نام آزمون: شمارش بدون شمردن

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - چند جایگشت چهار حرفی با حروف کلمه‌ی $IRANIAN$ می‌توان نوشت که دقیقاً دو حرف آن تکراری باشد؟

① ۸۰
② ۱۰۸
③ ۱۲۰
④ ۱۴۴

۲ - معادلهٔ $(۵x^{۲} - ۴x)! = ۱$ دارای چند جواب است؟

① ۳
② ۱
③ ۴
④ ۲

۳ - با ارقام ۰, ۰, ۰, ۰, ۵, ۵, ۵, ۵ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

① ۱۰
② ۶
③ ۲۰
④ $\frac{۸!}{۴! \times ۳!}$

۴ - با حروف کلمه‌ی $FARHAD$، چند رمز عبور ۶ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که دو حرف A در کنار هم نباشند؟

① ۱۲۰
② ۱۸۰
③ ۲۴۰
④ ۳۰۰

۵ - با حروف کلمهٔ $ZEMESTAN$ چند رمز عبوری چهارحرفی می‌توان ساخت؟

① ۴۸۰
② ۱۸۰
③ ۸۴۰
④ ۱۰۲۰

۶ - با حروف کلمه‌ی $DAMAVAND$ چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت به طوری که فقط حرف A دو بار تکرار شود؟

① ۱۴۴
② ۱۲۰
③ ۷۲
④ ۷۲۰

۷ - با حروف کلمهٔ «$CHILD$» چند کلمهٔ سه حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به طوری که شامل حرف «H» باشند؟

① ۶۰
② ۳۶
③ ۲۴
④ ۳۰

۸ - به ۱۰ سؤال چهار گزینه‌ای به چند طریق می‌توان پاسخ داد به طوری که پاسخ به همه‌ی سؤال‌ها اجباری باشد؟

① $۴^{۲۰}$
② $۴^{۱۰}$
③ $۲^{۱۰}$
④ $۱۰^{۴}$

۹ - چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

① ۴۵۰
② ۵۰۴
③ ۶۴۸
④ ۷۲۰

۱۰ – تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ گویی به ۶ سؤال دو گزینه‌ای کدام است؟ (پاسخ‌گویی به همه‌ی سؤال‌ها اجباری است.)

① ۳۶

② ۴۸

③ ۶۴

④ ۷۲

۱۱ – با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ چند عدد ۴ رقمی بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

① ۳۶۰

② ۴۰۰

③ ۴۶۰

④ ۸۰۰

۱۲ – روی ۹ گوی یکسان ارقام ۱ تا ۹ را نوشته‌ایم، به چند طریق می‌توان ۲ گوی با هم برداشت به طوری که جمع اعداد روی آن‌ها عددی زوج باشد؟

① ۱۰

② ۶

③ ۹

④ ۱۶

۱۳ – حاصل عبارت $\frac{۶!+۵!}{۴!}$ کدام است؟

① ۳۵

② ۳۸

③ ۱۶

④ ۸

۱۴ – با حروف کلمه‌ی «پاسداران» چند جایگشت ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف «پ» شروع و به حرف «ن» ختم شود؟

① ۹۰

② ۱۰۵

③ ۱۲۰

④ ۱۳۵

۱۵ - با جایگشت ارقام ۶, ۶, ۵, ۷, ۴, ۴, ۳ چند عدد ۷ رقمی متمایز می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۲۶۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۱۳۶۰

۱۶ - با ارقام ۵, ۷, ۸, ۹, ۷, ۳, ۱ چند عدد ۴ رقمی متمایز می‌توان نوشت؟

(۱) ۲۴۰

(۲) ۶۰

(۳) ۴۸۰

(۴) ۱۲۰

۱۷ - از بین ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۲ دانش‌آموز کلاس دوم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم، به چند طریق می‌توان سه نفر را انتخاب نمود به طوری که در این انتخاب، دانش آموزی از کلاس دوم وجود نداشته باشد؟

(۱) ۶۲

(۲) ۷۸

(۳) ۸۴

(۴) ۹۶

۱۸ - یک سالن آمفی تئاتر ۱۰ در دارد. به چند طریق می‌توان از یک در وارد سالن شد و از دیگر خارج شد؟

(۱) ۱۰۰

(۲) ۹۰

(۳) ۹

(۴) ۱۰

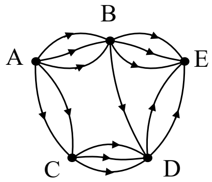
۱۹ - با حروف کلمهٔ «پردیس» چند کلمهٔ ۳ حرفی با حروف غیرتکراری می‌توان نوشت؟

(۱) $۴^۳$

(۲) $۳^۴$

(۳) ۲۴

(۴) ۶۰



۲۰ - در نمودار شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

① ۲۷
② ۲۱
③ ۱۵
④ ۱۸

۲۱ - یک اتوبوس با ۱۰ مسافر در ۱۲ ایستگاه توقف می‌کند و همهٔ مسافرین در این ایستگاه‌ها از اتوبوس پیاده می‌شوند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

① ۱۲۰
② $۱۰^{۱۲}$
③ $۱۲^{۱۰}$
④ ۱۴۴

۲۲ - با حروف کلمه‌ی "$CHILD$" چند کلمه‌ی سه حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به طوری که شامل حرف «H» باشند؟

① ۶۰
② ۳۶
③ ۲۴
④ ۳۰

۲۳ - به چند طریق می‌توان به ۵ سؤال تستی دو گزینه‌ای (بله، خیر) پاسخ داد؟ (پاسخ دادن به همه‌ی سؤالات الزامی است.)

① ۱۸
② ۲۴
③ ۳۲
④ ۳۸

۲۴ – می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن‌ها یکی از حروف {ن، ی، ب، ج، الف} و در سمت چپ آن‌ها عدد ۳ رقمی بدون رقم صفر نوشته شود. چند کارت می‌توانیم بسازیم؟

۱) ۵۰۰۰

۲) ۷۲۹

۳) ۳۶۴۵

۴) ۴۵۰۰

۲۵ – ۷ نفر را به چند طریق می‌توان به یک تیم ۴ نفره و یک تیم ۳ نفره تقسیم کرد؟

۱) ۲۱

۲) ۳۵

۳) $(۳۵)^{۲}$

۴) ۲۱۰

۲۶ – مقدار عددی $P(۷,۳)$ چند برابر مقدار عددی $\binom{۶}{۴}$ است؟

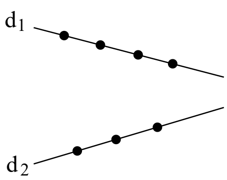
۱) ۵۶

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۴

۲۷ – با استفاده از نقاط واقع شده بر روی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ مطابق شکل زیر، چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۱۵

۲) ۲۴

۳) ۳۰

۴) ۳۵

۲۸ – در چند عدد ۳ رقمی، فقط یک رقم ۵ وجود دارد؟

۱) ۷۲

۲) ۸۱

۳) ۲۲۵

۴) ۲۴۳

۲۹- از بین ۱۰ دانش‌آموز که دو نفر آن‌ها برادر هستند، به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد به طوری که هر دو برادر با هم انتخاب نشوند؟

① ۷۲
② ۹۰
③ ۱۱۲
④ ۱۲۰

۳۰- در یک همایش ادبی، ردیف اول سالن که دارای ۲۰ صندلی است، برای نشستن ۱۵ صاحب اثر ادبی برگزیده در نظر گرفته شده است. این افراد به چند طریق می‌توانند روی این صندلی‌ها بنشینند؛ به طوری که هیچ صندلی خالی بین آن‌ها نباشد؟

① $P(۲۰,۱۵)$
② $۶ \times ۱۵!$
③ $۶! \times ۱۵!$
④ $C(۲۰,۱۵)$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ حروف کلمه‌ی داده شده عبارت‌اند از: $\underline{I, I}\,,\ \underline{A, A}\,,\ \underline{N, N}\,,\ R$

ابتدا دو حرف تکراری را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۳}{۱} = ۳$$

سپس از ۵ حرف باقی‌مانده، دو حرف متمایز را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۳}{۲} = ۳$$

مثلاً حروف N و A, I, I را انتخاب کرده‌ایم، تعداد جایگشت‌های این چهار حرف برابر است با:

$$\frac{۴!}{۲!} = ۱۲$$

پس تعداد جایگشت‌های مورد نظر برابر است با:

$$۳ \times ۳ \times ۱۲ = ۱۰۸$$

۲ - گزینه ۳

هریک از دو مقدار $!۰$ و $!۱$ برابر یک است، پس داریم:

$$۵x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(۵x - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۵x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۵x = ۴ \Rightarrow x = \dfrac{۴}{۵} \end{cases}$$

$$۵x^۲ - ۴x = ۱ \Rightarrow ۵x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases} x = ۱ \\ x = \dfrac{-۱}{۵} \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های معادله $\left\{-\dfrac{۱}{۵}, ۰, \dfrac{۴}{۵}, ۱\right\}$ است.

۳ - گزینه ۳

$$\overset{\text{رقم سمت چپ ۵ است}}{\overset{\uparrow}{\square}}\ \underbrace{\square\square\square\square\square\square}_{\text{۶ رقم}}\ \overset{\text{رقم یکان ۰ است}}{\overset{\uparrow}{\square}}$$

تعداد اعداد ۶ رقمی با سه رقم صفر و سه رقم ۵ برابر است با: $\dfrac{۶!}{۳! \times ۳!} = ۲۰$

۴ - گزینه ۳ ابتدا جایگشت شش حرف کلمه‌ی داده شده را که دارای دو حرف تکراری است را بدست می‌آوریم:

$$\text{تعداد جایگشت} = \frac{۶!}{۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲!} = ۳۶۰$$

اکنون تعداد جایگشت‌هایی را که دو حرف A کنار هم هستند را بدست می‌آوریم.

$$\boxed{AA}\,FRHD \rightarrow \text{تعداد جایگشت} = ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

(جابجایی دو حرف A چون عین هم هستند اهمیت ندارد).

اکنون اگر تعداد حالاتی را که دو حرف A کنار هم هستند را از تعداد کل حالات کم کنیم، تعداد حالاتی که دو حرف A کنار هم نیستند بدست می‌آید.

$$۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰$$

۵ - گزینه ۴ الف) اگر در این رمز دوبار حرف E تکرار شود، کافی است دو حرف دیگر را از بین شش حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم و سپس جابه‌جایی ۴ حرف را که دو حرف آن تکراری است را به دست آوریم.

$$\binom{۶}{۲} \times \frac{۴!}{۲!} = ۱۵ \times ۱۲ = ۱۸۰$$

ب) اگر در این رمز یک‌بار حرف E به کار رفته باشد کافی است ۳ حرف دیگر را از بین شش حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم و سپس جابه‌جایی ۴ حرف را به دست آوریم.

$$\binom{۶}{۳} \times ۴! = ۲۰ \times ۲۴ = ۴۸۰$$

ج) اگر در این رمز حرف E تکرار نشده باشد کافی است ۴ حرف را از بین ۶ حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم و سپس جابه‌جایی ۴ حرف را به‌دست آوریم.

$$\binom{۶}{۴} \times ۴! = ۱۵ \times ۲۴ = ۳۶۰$$

$$\text{کل حالات} = ۱۸۰ + ۴۸۰ + ۳۶۰ = ۱۰۲۰$$

۶ - گزینه ۳ در کلمه مورد نظر حرف A دو بار تکرار شده، پس ۲ حرف دیگر را از حروف دیگر انتخاب می‌کنیم $(MVND)$ سپس جابجایی دو طرف انتخاب شده را با دو حرف A بدست می‌آوریم.

$$\binom{۴}{۲} \times \frac{۴!}{۲!} = \frac{۴!}{۲!\,۲!} \times \frac{۴!}{۲!} = ۷۲$$

۷ - گزینه ۲

تعداد کلمات سه‌حرفی بدون تکرار حروف : $\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳} = ۶۰$

تعداد کلمات سه حرفی فاقد حرف «H» (بدون تکرار حروف) : $\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲} = ۲۴$

تعداد کلمات سه حرفی شامل حرف «H» (بدون تکرار حروف) $= ۶۰ - ۲۴ = ۳۶$

۸ - گزینه ۲ ۱۰ سؤال داریم پس ۱۰ مرحله داریم که در هر مرحله ۴ انتخاب وجود دارد.

بنابر اصل اساسی شمارش به تعداد $۴^{۱۰} = \underbrace{۴ \times ۴ \times \ldots \times ۴ \times ۴}_{۱۰ \text{ بار}}$ راه مختلف می‌توان به این آزمون پاسخ داد.

۹ - گزینه ۳

$$\boxed{۹}\times\boxed{۹}\times\boxed{۸} = ۶۴۸$$

چون عدد سه رقمی است، صدگان نمی‌تواند صفر باشد پس یک رقم از $۱, ۲, \ldots, ۹$ را برای صدگان باید انتخاب کنیم، در مرتبهٔ دهگان هم یک رقم از $۰, ۱, \ldots, ۹$ باید انتخاب شود ولی چون ارقام باید متمایز باشند و یک رقم هم در صدگان انتخاب شده پس ۹ انتخاب داریم و در مرتبهٔ یکان هم ۸ انتخاب داریم.

۱۰ - گزینه ۳ برای پاسخ به سؤال اول ۲ انتخاب، سؤال دوم ۲ انتخاب، ... و سؤال ششم نیز ۲ انتخاب خواهیم داشت که طبق اصل اساسی شمارش داریم:

تعداد حالات : $۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲ = ۲^{۶} = ۶۴$

۱۱ - گزینه ۱ توجه کنید که در خانه‌ی اول یکی از ارقام ۵ و ۶ و ۷ می‌تواند قرار گیرد.

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\{۵,۶,۷\}} \times \boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴} = ۳۶۰$$

۱۲ - گزینه ۴ برای این که حاصل جمع دو عدد، عددی زوج شود، باید هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند:

هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد $= \binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} + \frac{۴!}{۲! \times ۲!}$

$$= \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۲ \times ۱ \times ۳!} + \frac{۴ \times ۳ \times ۲!}{۲ \times ۱ \times ۲!} = ۱۰ + ۶ = ۱۶$$

۱۳ - گزینه ۱

$$\frac{۶! + ۵!}{۴!} = \frac{۶!}{۴!} + \frac{۵!}{۴!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴!} + \frac{۵ \times ۴!}{۴!} = (۶ \times ۵) + ۵ = ۳۰ + ۵ = ۳۵$$

۱۴ - گزینه ۳ اگر در خانه‌ی اول حرف «پ» و در خانه‌ی آخر حرف «ن» قرار دهیم، این دو خانه فقط به همین حالت پر می‌شوند. برای ۶ خانه‌ی دیگر که سه حرف تکراری «الف» دارد، خواهیم داشت:

$\frac{۶!}{۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۱۲۰ \Rightarrow$ تعداد کل حالات $= ۱ \times ۱۲۰ \times ۱ = ۱۲۰$

۱۵ - گزینه ۲ رقم ۶ دو بار و رقم ۴ نیز ۲ بار تکرار شده است. پس:

تعداد اعداد ۷ رقمی متمایز $= \frac{۷!}{۲! \times ۲!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲ \times ۲!} = ۱۲۶۰$

۱۶ - گزینه ۳ اگر ۲ رقم از این ۴ رقم ۷ باشد، ۲ رقم دیگر را از ۵ رقم باقی مانده انتخاب می کنیم:

$$\binom{۵}{۲} \times \frac{۴!}{۲!} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} \times \frac{۴ \times ۳ \times ۲!}{۲!} = ۱۰ \times ۱۲ = ۱۲۰$$

اگر یک رقم از این ۴ رقم ۷ باشد ۳ رقم دیگر را از ۵ رقم باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۳} \times ۴! = \frac{۵!}{۳! \times ۲!} \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۰ \times ۲۴ = ۲۴۰$$

اگر رقم ۷ در این ۴ رقم وجود نداشته باشد:

$$\binom{۵}{۴} \times ۴! = \frac{۵!}{۴! \times ۱!} \times ۴! = \frac{۵ \times ۴!}{۴!} \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

$$\xrightarrow{\text{کل حالات ممکن}} ۱۲۰ + ۲۴۰ + ۱۲۰ = ۴۸۰$$

۱۷ - گزینه ۳ چون دانش‌آموزان کلاس دوم حق حضور در این انتخاب را ندارند. در واقع باید سه نفر از بین ۹ نفر دیگر را انتخاب نمود.

$$C(۹,۳) = \frac{۹!}{۶! \times ۳!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶! \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۸۴$$

۱۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: اگر کاری در دو مرحله انجام بگیرد به‌طوریکه در مرحلهٔ اول m روش و در مرحلهٔ دوم n روش داشته باشد بنابر اصل ضرب، کل کار مورد نظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.

برای ورود از هر یک از ۱۰ در دلخواه می‌توانیم وارد شویم و برای اینکه از همان در خارج نشویم، برای خارج شدن $۱۰ - ۱ = ۹$ حالت داریم. بنابراین در مجموع طبق اصل ضرب داریم:

$۱۰ \times ۹ = ۹۰$

۱۹ - گزینه ۴

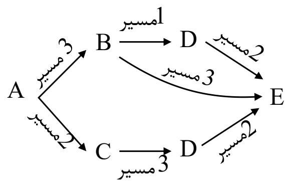
می‌دانیم: **اگر کاری در دو مرحله انجام بگیرد به‌طوریکه در مرحلهٔ اول m روش و در مرحلهٔ دوم n روش داشته باشد بنابر اصل ضرب، کل کار مورد نظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.**

$$\underset{\text{تمام حروف}}{\overset{\uparrow}{\underline{۵}}}\ ,\ \underset{\text{تمام حروف به جز اولی}}{\overset{\uparrow}{\underline{۴}}}\ ,\ \underset{\text{تمام حروف به جز دومی}}{\overset{\uparrow}{\underline{۳}}} \Rightarrow ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

۲۰ - گزینه ۱

می‌دانیم: **اگر کاری در دو مرحله انجام بگیرد به‌طوریکه در مرحلهٔ اول m روش و در مرحلهٔ دوم n روش داشته باشد بنابر اصل ضرب، کل کار مورد نظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.**
اگر کاری را بتوان به یکی از دو روش انجام داد که روش اول m حالت و روش دوم n حالت داشته باشد انجام کل کار مورد نظر بنابر اصل جمع $m + n$ حالت دارد.

مسیرهای رفتن از A به E:



کل حالت‌های ممکن:

$$\Rightarrow \begin{cases} A \to B \to D \to E \quad ۳ \times ۱ \times ۲ = ۶ \\ \text{یا} \\ A \to B \to E \quad ۳ \times ۳ = ۹ \\ \text{یا} \\ A \to C \to D \to E \quad ۲ \times ۳ \times ۲ = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۶ + ۱۹ + ۱۲ = ۲۷$$

۲۱ - گزینه ۳

می‌دانیم: **اگر کاری در دو مرحله انجام بگیرد به‌طوریکه در مرحلهٔ اول m روش و در مرحلهٔ دوم n روش داشته باشد بنابر اصل ضرب، کل کار مورد نظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.**

$$\underbrace{\overset{\text{مسافر اول}}{\overset{\uparrow}{۱۲}} \times \overset{\text{مسافر دوم}}{\overset{\uparrow}{۱۲}} \times \cdots \times \overset{\text{مسافر دهم}}{\overset{\uparrow}{۱۲}}}_{\text{۱۰ تا}} = ۱۲^{۱۰}$$

۲۲ - گزینه ۲

تعداد کل کلمات سه حرفی بدون تکرار حروف: $\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$

تعداد کلمات سه حرفی فاقد حرف «H» (بدون تکرار حروف): $\boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲} = ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

تعداد کلمات سه حرفی شامل حرف «H» (بدون تکرار حروف) $= ۶۰ - ۲۴ = ۳۶$

۲۳ - گزینه ۳ **برای هر سؤال دو حالت وجود دارد. پس داریم:**

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵ = ۳۲$$

توضیح نکات درسی:

اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله، با هم برابر و مساوی n باشند، آن‌گاه تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری برابر است با حاصل‌ضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی:

$$\underbrace{n, n, n, \cdots, n}_{k \text{ بار}} = n^k$$

۲۴ - گزینه ۳

$$\underbrace{\boxed{۹}\ \boxed{۹}\ \boxed{۹}}_{\substack{\downarrow \\ \text{اعداد سه رقمی بدون صفر}}}\ \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{\downarrow \\ \text{حرف}}} \Rightarrow ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۵ = ۳۶۴۵$$

۲۵ - گزینه ۲

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز (بدون در نظر گرفتن ترتیب)، عبارتست از:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

تعداد حالات : (انتخاب ۳ نفر از افراد باقی‌مانده) و (انتخاب تیم ۴ نفره از ۷ نفر) $= \binom{۷}{۴} \times \overset{\text{افراد باقی‌مانده}}{\overset{\uparrow}{\binom{۳}{۳}}} = \frac{۷!}{۴!\,۳!} \times \frac{۳!}{۳! \times ۰!}$

$$= \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۳!} \times \frac{۳!}{۳! \times ۰!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} \times \frac{۱}{۰!} = ۳۵ \times ۱ = ۳۵$$

۲۶ - گزینه ۴

تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز عبارتست از:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز (بدون در نظر گرفتن ترتیب)، عبارتست از:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\frac{P(۷,۳)}{\binom{۶}{۴}}=\frac{\frac{۷!}{۴!}}{\frac{۶!}{۴!\ ۲!}}=\frac{\frac{۷!}{۶!}}{۲!}=\frac{۷\times\cancel{۶!}}{\frac{\cancel{۶!}}{۲\times۱}}=۷\times۲=۱۴$$

۲۷ - گزینه ۳

رسم مثلث با مشخصات داده شده از یکی از دو مسیر زیر ممکن است:

$d_۲$ انتخاب دو نقطه از خط $d_۱$ و یک نقطه از خط : $\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱}=\frac{۴!}{۲!\times۲!}\times\frac{۳!}{۲!\times۱!}=۶\times۳=۱۸$

$d_۱$ انتخاب دو نقطه از خط $d_۲$ و یک نقطه از خط : $\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}=\frac{۴!}{۳!\times۱!}\times\frac{۳!}{۲!\times۱!}=۴\times۳=۱۲$

و مجموع تعداد حالات عبارتست از:

$$۱۸+۱۲=۳۰$$

۲۸ - گزینه ۳ اعدادی که فقط یکبار عدد ۵ در آنها به کار رفته، در یکی از سه دسته‌ی زیر جای می‌گیرند:

$$\begin{cases}\underset{۸}{\_}\times\underset{۹}{\_}\times\underset{۱}{۵}\\ \underset{۸}{\_}\times\underset{۱}{۵}\times\underset{۹}{\_}\\ \underset{۱}{۵}\times\underset{۹}{\_}\times\underset{۹}{\_}\end{cases}\Rightarrow \text{تعداد حالات}=۸\times۹\times۱+۸\times۱\times۹+۱\times۹\times۹=۲۲۵$$

دقت: صفر نمی‌تواند در جایگاه صدگان قرار گیرد؛ چون در آن صورت عدد دو رقمی حاصل می‌شود.

۲۹ - گزینه ۳

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز (بدون در نظر گرفتن ترتیب)، عبارتست از:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

تعداد حالات برابر است با تعداد کل حالات انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر منهای تعداد حالات انتخاب همزمان دو برادر با هم:

$$\binom{۱۰}{۳}-\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{انتخاب دو برادر باهم}}\times\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر از ۸ نفر باقیمانده}}=\frac{۱۰!}{۳!\ ۷!}-۱\times۸=۱۲۰-۸=۱۱۲$$

۳۰ - گزینه ۲ برای این‌که این ۱۵ نفر طوری بنشینند که صندلی خالی بین آنها نباشد، مطابق شکل زیر ۶ حالت امکان‌پذیر است. یعنی نفر اول ردیف، فقط می‌تواند روی صندلی‌های ۱ تا ۶ بنشیند.

1 2 3 4 5 6 ... 15 16 17 18 19 20

این ۱۵ نفر نیز به !۱۵ حالت می‌توانند روی این ۱۵ صندلی کنار هم بنشینند، بنابراین در کل !۱۵ × ۶ حالت امکان‌پذیر است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۳	۱۱ - ۱	۱۶ - ۳	۲۱ - ۳	۲۶ - ۴
۲ - ۳	۷ - ۲	۱۲ - ۴	۱۷ - ۳	۲۲ - ۲	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۳
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۴	۲۴ - ۳	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۱	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲