفری که علی در آن قرار دارد، انتخاب می کنیم، این عمل به چند طریق امکان پذیر است، اگر علی نتواند خزانه دار یا منشی باشد؟

- ۱) ۱۲۵
- ۲) ۲۱۶
- ۳) ۵۷۶
- ۴) ۶۷۲



۳-۴ کتاب مختلف شیمی و ۶ کتاب مختلف ریاضی را به چند طریق می توان در یک قفسه قرار داد، به شرط آن که بین هر دو کتاب شیمی دقیقاً دو کتاب ریاضی قرار بگیرد؟

- ① $6! \times 4!$
- ② $4! \times 3!$
- ③ $(4!)^2$
- ④ $(6!)^2$

۳۱- به چند طریق می توان ۶ حرف a, b, c, d, e و f را در کنار هم قرار داد به طوری که e قبل از a, b و c قرار گیرد؟

- ① ۲۴۰
- ② ۶۰
- ③ ۱۲۰
- ④ ۱۸۰

۳۲- در معادله $\binom{102}{x^2 - 30} = \binom{102}{x}$ ، به ازای چند مقدار x ، می تواند برقرار باشد؟

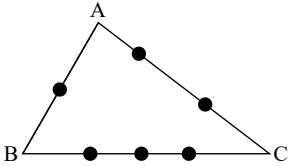
- ① ۴
- ② ۳
- ③ ۲
- ④ ۱

۳۳- حاصل $\binom{8}{5} + \binom{9}{5} + \binom{8}{6} + \binom{10}{5}$ کدام است؟

- ① $\binom{10}{5}$
- ② $\binom{11}{5}$
- ③ $\binom{10}{6}$
- ④ $\binom{11}{7}$



۳۴- چند چهارضلعی محدب می توان ساخت که رئوس آن از نقاط مشخص شده، روی مثلث ABC باشند؟



- ۱) ۱۲
- ۲) ۲۴
- ۳) ۱۵
- ۴) ۶

۳۵- به چند طریق می توان ۳ کتاب مختلف ریاضی و ۴ کتاب مختلف فیزیک را در یک قفسه چید به طوری که کتاب های ریاضی کنار هم و کتاب های فیزیک نیز کنار هم باشند؟

- ۱) $7!$
- ۲) $3! \times 4!$
- ۳) $3! \times 4! \times 2!$
- ۴) $4! \times 2!$

۳۶- خانواده ای ۳ فرزند دختر و ۴ فرزند پسر دارد. در نزدیکی خانه آن ها، ۴ مجتمع آموزشی دخترانه و ۵ مجتمع آموزشی پسرانه وجود دارد. او به چند طریق می تواند فرزندان خود را در مجتمع آموزشی ثبت نام کند به طوری که هیچ دو دخترش را در یک مجتمع آموزشی یکسان ثبت نام نکرده باشد؟

- ۱) $5^4 \times 4^3$
- ۲) $4^5 \times 3^4$
- ۳) $5^3 \times 3!$
- ۴) $5^3 \times 5!$

۳۷- با حروف کلمه $SISTERS$ چند کلمه ۷ حرفی بدون توجه به معنا می توان نوشت به طوری که هیچ دو حرف S ای کنار هم نباشند؟

- ۱) ۲۴۰
- ۲) ۴۸۰
- ۳) ۷۲۰
- ۴) ۳۰۰



۳۸- با ارقام ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۰ چند عدد زوج ۴ رقمی بزرگ تر از ۵۰۰۰ با ارقام متمایز می توان نوشت؟

- ۱) ۳۲
- ۲) ۴۸
- ۳) ۱۲۰
- ۴) ۷۸

۳۹- برای شرکت در یک میهمانی ۵ نفره قرار است از بین ۸ نفر دعوت به عمل آید. اگر ۲ نفر از این ۸ نفر باهم قهر باشند و امکان دعوت هم زمان آن ها در میهمانی نباشد دعوت مهمان ها به چند طریق امکان پذیر است؟

- ۱) ۳۰
- ۲) ۳۶
- ۳) ۵۰
- ۴) ۵۶

۴۰- تعداد جایگشت های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمه *DENTIST*، کدام است؟

- ۱) ۶۰
- ۲) ۸۴۰
- ۳) ۱۲۰
- ۴) ۱۳۵

۴۱- پنج حرف از حروف کلمه *ASTRONOMY* را با جایگشت های متمایز در کنار هم قرار می دهیم. تعداد کلمه هایی که هر دو *O* در آن ها موجود باشد، کدام است؟

- ۱) ۲۱۰۰
- ۲) ۶۰
- ۳) ۲۱۰
- ۴) ۵۴۰



۴۲- با ارقام $\{0, 1, 3, 8\}$ چند عدد چهار رقمی فرد بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

- ۱) ۱۲
- ۲) ۲۴
- ۳) ۱۰
- ۴) ۸

۴۳- در یک کیسه ۳ مهره ی آبی، ۴ مهره ی قرمز و ۳ مهره ی سیاه قرار دارد. به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد به طوری که حداقل دو مهره سیاه باشد؟

- ۱) ۲۰
- ۲) ۲۱
- ۳) ۲۲
- ۴) ۲۴

۴۴- از تساوی $P(n, n - 2) = 12$ مقدار n کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

۴۵- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که بزرگ تر از ۳۰۰ باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

- ۱) ۶۰
- ۲) ۷۵
- ۳) ۳۶
- ۴) ۱۰۸



۴۶- پنج حرف از هشت حرف کلمه‌ی *BUSINESS* را با جایگشت‌های متمایز در کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد گروه‌هایی که هر سه *S* در آنها موجود باشند، کدام است؟

- ۱) ۱۵۰
- ۲) ۱۶۰
- ۳) ۲۰۰
- ۴) ۲۴۰

۴۷- به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

- ۱) ۵۴
- ۲) ۶۰
- ۳) ۷۲
- ۴) ۹۰



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

می‌دانیم اگر کاری را به دو روش بتوان انجام داد به طوری که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم، کل کار موردنظر به $m + n$ روش قابل انجام است. اگر کاری دارای ۲ مرحله باشد که در مرحله اول m روش و در مرحله دوم n روش داشته باشیم، کار موردنظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.

برای مضرب ۵ بودن یکان باید صفر یا ۵ باشد.
حالت اول: یکان صفر

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = 36$$

حالت دوم: یکان ۵

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = 24$$

بنابر اصل جمع کل کار موردنظر به $36 + 24 = 60$ حالت قابل انجام است.

۲ - گزینه ۴

می‌دانیم:
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{21}{n} = \binom{21}{3n-3} \Rightarrow n = 21 - (3n - 3) \Rightarrow n = 21 - 3n + 3 \Rightarrow 4n = 24 \Rightarrow n = 6$$

۳ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

حداقل ۲ یعنی ۲ یا ۳ یا ۴:

$$\begin{aligned} & \binom{4}{2} \times \binom{5}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{5}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{5}{1} \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & 2 \text{ ایرانی} \quad 3 \text{ باقی} \quad 3 \text{ ایرانی} \quad 2 \text{ باقی} \quad 4 \text{ ایرانی} \quad 1 \text{ باقی} \\ & = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + \frac{4 \times 3 \times 2}{6} + \frac{5 \times 4}{6} + 1 \times 5 = 12 \times 5 + 4 \times 10 + 5 = \\ & = 60 + 40 + 5 = 105 \end{aligned}$$

۴ - گزینه ۳

می‌دانیم تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $n!$



برای اینکه کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند آن‌ها را یک کتاب در نظر گرفته و کتاب‌های فیزیک را در طرفین آن قرار می‌دهیم تا کنار هم نباشند. یعنی:

فیزیک، ریاضی ۱، ریاضی ۲، ریاضی ۳، ریاضی ۴، فیزیک

جابه‌جایی کتاب‌های ریاضی با هم ۳! و فیزیک‌ها با هم ۲! حالت دارند که در کل $۱۲ = ۲ \times ۳!$ حالت داریم.

۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: انتخاب r شیء از n شیء متمایز (که ترتیب انتخاب اهمیت ندارد) را ترکیب r از n می‌نامیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

اگر تعداد دانش‌آموزان را n فرض کنیم داریم:

$$\binom{n}{3} = ۵۶ \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = ۵۶ \Rightarrow n(n-1)(n-2) = ۸ \times ۷ \times ۶ \Rightarrow n = ۸$$

۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$

هر پسر و پدرش را یک نفر در نظر می‌گیریم. بنابراین ۵ پسر و پدرانشان به ۵! حالت در کنار هم قرار می‌گیرند که هر پسر و پدر به ۲ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. بنابراین داریم:

$$۵! \times ۲^۵ = ۳۲ \times ۵!$$

۷ - گزینه ۱

می‌دانیم: انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن‌ها ترتیب انتخاب اهمیت دارد را ترکیب r از n می‌نامیم و داریم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(۱۵, ۳) = \frac{۱۵!}{۱۲!}$$

۸ - گزینه ۱ زیرمجموعه فاقد عضوهای $a_۴$ و $a_۵$ است. پس ۲ عضو از A حذف می‌شوند.

همچنین شامل $a_۱$ و $a_۲$ است که این ۲ عضو از A و زیرمجموعه انتخابی نیز حذف می‌شوند.

۳ عضو از ۵ عضو زیرمجموعه باقی می‌ماند که باید از اعضای $a_۳, a_۴, \dots, a_۸$ انتخاب شوند که تعداد حالات انتخابشان $\binom{۶}{۳}$ است و داریم:

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶} = ۲۰$$

۹ - گزینه ۴

می‌دانیم: اگر کاری را به دو روش بتوان انجام داد بطوریکه در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت باشیم، کل کار موردنظر به $m+n$ روش قابل انجام است.

اگر کاری دارای ۲ مرحله باشد که در مرحله اول m روش و در مرحله دوم n روش داشته باشیم، کار موردنظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.

۶ سوال ۴ گزینه‌ای: هر سوال ۵ حالت (یکی از گزینه‌ها یا بی‌جواب ماندن سوال): $۵^۶$

۴ سوال ۳ گزینه‌ای: هر سوال ۳ حالت (یکی از ۳ گزینه): $۳^۴$

بنابر اصل ضرب جواب کل مسأله برابر است با: $۵^۶ \times ۳^۴$

۱۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: اگر کاری را به دو روش بتوان انجام داد بطوریکه در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم،

کل کار مورد نظر به $m+n$ روش قابل انجام است.

اگر کاری دارای ۲ مرحله باشد که در مرحله اول m روش و در مرحله دوم n روش داشته باشیم،

کار مورد نظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.

از آنجائیکه صفر در بین ارقام است. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

ارقام: $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

$$\frac{۴}{۲} \times \frac{۴}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۲} = ۹۶$$

$$\frac{۵}{۰} \times \frac{۴}{۰} \times \frac{۳}{۰} \times \frac{۱}{۰} = ۶۰$$

(۱) یکان غیرصفر:

(۲) یکان صفر:



بنابر اصل جمع، $۱۵۶ = ۶۰ + ۹۶$ عدد ۴ رقمی زوج با ارقام غیر تکراری و کوچکتر از ۶ داریم.

۱۱ - گزینه ۳

می‌دانیم: قرارداد $۰! = 1$

$$(2x - x^2)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین ۳ مقدار برای x وجود دارد.

۱۲ - گزینه ۱

می‌دانیم: اگر کاری به دو روش قابل انجام باشد که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم، کل کار مورد نظر به $m + n$ روش قابل انجام است.

رقم صدگان یک رقمی است. بنابراین مجموع ارقام یکان و دهگان باید یک رقمی باشد. بنابراین:

تعداد حالت‌های ممکن	رقم دهگان	رقم یکان
۹	۱, ۲, ..., ۹	۰
۹	۰, ۱, ..., ۸	۱
۸	۰, ۱, ..., ۷	۲
۷	۰, ۱, ..., ۶	۳
۶	۰, ۱, ..., ۵	۴
۵	۰, ۱, ۲, ..., ۴	۵
۴	۰, ۱, ..., ۳	۶
۳	۰, ۱, ۲	۷
۲	۰, ۱	۸
۱	۰	۹

بنابراین جمع تعداد حالت‌های انجام کار مورد نظر برابر است با:

$$۹ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۵۴$$

۱۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء (که ترتیب انتخاب مهم نباشد) یک ترکیب r تایی از n شیء متمایز نامیده می‌شود که:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم، کل کار مورد نظر به $m + n$ حالت انجام پذیر است.
اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به طوری که در مرحله اول m حالت و در مرحله دوم n حالت داشته باشیم، کل کار مورد نظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.

۳ نقطه باید انتخاب شوند به طوری که از هر ۴ ضلعی بیش از یک نقطه انتخاب نشود.

$$\binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} + \binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{1} + \binom{1}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1} + \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1}$$

$$= 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 4 + 1 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 = 6 + 8 + 12 + 24 = 50$$



می‌دانیم: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم، کل کار مورد نظر به $m + n$ حالت انجام پذیر است.
 اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به طوری که در مرحله اول m حالت و در مرحله دوم n حالت داشته باشیم، کل کار مورد نظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.
 تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء که ترتیب انتخاب مهم نباشد یک ترکیب r تایی از n شیء متمایز نامیده می‌شود که:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

حداقل ۲ یعنی ۲ یا ۳

یا

$$\binom{5}{2} \binom{10}{1} + \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4}{2} \times 10 + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 100 + 10 = 110$$

۱ نفر الباقی ۲ نفر یازدهم ۳ نفر یازدهم

می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$

قرار است m بعد از o و o بعد از c بیاید. اگر گفته می‌شد بلافاصله بعد از هم بیایند c, o, m را یک بسته می‌کردیم و جایگشت حساب می‌کردیم. ولی فقط گفته شده است، بعد از هم بیایند، در این حالت ابتدا کل جایگشت‌ها را حساب می‌کنیم یعنی $7!$. حال حروف مورد نظر ما m و o و c هستند که $3!$ جایگشت دارند، یعنی 6 حالت. پس از این $7!$ جایگشت، به هر حالت از 6 حالت حروف c, o, m تعداد $\frac{7!}{6}$ حالت تعلق می‌گیرد. در بین این 6 حالت، یکی مطلوب است و آن هم زمانی که m بعد o و o بعد c قرار بگیرد، پس تعداد کل حالات مطلوب برابر است با:

$$\frac{7!}{6} \times 1 = \frac{7!}{6}$$

می‌دانیم: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم، کل کار مورد نظر به $m + n$ حالت انجام پذیر است.
 اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به طوری که در مرحله اول m حالت و در مرحله دوم n حالت داشته باشیم، کل کار مورد نظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.

برای رفتن از A به B ، 4 حالت و از B به C ، 3 حالت و از C به D ، 2 حالت داریم که طبق اصل ضرب $24 = 4 \times 3 \times 2$ حالت برای رفتن داریم.
 در مسیر برگشت از هر یک از مسیرهای رفت که آمده باشیم نمی‌توانیم برگردیم بنابراین برای برگشت از D به C ، 1 حالت و از C به B ، 2 حالت و از B به A ، 3 حالت داریم که بنابر اصل ضرب برای برگشت $6 = 3 \times 2 \times 1$ حالت داریم.
 که در مجموع برای رفت و برگشت طبق اصل ضرب $144 = 24 \times 6$ حالت داریم.

۱۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $n! = n(n-1)!$

$$13(13! + 12!) = 13(13 \times 12! + 12!) = 13 \times 12!(13 + 1) = 12! \times 13 \times 14 = 14! \Rightarrow n = 14$$

۱۸ - گزینه ۲ می‌دانیم: $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 60 \times \frac{(n-2)!}{(n-4)! \times 2!} \Rightarrow n! = 30(n-2)!$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)! = 30(n-2)! \Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -5 \text{ غقق} \end{cases}$$



تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز
از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می آید.

۱۹ - گزینه ۴ می دانیم:

آن دو نوع گل خاص را از ۸ نوع گل حذف می کنیم. حال باید ۴ نوع گل را از ۶ نوع باقی مانده انتخاب کنیم:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

۲۰ - گزینه ۲

با ۵ حرف مذکور، به این ترتیب می توان کلمات ۳ حرفی با حروف متمایز ساخت:

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز
از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می آید.

۲۱ - گزینه ۲ می دانیم:

کلمه مذکور باید با «ی» آغاز شود و به «ز» ختم شود:

$$\frac{\quad}{\text{ز}} \times \frac{\quad}{\quad} \times \frac{\quad}{\quad} \times \frac{\quad}{\text{ی}}$$

برای دو جایگاه میانی باید از ۴ حرف باقی مانده ۲ تا ۲ را انتخاب کنیم و به ۲! حالت بچینیم، پس:

$$\text{تعداد کلمات} = \binom{4}{2} \times 2! = \frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! = 12$$

دقت کنید که حرف «ی» اگر در ابتدا و وسط کلمه ظاهر شود، نقطه دار است.

۲۲ - گزینه ۲ مسیر حرکت از A به C به یکی از دو صورت زیر است:

$$A \rightarrow C : \begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \Rightarrow 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ A \rightarrow D \rightarrow C \Rightarrow 2 \times 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2 + 4 = 6$$

و مسیرهای برگشت هم عبارت اند از:

$$C \rightarrow A : \begin{cases} C \rightarrow A : 1 \\ C \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow A : 2 \times 1 \times 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow 1 + 2 = 3$$

و تعداد کل حالات طبق اصل ضرب برابر با $3 \times 6 = 18$ است.

۲۳ - گزینه ۴ حروف «ط» و «ی» و «س» را به هم وصل می کنیم:

س، ی، ط، ا، ن، غ، م

این ۵ شیء به ۵! حالت در کنار هم ظاهر می شوند. از طرفی «ط» و «ی» و «س» هم به اندازه ۳! حالت، جایگشت دارند، پس:

$$5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

۲۴ - گزینه ۳ عدد ۶ رقمی مطلوب، به صورت زیر است:

$$\frac{4}{\text{همه به جز صفر و یکان}} \times \underbrace{\frac{4}{\text{بقیه}} \times \frac{3}{\text{بقیه}} \times \frac{2}{\text{بقیه}} \times \frac{1}{\text{بقیه}}}_{\text{بقیه}} \times \frac{3}{\text{۱ یا ۵ یا ۹}} = 288$$

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز
از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می آید.

۲۵ - گزینه ۲ می دانیم:

$$n(S) = n(\text{هیچ زن}) + n(\text{حداکثر یک زن})$$

$$= \binom{4}{3} + \binom{2}{1} \times \binom{4}{2} = 4 + 2 \times 6 = 4 + 12 = 16$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 ۳ مرد ۱ زن ۲ مرد

۲۶ - گزینه ۱ عدد مطلوب به صورت زیر است:

$$\frac{2}{\text{۳ یا ۲}} \times \frac{3}{\text{۵ یا ۳}} \times \frac{2}{\text{۵ یا ۳}} = 12$$

۲۷ - گزینه ۴

$$n(S) = \overbrace{2 \times 2}^{\text{دو سکه}} \times \overbrace{6}^{\text{تاس}} = 24$$

$$n(\text{حداقل یک سکه رو بیاید}) = n(S) - n(\text{هیچ سکه ای رو نیاید}) = 24 - \overset{\text{تاس}}{\uparrow} 1 \times \overset{\text{پشت}}{\uparrow} 1 \times \overset{\text{پشت}}{\uparrow} 6 = 18$$

$$\Rightarrow P(\text{حداقل ۱ سکه رو بیاید}) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

۲۸ - گزینه ۲ عدد مطلوب به صورت زیر است:



$$\frac{1}{\text{مثال یکان}} \times \frac{10}{\text{همه}} \times \frac{4}{\text{همه زوج‌ها به جز صفر}} = 40$$

۲۹ - گزینه ۳ می‌دانیم: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

کل حالات

$$\begin{aligned} & \begin{array}{l} \text{جایگشت 3 نفر} \\ \uparrow \\ 9 \\ \text{علی انتخاب نشود} \end{array} \times 3! = \frac{9!}{3! \times 6!} \times 3! = 9 \times 8 \times 7 = 504 \\ & \begin{array}{l} \text{جایگشت 2 نفر} \\ \downarrow \\ 2 \\ \text{علی انتخاب شود} \end{array} \times 2! = \frac{9!}{2! \times 7!} \times 2! = 9 \times 8 = 72 \end{aligned}$$

3 نفر از 9 نفر باقی مانده
2 نفر از 9 نفر

$$\Rightarrow \text{مجموع حالات} = 504 + 72 = 576$$

دقت کنید که اگر علی انتخاب شود، حتماً باید رئیس باشد، ولی دو نفر دیگر می‌توانند در سمت‌های دیگر جابه‌جا شوند.

۳۰ - گزینه ۱ کتاب‌ها به صورت زیر در قفسه قرار گیرند:

شیمی، ریاضی، ریاضی، شیمی، ریاضی، ریاضی، شیمی، ریاضی، ریاضی، شیمی

$$\text{تعداد حالات} = 6! \times 4!$$

↓ ↓
ریاضی شیمی

۳۱ - گزینه ۴

$$\text{تعداد حالات} = \binom{6}{4} \times 3! \times 2! = 15 \times 6 \times 2 = 180$$

↓ ↓ ↓
انتخاب ۴ جایگاه برای
قرار گرفتن e, c, b, a
در سه جایگاه باقی‌مانده
 c, b, a و
جایگشت دو
 e در جایگاه اول

۳۲ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$$\binom{102}{x^2 - 30} = \binom{102}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 30 = x \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{قق } x = 6 \\ \text{غقق } x = -5 \end{cases} \\ x^2 - 30 = 102 - x \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \Rightarrow (x-11)(x+12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{قق } x = 11 \\ \text{غقق } x = -12 \end{cases} \end{cases}$$

۳۳ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$
 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$$\binom{8}{5} + \binom{9}{5} + \binom{8}{6} + \binom{10}{5} = \binom{9}{6} + \binom{9}{5} + \binom{10}{5} = \binom{10}{6} + \binom{10}{5} = \binom{11}{6} = \binom{11}{5}$$

۳۴ - گزینه ۱ می‌دانیم: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.



حالات ممکن

- AC : یک رأس روی AB ، دو رأس روی AC و یک رأس روی BC : $\binom{1}{1} \times \binom{2}{2} \times \binom{3}{1} = 1 \times 1 \times 3 = 3$
- AC : یک رأس روی AB ، یک رأس روی AC و دو رأس روی BC : $\binom{1}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{2} = 1 \times 2 \times 3 = 6$
- BC : دو رأس روی AC و دو رأس روی BC : $\binom{2}{2} \times \binom{3}{2} = 1 \times 3 = 3$

مجموع = 3 + 6 + 3 = 12

۳۵ - گزینه ۳ کتاب‌ها باید به صورت زیر قرار گیرند:

۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک

تعداد حالات = $3! \times 4! \times 2!$

↓ ↓ ↓
 جایگشت کتاب‌های ریاضی جایگشت کتاب‌های فیزیک جابه‌جایی گروه ریاضی یا فیزیک

۳۶ - گزینه ۴

تعداد حالات = $5^4 \times 4 \times 3 \times 2 = 5^3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5^3 \times 5!$

↓ ↓ ↓ ↓
 هر پسر ۵ انتخاب دارد. اولین دختر دومین دختر سومین دختر

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

۳۷ - گزینه ۱ می‌دانیم:

اگر حروف R, E, T, I را بچینیم، S ‌ها باید در مکان‌های قرار گیرند:



انتخاب ۳ مکان برای قرار گرفتن S ‌ها

تعداد حالات = $4! \times \binom{5}{3} = 24 \times 10 = 240$

↑
جایگشت I, T, E, R

دقت کنید که چون S ‌ها مشابهند، برای آن‌ها جایگشت نمی‌نویسیم.

۳۸ - گزینه ۲ برای نوشتن اعداد بزرگ‌تر از ۵۰۰۰، رقم یکان هزار باید ۵ یا ۷ یا ۸ باشد. برای زوج بودن اعداد داریم:

حالات ممکن

- $\frac{3}{8 \text{ یا } 7 \text{ یا } 5} \times \underbrace{\frac{3}{3} \times \frac{2}{2}}_{\text{بقیه}} \times \frac{1}{\text{صفر}} = 18$
- $\frac{2}{7 \text{ یا } 5} \times \underbrace{\frac{3}{3} \times \frac{2}{2}}_{\text{بقیه}} \times \frac{1}{8} = 12$
- $\frac{3}{8 \text{ یا } 7 \text{ یا } 5} \times \underbrace{\frac{3}{3} \times \frac{2}{2}}_{\text{بقیه}} \times \frac{1}{4} = 18$

مجموع = 18 + 12 + 18 = 48

طبق اصل جمع داریم:

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

۳۹ - گزینه ۲ می‌دانیم:



حالات ممکن

- هیچ یک از دو نفر دعوت نشوند : $\binom{8-2}{5} = \binom{6}{5} = 6$
- فقط نفر اول دعوت شود : $\binom{8-2}{5-1} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$
- فقط نفر دوم دعوت شود : $\binom{8-2}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$

\Rightarrow مجموع حالات = $6 + 15 + 15 = 36$

۴۰ - گزینه ۴ دو حالت برای جایگشت‌ها در نظر می‌گیریم. اگر در جایگشت دو حرف تکراری T وجود داشته باشند که در این حالت حرف سوم جایگشت، در جایگاه اول یا دوم یا سوم قرار دارد، بنابراین ۵ حرف دیگر با دو حرف T ، $5 \times 3 = 15$ جایگشت دارند. در حالتی که سه حرف جایگشت، غیر تکراری باشند، تعداد جایگشت‌ها برابر است با: $6 \times 5 \times 4 = 120$ بنابراین تعداد کل جایگشت‌های سه حرفی برابر است با: $15 + 120 = 135$

۴۱ - گزینه ۱ اگر دو حرف O انتخاب شود، باید سه حرف از هفت حرف باقی‌مانده به $\binom{7}{3} = 35$ طریق انتخاب کرد. دو حرف O و سه حرف دیگر به $\frac{5!}{2!}$ طریق جایگشت دارند. بنابراین تعداد کلمه‌هایی که ۲ حرف O در آن‌ها باشد، $35 \times 60 = 2100$ است.

۴۲ - گزینه ۴ در خانه یکان یا رقم ۳ یا ۱ می‌تواند قرار گیرد. پس دو حالت داریم، در خانه هزارگان رقم صفر نمی‌تواند قرار گیرد و یک رقم هم برای خانه یکان انتخاب کرده‌ایم پس دو حالت خواهیم داشت، بنابراین داریم:

یکان دهگان صدگان هزارگان

$$\boxed{2} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{2} = 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 8$$

۴۳ - گزینه ۳

از ترکیب استفاده می‌کنیم:

دو مهره سیاه باشد : $\binom{3}{2} \times \binom{7}{1} = 3 \times 7 = 21$

سه مهره سیاه باشد : $\binom{3}{3} \times \binom{7}{0} = 1 \times 1 = 1$

$\Rightarrow 21 + 1 = 22$

۴۴ - گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$P(n, n-2) = 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-(n-2))!} = 12$$

$$\frac{n!}{2!} = 12 \Rightarrow n! = 12 \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = (4 \times 3) \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = 4! \Rightarrow n = 4$$

۴۵ - گزینه ۲ رقم صدگان باید یکی از سه رقم ۳، ۵ و ۶ باشد. رقم دهگان و یکان هر یک از پنج رقم داده شده می‌تواند باشد.

$$\underline{3} \times \underline{5} \times \underline{5} = 75$$

۴۶ - گزینه ۳ تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف $BUSINESS$ را می‌خواهیم که شامل ۳ حرف S باشند، پس ابتدا باید دو حرف دیگر از حروف E, N, I, U, B را انتخاب کرده و سپس این دو حرف را با سه حرف S جایگشت دهیم، بنابراین تعداد جایگشت‌های متمایز مطلوب برابر است با:

$$\binom{5}{2} \times \frac{5!}{3!} = 10 \times 20 = 200$$

جایگشت ۵ حرف حاصل

↓

جایگشت ۳ حرف S تکراری

انتخاب دو حرف غیر از S

۴۷ - گزینه ۴ برای آن که به بچه‌ها تعداد مساوی اسباب‌بازی برسد باید به هر بچه ۲ عدد اسباب‌بازی بدهیم. برای بچه‌ی اول کفایت ۲ اسباب‌بازی از ۶ اسباب‌بازی انتخاب کنیم $C(6, 2)$ و بدهیم.

برای بچه‌ی دوم ۲ اسباب‌بازی از ۴ اسباب‌بازی باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم $C(4, 2)$ و در نهایت ۲ اسباب‌بازی باقی‌مانده را برای بچه‌ی سوم انتخاب می‌کنیم .

$$C(6, 2) = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 15$$

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = 6$$

$$C(2, 2) = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

$$C(6, 2) \times C(4, 2) \times C(2, 2) = 15 \times 6 \times 1 = 90$$

بنا بر اصل ضرب داریم:

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۸ - ۱	۱۵ - ۳	۲۲ - ۲	۲۹ - ۳	۳۶ - ۴	۴۳ - ۳
۲ - ۴	۹ - ۴	۱۶ - ۳	۲۳ - ۴	۳۰ - ۱	۳۷ - ۱	۴۴ - ۲
۳ - ۲	۱۰ - ۲	۱۷ - ۳	۲۴ - ۳	۳۱ - ۴	۳۸ - ۲	۴۵ - ۲
۴ - ۳	۱۱ - ۳	۱۸ - ۲	۲۵ - ۲	۳۲ - ۳	۳۹ - ۲	۴۶ - ۳
۵ - ۴	۱۲ - ۱	۱۹ - ۴	۲۶ - ۱	۳۳ - ۲	۴۰ - ۴	۴۷ - ۴
۶ - ۲	۱۳ - ۴	۲۰ - ۲	۲۷ - ۴	۳۴ - ۱	۴۱ - ۱	
۷ - ۱	۱۴ - ۲	۲۱ - ۲	۲۸ - ۲	۳۵ - ۳	۴۲ - ۴	