نام آزمون: شمارش بدون شمردن

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است. این مجموعه چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۶۰

(۳) ۳۶

(۴) ۸۴

۲ - چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت به طوری که ارقام آن یک در میان زوج و یا فرد باشند؟ (تکرار مجاز است.)

(۱) ۷۲۰

(۲) ۸۷۰

(۳) ۱۱۲۵

(۴) ۱۴۵۹

۳ - چند عدد ۴ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که رقم صفر در آن به کار نرفته باشد، اما رقم ۷ در آن به کار رفته است؟

(۱) ۳۳۶

(۲) ۴۴۸

(۳) ۶۷۲

(۴) ۱۳۴۴

۴ - اگر $P(n,2) = 5n + 7$، حاصل $P(n-1,3)$ کدام است؟

(۱) ۶۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۲۱۰

(۴) ۳۳۶

۵ - چند عدد ۴ رقمی زوج کوچک‌تر از ۴۰۰۰ با ارقام متمایز وجود دارد؟

(۱) ۵۶۰
(۲) ۶۷۲
(۳) ۷۸۴
(۴) ۸۴۰

۶ - اگر $(۲x^۲ - x)! = ۱$، در این صورت چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۷ - با ارقام $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ و کوچک‌تر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۰۰
(۲) ۸۶
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۴۰

۸ - چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) $\frac{n!}{(n-۲)!} = n^۲ - n$
ب) $۴ \times ۵! = ۲۰!$
پ) $۴! + ۴! = ۸!$
ت) $۲! \times ۳! = ۶!$
ث) $۰! = ۰$

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

شمارش بدون شمردن

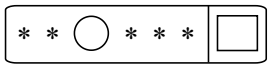
۹ - تعداد جایگشت‌های کلمه‌ی $SYSTEM$ که در آن‌ها بین دو حرف S دقیقاً یک حرف دیگر وجود داشته باشد، کدام است؟

(۱) ۱۲۰
(۲) ۹۶
(۳) ۴۸
(۴) ۱۹۲

۱۰ - گل‌فروشی در فروشگاه خود ۸ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۴ تا ۶ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. اگر گل‌فروش برای تزئین ماشین نیاز به ۲ دسته گل متمایز داشته باشد، به چند طریق می‌تواند یک ماشین را تزئین کند؟

(۱) ۱۱۷۸۱
(۲) ۸۹۷۱
(۳) ۱۳۵۲۳
(۴) ۱۵۸۴۱

۱۱ - یک کارخانه برای هر قطعه‌ی تولیدی خود یک شماره‌ی شناسه به‌صورت زیر می‌زند به‌طوری که هر ستاره بیان‌گر یک رقم غیر صفر، مربع بیان‌گر یک عدد دو رقمی با ارقام یکسان و دایره بیان‌گر یکی از حروف مجموعه‌ی $A=\{$الف، ب، ج، د، س، ص، ط، ع، ل، م، ن، و، هـ، ی$\}$ است. در این کارخانه چند قطعه می‌توان تولید کرد که شماره‌ی شناسه‌ی آن با رقم زوج شروع شود؟



(۱) ۵۶×۹^{۵}
(۲) ۱۴×۹^{۶}
(۳) ۵۶×۹^{۶}
(۴) ۱۴×۹^{۵}

۱۲ - در چه تعداد از جایگشت‌های حروف کلمه‌ی «بیله‌سوار»، حروف کلمه‌ی «سوار» کنار هم قرار می‌گیرند؟

(۱) $۵!$
(۲) $۴!$
(۳) $۵! \times ۴!$
(۴) $۵! \times ۶!$

شمارش بدون شمردن

۱۳ - از میان ۷ کشتی‌گیر و ۵ وزنه‌بردار، به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد بطوریکه حداقل یک نفر کشتی‌گیر باشد؟

(۱) ۲۱۰
(۲) ۲۲۰
(۳) ۱۸۰
(۴) ۲۰۰

۱۴ - از هر یک از شهرهای A، B، C، D و E، ۱۰ نفر به یک اردوگاه علمی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر از آنها را انتخاب کرد مشروط به آنکه دو به دو غیر همشهری باشند؟

(۱) ۵×۱۰^{۳}
(۲) $۱۰^{۴}$
(۳) ۲×۱۰^{۴}
(۴) ۸×۱۰^{۳}

۱۵ - ۶ جفت جوراب داریم. ۵ لنگه به‌تصادف از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. تعداد حالاتی که فقط یک جفت در بین آن‌ها دیده شود، کدام است؟

(۱) ۲۷۰
(۲) ۳۶۰
(۳) ۲۴۰
(۴) ۴۸۰

۱۶ - اگر $\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!} = \frac{۱}{۶}$ باشد، n چه‌قدر است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۷ - روی محیط یک دایره n نقطه‌ی متمایز قرار دارد. اگر با این نقاط حداکثر ۵۶ مثلث متمایز بتوان رسم کرد، n کدام است؟

(۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۰

شمارش بدون شمردن

۱۸ - با ارقام ۳، ۰، ۲، ۱، ۸، ۹ و ۷ چند عدد ۴ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۷۲۰
(۲) ۳۶۰
(۳) ۳۲۰
(۴) ۳۰۰

۱۹ - به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب داستان متمایز را در یک قفسه کنار هم قرار داد به شرطی که کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های داستان کنار هم باشند؟

(۱) ۱۴۴
(۲) ۲۸۸
(۳) ۲۸۸۰
(۴) ۵۰۴۰

۲۰ - حاصل $A = \frac{۸! + ۷!}{۸! - ۷!}$ کدام است؟

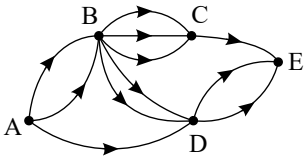
(۱) ۱۵
(۲) $\frac{۹}{۷}$
(۳) $۶!$
(۴) $۱۵!$

۲۱ - به چند طریق می‌توان طبقات مختلف یک ساختمان ۵ طبقه را با چهار رنگ سفید، قرمز، زرد و سبز، رنگ کرد به شرطی که رنگ طبقات مجاور، متمایز باشد؟

(۱) $۴!$
(۲) $۴^۵$
(۳) ۴×۳^۴
(۴) $۵^۴$

شمارش بدون شمردن

۲۲ - اگر شکل مقابل نشان‌دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A، B، C، D و E باشند و همه‌ی جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت، اگر بخواهیم حتماً از شهر B عبور کنیم؟



(۱) ۱۶
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۴

۲۳ - فردی برای استفاده از رایانه‌ی شخصی خود یک رمز شامل دو حرف a و b و ۴ رقم از بین ارقام ۰, ۱, ۰۰۰, ۹ با الگوی «حرف، رقم، رقم، رقم، رقم، حرف» انتخاب کرده است. اما ارقام رمز خود و ترتیب حروف a و b را فراموش کرده است. اگر بخواهد به صورت تصادفی رمز را وارد نماید و وارد کردن هر رمز ۳ ثانیه زمان نیاز داشته باشد، این فرد حداکثر در چه زمانی می‌تواند به اطلاعات رایانه‌ی خود دسترسی پیدا کند؟

(۱) ۶۰۰ دقیقه
(۲) ۱۰۰ دقیقه
(۳) ۱۰۰۰ دقیقه
(۴) ۶۰۰۰۰ دقیقه

۲۴ - ۲۰ مسافر داخل مترو، به چند طریق می‌توانند در ۷ ایستگاه از قطار پیاده شوند؟

(۱) $۲۰^{۷}$
(۲) $P(۲۰,۷)$
(۳) $۷^{۲۰}$
(۴) $\frac{۲۰!}{۷!}$

۲۵ - با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ چند عدد چهاررقمی زوج کوچک‌تر از ۴۲۰۰ می‌توان نوشت؟

(۱) ۶۸۹
(۲) ۳۶۰
(۳) ۳۶۵
(۴) ۶۶۰

شمارش بدون شمردن

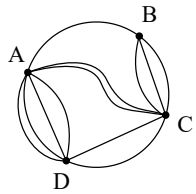
۲۶ - با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت که مضرب ۵ باشد؟

(۱) ۲۶
(۲) ۳۶
(۳) ۴۵
(۴) ۵۶

۲۷ - فردی با حروف الفبای فارسی یا انگلیسی می‌خواهد یک رمز سه حرفی بسازد به طوریکه تمامی حروف با فارسی باشند یا انگلیسی، چند حالت برای این رمز وجود دارد؟ (۳۲ حرف فارسی و ۲۶ حرف انگلیسی وجود دارد.)

(۱) $۳۲^۳ + ۲۶^۳$
(۲) $(۳۲ \times ۲۶)^۳$
(۳) $۵۸^۳$
(۴) $(۲۴ \times ۲۵ \times ۲۶) + (۳۰ \times ۳۱ \times ۳۲)$

۲۸ - شخصی قصد دارد تا از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C سفر کند. اگر مسیرهای مستقیم از A به C مسدود شده باشد، به چند طریق این عمل ممکن است؟ (از هر نقطه حداکثر یک بار می‌توان عبور کرد.)



(۱) ۸
(۲) ۱۳
(۳) ۱۰
(۴) ۱۱

۲۹ - در کیسه‌ای ۶ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج کنیم، در چند حالت امکان دارد ۳ مهره همرنگ باشند؟

(۱) ۲۰
(۲) ۲۴
(۳) ۱۸
(۴) ۱۴

شمارش بدون شمردن

۳۰- از بین افراد یک گروه، تصمیم به انتخاب ۴ نفر داریم. به طوری که شخص A حتماً حضور داشته باشد و شخص B حضور نداشته باشد. اگر به ۸۴ طریق قادر به این کار باشیم، چند نفر در این گروه حضور دارند؟

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۱

(۴) ۱۲

شمارش بدون شمردن

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی از رابطه‌ی $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ بدست می‌آید.

تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء متمایز با تعداد انتخاب‌های $n-r$ شیء از n شیء برابر است؛ یعنی:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

از مجموعه‌ی اصلی شامل n عضو باشد، طبق قرض داریم:

$$\binom{n}{\underset{\uparrow}{۵}}=\binom{n}{\underset{\uparrow}{۴}}\ \Rightarrow\ \begin{cases}r=۵\\ n-r=۴\end{cases}\Rightarrow n-۵=۴\Rightarrow n=۹$$
$$\begin{matrix}\uparrow\\ r\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\uparrow\\ n-r\end{matrix}$$

پس مجموعه‌ی اصلی ۹ عضو دارد؛ و تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن برابر است با:

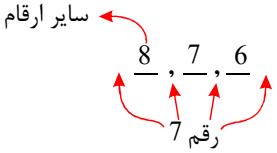
$$\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!\,۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳\times۲\times۱\times۶!}=۸۴$$

۲ - گزینه ۳ اعداد با ارقام یک در میان زوج و فرد، به یکی از دو صورت زیر ممکن است ظاهر شوند:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\text{زوج}}{۴}\times\underset{\text{فرد}}{۵}\times\underset{\text{زوج}}{۵}\times\underset{\text{فرد}}{۵}=۵۰۰\\ \underset{\text{فرد}}{۵}\times\underset{\text{زوج}}{۵}\times\underset{\text{فرد}}{۵}\times\underset{\text{زوج}}{۵}=۶۲۵\end{array}\right\}\Rightarrow\text{تعداد کل حالات}=۵۰۰+۶۲۵=۱۱۲۵$$

دقت: صفر نمی‌تواند در اولین رقم سمت چپ ظاهر شود، چون در آن صورت عددی سه رقمی حاصل می‌شود.

۳ - گزینه ۴ برای ساختن عددی که صفر در آن بکار نرفته باشد، ۹ رقم در اختیار داریم. اگر بخواهیم رقم ۷ در آن به کار رفته باشد، عدد را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:



یعنی ۷ می‌تواند در یکی از جاهای نشان داده شده قرار گیرد. پس:

$$\text{تعداد حالات}=۸\times۷\times۶\times\underset{\downarrow}{۴}=۱۳۴۴$$

تعداد انتخاب‌های که عدد ۷ برای قرار گرفتن، در اختیار دارد.

۴ - گزینه ۲ $\boxed{P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}}$

$$P(n,۲)=۵n+۷\Rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!}=۵n+۷\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=۵n+۷$$
$$\Rightarrow n(n-۱)=۵n+۷\Rightarrow n^{۲}-n=۵n+۷\Rightarrow n^{۲}-۶n-۷=۰\Rightarrow(n-۷)(n+۱)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}n=۷\\ n=-۱\ :\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$
$$P(n-۱,۳)=P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۶\times۵\times۴=۱۲۰$$

۵ - گزینه ۳ چون می‌خواهیم عدد زوج و کوچک‌تر از ۴۰۰۰ باشد، پس هزارگان باید یکی از اعداد ۱، ۲، یا ۳ باشد و رقم یکان باید یکی از ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

پاسخ را می‌توان با ۲ راه حل زیر بدست آورد:

راه‌حل اول:

دو حالت در نظر می‌گیریم. حالتی که رقم ۲ در هزارگان باشد یا نباشد:

$$\underbrace{\underbrace{۳}_{۲}\ \text{یا}\ \underbrace{۱}_{۲}\ \text{رقم}}\quad\underbrace{\ }_{۸}\quad\underbrace{\ }_{۷}\quad\underbrace{\text{ارقام زوج}}_{۵}\Rightarrow۲\times۸\times۷\times۵=۵۶۰$$

$$\underbrace{\underbrace{۲}_{۱}\ \text{رقم}}\quad\underbrace{\ }_{۸}\quad\underbrace{\ }_{۷}\quad\underbrace{\text{ارقام زوج غیر از}\ ۲}_{۴}\Rightarrow۱\times۸\times۷\times۴=۲۲۴$$

شمارش بدون شمردن

طبق اصل جمع، $۷۸۴ = ۲۲۴ + ۵۶۰$ عدد با این شرایط وجود دارد.

راه حل دوم:

دو حالت در نظر می‌گیریم. حالتی که ۲ در یکان باشد یا نباشد:

$$\underbrace{۳}_{۲}\ \underbrace{\text{رقم ۱ یا}}_{}\ \underbrace{\ }_{۸}\ \underbrace{\ }_{۷}\ \underbrace{\text{رقم۲}}_{۱} \Rightarrow ۲ \times ۸ \times ۷ \times ۱ = ۱۱۲$$

$$\underbrace{۳}_{۳}\ \underbrace{\text{رقم ۲,۱ یا}}_{}\ \underbrace{\ }_{۸}\ \underbrace{\ }_{۷}\ \underbrace{\text{ارقام زوج غیر از ۲}}_{۴} \Rightarrow ۳ \times ۸ \times ۷ \times ۴ = ۶۷۲$$

طبق اصل جمع، $۷۸۴ = ۶۷۲ + ۱۱۲$ عدد با این شرایط وجود دارد.

۶ - گزینه ۲ $\boxed{۱! = ۱ \ , \ ۰! = ۱}$

$$(۲x^۲ - x)! = ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲x^۲ - x = ۱ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۸}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \\ ۲x^۲ - x = ۰ \Rightarrow x(۲x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \dfrac{۱}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

در این میان، مقادیر $x = ۰$ و $x = ۱$ صحیح هستند.

۷ - گزینه ۳ اعداد بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ و کوچک‌تر از ۴۰۰۰ دارای رقم هزارگان ۲ یا ۳ هستند. پس:

اعداد باقی‌مانده

2 یا 3			

$$2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$$

۸ - گزینه ۱

الف) $\dfrac{n!}{(n-۲)!} = \dfrac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n^۲ - n$ درست است.

ب) $۴ \times ۵! = ۴ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴۸۰ \neq ۲۰!$ نادرست است.

پ) $۴! + ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ + ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴ + ۲۴ = ۴۸ \neq ۸!$ نادرست است

ت) $۲! \times ۳! = ۲ \times ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲ \neq ۶!$ نادرست است.

ث) $۰! = ۱ \neq ۰$ نادرست است.

۹ - گزینه ۲ با توجه به این که کلمه‌ی حاصل ۶ حرفی است، ما باید ابتدا جایگاه دو حرف S را در این ۶ مکان مشخص کنیم. حالات مختلف قرارگیری حروف به صورت زیر است:

۱) $\underline{S}\ _\ \underline{S}\ _\ _\ _$ ۲) $_\ \underline{S}\ _\ \underline{S}\ _\ _$

۳) $_\ _\ \underline{S}\ _\ \underline{S}\ _$ ۴) $_\ _\ _\ \underline{S}\ _\ \underline{S}$

بنابراین حروف S به ۴ شکل می‌توانند در ۶ جایگاه قرار گیرند. هر کدام از ۴ جایگاه باقیمانده نیز به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ حالت می‌توانند پر شوند که طبق اصل ضرب معادل $۴!$ است.

تعداد کل حالت‌ها: $۴ \times ۴! = ۹۶$

۱۰ - گزینه ۱

$\boxed{\text{تعداد حالات انتخاب } r \text{ شیء از } n \text{ شیء متمایز برابر است با : } \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}}$

می‌خواهیم ۲ دسته گل از میان تمام دسته گل‌های ممکن، انتخاب کنیم، پس ابتدا تعداد کل دسته گل‌های ممکن را محاسبه می‌کنیم:

۶ شاخه‌ای یا ۵ شاخه‌ای یا ۴ شاخه‌ای = دسته گل‌های ممکن

$$\Rightarrow \text{تعداد دسته گل‌ها} = \binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۵} + \binom{۸}{۶} = \frac{۸!}{۴! \times ۴!} + \frac{۸!}{۵! \times ۳!} + \frac{۸!}{۶! \times ۲!}$$

$$= ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۱۵۴$$

پس تعداد حالات انتخاب ۲ دسته گل از این تعداد برابر است با:

$$\binom{۱۵۴}{۲} = \frac{۱۵۴!}{۲!\,۱۵۲!} = \frac{۱۵۴ \times ۱۵۳ \times ۱۵۲!}{۲ \times ۱ \times ۱۵۲!} = \frac{۱۵۴ \times ۱۵۳}{۲} = ۱۱۷۸۱$$

۱۱ - گزینه ۱ برای آن‌که شماره‌ی شناسه با رقم زوج غیر صفر آغاز شود، در اولین رقم سمت چپ ۴ عدد می‌توانند قرار گیرند. همچنین در جایگاه دایره‌ای ۱۴ حرف مشخص شده در مجموعه‌ی A می‌توانند قرار گیرند. در بقیه‌ی جایگاه‌های ستاره‌ای همه‌ی ارقام غیر صفر یعنی ۹ رقم می‌توانند واقع شوند. در جایگاه مربعی نیز اعداد دو رقمی با رقم‌های یکسان یعنی ۱۱ و ۲۲ و... و ۹۹ می‌توانند قرار گیرند، یعنی ۹ تا؛ پس:

شمارش بدون شمردن

$$\overset{*}{۴}\times\overset{*}{۹}\times\overset{\bigcirc}{۱۴}\times\overset{*}{۹}\times\overset{*}{۹}\times\overset{*}{۹}\times\overset{\square}{۹}=۵۶\times۹^{۵}$$

۱۲ - گزینه ۳ حروف کلمه‌ی سوار را به‌عنوان ۱ شیء درنظر می‌گیریم که درون خود به $!۴$ حالت می‌تواند ظاهر شود (چون ۴ حرف دارد). این شیء در کنار حروف دیگر، ترکیب زیر را درست می‌کنند.

سوار	ب	ی	ل	ه

این ۵ شیء به $!۵$ حالت می‌توانند در کنار هم قرار گیرند و تعداد کل حالات طبق اصل ضرب برابر با $!۴\times!۵$ خواهد بود.

۱۳ - گزینه ۱ راه‌حل اول: حداقل یک نفر کشتی‌گیر باشد یعنی یا یک کشتی‌گیر و دو وزنه‌بردار، یا ۲ کشتی‌گیر و یک نفر وزنه‌بردار یا هر سه کشتی‌گیر باشند. داریم:

$$\binom{۷}{۱}\times\binom{۵}{۲}+\binom{۷}{۲}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۷}{۳}=۷\times\frac{۵!}{۲!\times۳!}+\frac{۷!}{۲!\times۵!}\times۵+\frac{۷!}{۳!\times۴!}$$

$$=۷\times۱۰+۲۱\times۵+۳۵=۷۰+۱۰۵+۳۵=۲۱۰$$

راه‌حل دوم: می‌توانیم از متمم استفاده کنیم:

$$n\text{ (حداقل یک کشتی‌گیر) }=n\text{ (کل) }-n\text{ (همه وزنه‌بردار)}=\binom{۱۲}{۳}-\binom{۵}{۳}=۲۲۰-۱۰=۲۱۰$$

۱۴ - گزینه ۲ برای آنکه در تیم ۳ نفره، هیچ دو نفری از یک شهر نباشند باید ۳ شهر از میان ۵ شهر را انتخاب کنیم و از میان ۱۰ نفر عضو آن، ۱ نفر را برگزینیم. یعنی:

$$\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ شهر از ۵ شهر}}\times\underbrace{\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۱۰}{۱}}_{\text{انتخاب نفر از ۱۰ نفر عضو هر شهر}}=۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰^{۴}$$

۱۵ - گزینه ۴ راه‌حل اول: لنگه‌های انتخاب شده باید شامل یک جفت و ۳ لنگه‌ی غیر جفت باشند، پس ابتدا ۴ جفت انتخاب می‌کنیم و سپس از آن ۴ جفت، یک جفت را انتخاب می‌کنیم. از هر یک از سه جفت دیگر، یک لنگه جوراب انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\binom{۶}{۴}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}=۱۵۰\times۴\times۲\times۲\times۲=۴۸۰$$

راه‌حل دوم: ابتدا یک جفت انتخاب می‌کنیم. سپس از بین ۵ جفت باقی‌مانده، ۳ جفت انتخاب می‌کنیم و از هر یک از این سه جفت، یک جوراب انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۳}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}=۶\times۱۰\times۲\times۲\times۲=۴۸۰$$

۱۶ - گزینه ۲

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{(n-۱)!}{(n+۱)n(n-۱)!}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{(n+۱)n}=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow(n+۱)n=۶\Rightarrow۳\times۲=۶\Rightarrow n=۲$$

(دو عدد متوالی)

۱۷ - گزینه ۲ تعداد انتخاب‌های r شی از n شیء متمایز عبارتست از : $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

برای رسم یک مثلث، باید ۳ نقطه از n نقطه‌ی مذکور را انتخاب کنیم؛ پس:

$$\binom{n}{۳}=۵۶\Rightarrow\frac{n!}{۳!\,(n-۳)!}=۵۶\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{۳!\,(n-۳)!}=۵۶$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}=۵۶\Rightarrow\underbrace{n(n-۱)(n-۲)}_{\text{حاصل‌ضرب اعداد متوالی}}=۸\times۷\times۶\rightarrow n=۸$$

۱۸ - گزینه ۳ رقم یکان در اعداد زوج، عددی صفر یا زوج است.

$$\text{عدد زوج}\begin{cases}\underbrace{۶}_{\text{همه غیر از صفر}}\times\underbrace{۵\times۴}_{\text{بقیه}}\times\underbrace{۱}_{\text{صفر}}=۱۲۰\\ \underbrace{۵}_{\text{همه غیر از صفر و عدد یکان}}\times\underbrace{۵\times۴}_{\text{بقیه}}\times\underbrace{۲}_{\text{یا ۸}}=۲۰۰\end{cases}\rightarrow\text{تعداد کل حالات}=۱۲۰+۲۰۰=۳۲۰$$

۱۹ - گزینه ۲

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله انجام شود که مرحله‌ی اول آن به m راه و مرحله‌ی دوم آن عمل به n راه قابل انجام باشد آن عمل به $m\times n$ راه قابل انجام خواهد بود.

(جایگشت موضوعات ریاضی و داستان) × (جایگشت کتاب‌های داستان) × (جایگشت کتاب‌های ریاضی) = تعداد حالات

$$=۳!\times۴!\times۲!=۶\times۲۴\times۲=۲۸۸$$

۲۰ - گزینه ۲

$$n!=n(n-۱)!$$

$$\frac{۸!+۷!}{۸!-۷!}=\frac{۸\times۷!+۷!}{۸\times۷!-۷!}=\frac{۷!\,(۸+۱)}{۷!\,(۸-۱)}=\frac{۸+۱}{۸-۱}=\frac{۹}{۷}$$

۲۱ - گزینه ۳ برای طبقه‌ی اول هر چهار رنگ می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند؛ اما برای سایر طبقات ۳ انتخاب داریم، چون نباید طبقات کنار هم، همرنگ باشند:

شمارش بدون شمردن

$$\underbrace{۴}_{\text{طبقه‌ی اول}} \times \underbrace{۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳}_{\text{طبقات بعدی}} = ۴ \times ۳^۴$$

۲۲ - گزینه ۴ برای رفتن از شهر A به شهر E طوری که حتما از شهر B عبور کنیم دو حالت زیر را می توان در نظر گرفت:

۱) از A به B، از B به C و از C به E برویم. در این حالت $۲ \times ۳ \times ۱ = ۶$ حالت وجود دارد.

۲) از A به B، از B به D و از D به E برویم. در این حالت $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$ حالت وجود دارد.

بنابراین طبق اصل جمع $۶ + ۸ = ۱۴$ حالت وجود دارد.

۲۳ - گزینه ۳

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله انجام شود که مرحله‌ی اول آن به m راه و مرحله دوم آن عمل به n راه قابل انجام باشد $m \times n$ راه قابل انجام خواهد بود.

رمز

حرف	رقم	رقم	رقم	رقم	حرف

$$: \underbrace{۲}_{a \text{ یا } b} \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times \underbrace{۱}_{\text{حرف باقیمانده}} = ۲ \times ۱۰^۴ = ۲۰۰۰۰$$

$$\text{زمان مورد نیاز} = \underbrace{۲۰۰۰۰}_{\text{حالت}} \times \underbrace{۳}_{\text{ثانیه}} = \underbrace{۶۰۰۰۰}_{\text{ثانیه}} = \underbrace{۱۰۰۰}_{\text{دقیقه}}$$

۲۴ - گزینه ۳ هر مسافر برای پیاده شدن ۷ انتخاب (ایستگاه) در اختیار دارد:

$$\underbrace{۷ \times ۷ \times \cdots \times ۷}_{\text{۲۰ مسافر}} = ۷^{۲۰}$$

۲۵ - گزینه ۲

اعداد زوج کمتر از ۴۲۰۰ :

- ۱ | ۲ | ۶ | ۳ — ارقام: ۰،۲،۴ — ۴ — ۰،۱ — $\Rightarrow$ تعداد حالات $= ۱ \times ۲ \times ۶ \times ۳ = ۳۶$
- ۳ | ۶ | ۶ | ۳ — ارقام: ۰،۲،۴ — ۱،۲،۳ — $\Rightarrow$ تعداد حالات $= ۳ \times ۶ \times ۶ \times ۳ = ۳۲۴$

$$\Rightarrow \text{مجموع حالات} = ۳۲۴ + ۳۶ = ۳۶۰$$

۲۶ - گزینه ۲ یکان اعداد مضرب ۵، صفر یا ۵ است:

اعداد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز :

- یکان صفر : ۵ | ۴ | ۱ — ارقام:صفر — $\Rightarrow$ تعداد حالات $= ۵ \times ۴ \times ۱ = ۲۰$
- یکان ۵ : ۴ | ۴ | ۱ — همه جز ۰،۵ — ارقام:۵ — $\Rightarrow$ تعداد حالات $= ۴ \times ۴ \times ۱ = ۱۶$

$$\Rightarrow \text{مجموع حالات} = ۱۶ + ۲۰ = ۳۶$$

۲۷ - گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد حروف زبان فارسی} = ۳۲ \Rightarrow \text{تعداد حالات} = ۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ = ۳۲^۳ \\ \text{تعداد حروف زبان انگلیسی} = ۲۶ \Rightarrow \text{تعداد حالات} = ۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶ = ۲۶^۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع حالات} = ۳۲^۳ + ۲۶^۳$$

دقت: در متن سؤال، برای به‌کار بردن حروف تکراری در رمز عبور، منعی وجود ندارد.

۲۸ - گزینه ۴ باتوجه به داده‌های مسئله رفتن از A به C از مسیرهای زیر ممکن است:

$$\left.\begin{array}{l} A \to B \to C : \boxed{۱}\ \boxed{۳} \ (A\to B \ \ B\to C) : \text{تعداد حالات} = ۱ \times ۳ = ۳ \\ A \to D \to C : \boxed{۴}\ \boxed{۲} \ (A\to D \ \ D\to C) : \text{تعداد حالات} = ۴ \times ۲ = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع حالات} = ۸ + ۳ = ۱۱$$

۲۹ - گزینه ۲ تعداد حالات انتخاب r شیئ از n شیئ متمایز برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

۳ مهره همرنگ باشند یعنی هر سه قرمز یا هر سه سبز باشند. دقت کنید که فقط ۲ مهره‌ی آبی وجود دارد و حالت هر سه آبی امکان‌پذیر نیست. پس:

$$\text{هر سه قرمز} \Rightarrow \text{۶ مهره‌ی قرمز} \quad \text{تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از ۶} = \binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳! \times ۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳!} = ۲۰$$

$$\text{هر سه سبز} \Rightarrow \text{۴ مهره‌ی آبی} \quad \text{تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از ۴} = \binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۳! \times ۱!} = \frac{۴ \times ۳!}{۳!} = ۴$$

$$\text{مجموع حالات} = ۲۰ + ۴ = ۲۴$$

۳۰ - گزینه ۳ تعداد حالات انتخاب r شیء از n متمایز برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

تعداد اعضای گروه را n می‌نامیم و قرار است که ۴ نفر را از این n نفر برگزینیم. از آنجا که A حتماً باید انتخاب شود، ما ۳ حق انتخاب داریم. همچنین این انتخاب‌ها باید از میان $n-۱$ نفر (همه جز A) صورت پذیرد. از طرفی B نباید جزو افراد انتخاب شده باشد. بنابراین تعداد به $n-۲$ نفر کاهش می‌یابد. پس:

شمارش بدون شمردن

تعداد حالات $= \binom{n-۲}{۳} = ۸۴ \Rightarrow \frac{(n-۲)!}{(n-۲-۳)! \times ۳!} = ۸۴ \Rightarrow \frac{(n-۲)!}{(n-۵)! \times ۳۶} = ۸۴$

$\Rightarrow \frac{(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)!}{(n-۵)! \times ۶} = ۸۴ \Rightarrow (n-۲)(n-۳)(n-۴) = ۶ \times ۸۴$

$\Rightarrow$ حاصل‌ضرب ۳ عدد متوالی $= ۹ \times ۸ \times ۷ \Rightarrow (n-۲)(n-۳)(n-۴) = ۹ \times ۸ \times ۷ \Rightarrow n-۲ = ۹$

$\Rightarrow n = ۱۱$

شمارش بدون شمردن

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۲	۱۱ - ۱	۱۶ - ۲	۲۱ - ۳	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۳	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۴	۲۷ - ۱
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۱	۱۸ - ۳	۲۳ - ۳	۲۸ - ۴
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۳