نام آزمون: شمارش بدون شمردن

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - می‌خواهیم با استفاده از ارقام مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,8,9\}$ اعداد ۴رقمی بدون تکرار ارقام بسازیم، به‌طوری‌که اعداد ساخته‌شده ۲ رقم زوج و ۲ رقم فرد داشته باشند. چه تعداد عدد با این شرایط می‌توانیم بسازیم؟

① ۲۴۰۰
② ۱۴۴۰
③ ۲۱۶۰
④ ۲۸۸۰

۲ - در یک آپارتمان ۶ زوج (زن و شوهر) زندگی می‌کنند. به چند طریق می‌توان ۵ نفر از بین این ۱۲ نفر انتخاب کرد که دقیقاً یک زوج بین آن‌ها وجود داشته باشد؟

① ۲۴۰
② ۴۸۰
③ ۳۶۰
④ ۵۴۰

۳ - تعداد زیرمجموعه‌های ۷عضوی از مجموعهٔ حروف فارسی که ۲ حرف «س» و «ش» در آنها نیستند و ۳ حرف «ب»، «ل» و «م» حتماً در آنها هستند، کدام است؟

① $\binom{27}{4}$
② $\binom{30}{4}$
③ $\binom{32}{4}$
④ $24 \times 25 \times 26$

۴- در رستوران (۱)، ۳ نوع پیش‌غذا، ۵ نوع غذای اصلی و ۷ نوع دسر وجود دارد و در رستوران (۲)، ۴ نوع پیش‌غذا، ۶ نوع غذای اصلی و ۲ نوع دسر وجود دارد. اگر فردی یکی از این رستوران‌ها را انتخاب کند و از منوی آن رستوران دقیقاً یک غذای اصلی، حداکثر یه پیش‌غذا و حداکثر یک دسر را انتخاب کند، در مجموع چند حالت برای میز غذای او وجود دارد؟

۱) ۱۰۵×۴۸

۲) ۱۵۳

۳) ۲۵۰

۴) ۱۸۰

۵- در یک مدرسه هفت کلاس ۲۰ نفره وجود دارد. مدیر مدرسه می‌خواهد کمیته‌ای پنج نفره انتخاب کند، به طوری که از هر کلاس حداکثر یک نفر انتخاب شود، ضمناً حداقل یکی از نفرات انتخابی جزء سه نفر اول لیست کلاس نباشد، در این صورت به چند طریق می‌توان این نفرات را انتخاب کرد؟

۱) ۲۱×۱۷

۲) $۲۰^۵ - ۳^۵$

۳) ۲۱×۲۰

۴) $۲۱ \times (۲۰^۵ - ۳^۵)$

۶- با ارقام ۰، ۴، ۵، ۸ و ۱ چند عدد ۵ رقمی و زوج بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۷۲

۲) ۵۴

۳) ۶۰

۴) ۳۶

۷- یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ مختلف سبز، قرمز، آبی و نارنجی در اختیار دارد. او با ترکیب دو، سه یا چهار قوطی متمایز می‌تواند دقیقاً یک رنگ جدید به‌وجود آورد. او از حاصل ترکیب‌های خود مجموعاً چند رنگ مختلف می‌تواند تولید کند؟

۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۶

۴) ۲۸

۸ - می‌خواهیم از بین دانش‌آموزان سه کلاس ۴ نفره، یک تیم ۵ نفره برای مسابقات المپیاد انتخاب کنیم. در چه تعداد از حالت‌ها، تعداد افراد انتخاب شده از کلاس اول از مجموع نفرات انتخاب شده از هر دو کلاس دوم و سوم بیشتر است؟

① ۲۸

② ۱۱۲

③ ۱۱۰

④ ۱۲۰

۹ - تعداد جایگشت‌های شش حرفی واژه‌ی $OLYMPIAD$ که در آن حروف صدادار (O, A, I) یک در میان قرار گیرند، کدام است؟

① $۶!$

② $\frac{۷!}{۲!}$

③ $۳ \times ۵!$

④ $\frac{۳ \times ۶!}{۲!}$

۱۰ - یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه دارد که تعداد عضوهای آن حداقل ۳ عضو باشد؟

① $\binom{۱۰}{۳}$

② $۲^{۱۰} - \binom{۱۰}{۳}$

③ ۹۶۸

④ ۹۶۹

۱۱ - از مجموعه‌ی $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ به مجموعه‌ی $B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ چند تابع می‌توان نوشت؟

① ۳۱۲۵

② ۲۵

③ ۶۲۵

④ ۱۲۵

۱۲ - اگر $(n^{۲} - ۳n)! = ۲۴$، آن گاه $(n + ۲)!$ کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$

① ۶
② ۲۴
③ ۱۲۰
④ ۷۲۰

۱۳ - با ارقام $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت به طوری که دقیقاً دو رقم زوج در آن عدد به کار رفته باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

① ۱۴۴
② ۲۱۶
③ ۲۴۰
④ ۳۶۰

۱۴ - حروف کلمه $EARNEST$ را به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار دارد، به طوری که حرف N همواره در وسط قرار گیرد؟ (بدون توجه به مفهوم)

① ۱۸۰
② ۲۱۶
③ ۲۴۰
④ ۳۶۰

۱۵ - سه مهرهٔ سیاه یکسان و دو مهرهٔ آبی یکسان داریم. به چند طریق می‌توان این پنج مهره را کنار هم چید؟

① ۸
② ۱۰
③ ۱۳
④ ۱۵

۱۶ - با حروف کلمه $Heater$ چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

① ۶۰
② ۷۲
③ ۸۴
④ ۹۲

۱۷ - تعداد جایگشت‌های ۳ حرفی از حروف کلمهٔ $BAHARAN$ که دقیقاً ۲ حرف همهٔ آنها A باشد، کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۰

۳) ۸

۴) ۶

۱۸ - از بین ۹ کارمند می‌خواهیم ۵ نفر را برای اعزام به خارج انتخاب کنیم. اگر ۳ فرد به‌خصوص از میان آنها از قبل برای اعزام انتخاب شده باشند، تکمیل افراد اعزامی به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۵

۲) ۳۰

۳) ۳۵

۴) ۴۵

۱۹ - یک مجموعهٔ n عضوی دارای ۱۰ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی است. این مجموعه دارای چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی است؟

۱) ۱۸

۲) ۱۴

۳) ۱۲

۴) ۱۰

۲۰ - اگر در کنکور امسال، کسی تصمیم بگیرد به تمام ۲۸۰ سؤال کنکور انسانی پاسخ بدهد، چند حالت مختلف برای پاسخ‌نامهٔ او وجود دارد؟

۱) $۲^{۲۸۰}$

۲) $۲۸۰^{۲}$

۳) $۴^{۲۸۰}$

۴) $۲۸۰^{۴}$

۲۱ - با ارقام $(۰, ۲, ۳, ۴, ۵)$ چند عدد ۳ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۸

۲) ۲۴

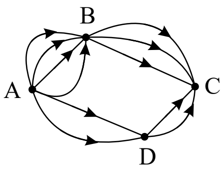
۳) ۲۸

۴) ۳۲

۲۲ - در یک جعبه ۵ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی سفید داریم. تعداد حالت‌هایی که ۳ مهره با هم انتخاب شود به طوری که ۲ مهره سیاه و یک مهره سفید باشد، چند تاست؟

① ۲۰
② ۳۶
③ ۴۰
④ ۴۸

۲۳ - باتوجه به شکل زیر، به چند راه مختلف می‌توان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C رسید؟



① ۱۶
② ۱۸
③ ۲۰
④ ۲۴

۲۴ - با ارقام ۸ ,۵ ,۶ ,۳ ,۴ ,۱ ,۲ چند عدد ۷ رقمی می توان ساخت به طوری که رقم‌های زوج و فرد به صورت یک در میان قرار گیرند؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).

① ۱۴۴
② ۷۲
③ ۲۱۶
④ ۴۱۸

۲۵ - با ارقام (۹ ,۸ ,۶ ,۵ ,۳ ,۱ ,۰) چند عدد ۳ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

① ۱۲۰
② ۱۰۰
③ ۹۰
④ ۶۸

۲۶ – چند عدد سه رقمی زوج بزرگ‌تر از ۳۰۰ با ارقام (۱,۲,۳,۴,۵) وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

① ۳۰

② ۵

③ ۱۲۵

④ ۸۰

۲۷ – با حروف کلمهٔ «ملایر» چند کلمهٔ چهارحرفی (بدون تکرار حروف) می‌توان نوشت، به طوری که حرف «م» در اول و حرف «ل» در آخر بیاید؟

① ۵

② ۱۰

③ ۹

④ ۶

۲۸ – با استفاده از ارقام فرد یک رقمی، چند عدد ۲ رقمی کوچک‌تر از ۴۰ می‌توان نوشت؟

① ۱۰

② ۲۰

③ ۱۵

④ ۱۶

۲۹ – تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ‌گویی به ۴ تست دو گزینه‌ای، کدام است؟ (پاسخ‌گویی به همه‌ی سؤال‌ها الزامی نیست.)

① 3^2

② 9^2

③ 2^4

④ 2^3

۳۰ – تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از کلمه $LUGGAGE$ که فقط دو حرف آن G باشد، کدام است؟

① ۵۶

② ۲۴۰

③ ۲۰

④ ۷۲

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

حالات ممکن:

- شامل صفر باشد: $\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{مرزها}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{ربع‌ها}} \times \underbrace{4!}_{\text{چیدن}} = 10 \times 6 \times 24 = 60 \times 24$
- شامل صفر نباشد: $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} \times \underset{\text{همه‌جزصفر}}{3} \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{\text{چیدن بقیه}} = 10 \times 4 \times 18 = 40 \times 24$

$\Rightarrow$ مجموع $= ۶۰ \times ۲۴ + ۴۰ \times ۱۸ = ۲۱۶۰$

۲ - گزینه ۲

تعداد حالات $= \left(\begin{array}{c}\text{حالات انتخاب ۱ زوج} \\ \text{از ۶ زوج}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{حالات انتخاب ۳ زوج} \\ \text{از ۵ زوج باقی‌مانده}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{انتخاب ۱ نفر از هریک} \\ \text{از ۳ خانواده}\end{array}\right)$

$= \binom{۶}{۱} \times \binom{۵}{۳} \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۶ \times ۱۰ \times ۸ = ۴۸۰$

۳ - گزینه ۱ می‌دانیم:

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطهٔ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به‌دست می‌آید.

باید از بین ۳۲ حرف الفبای فارسی بدون «س» و «ش»، زیرمجموعه‌ای به‌صورت زیر تشکیل دهیم:

$\{$ب, ل, م, $\cdots, \cdots, \cdots, \cdots\}$

یعنی باید ۴ حرف از ۳ − ۲ − ۳۲ حرف باقی‌مانده را انتخاب کنیم:

$\binom{۳۲ - ۲ - ۳}{۴} = \binom{۲۷}{۴}$

۴ - گزینه ۳

حالات ممکن:

- رستوران 1: $\underset{\text{پیش‌غذا}}{4} \times \underset{\text{غذای‌اصلی}}{5} \times \underset{\text{دسر}}{8} = 160$
- رستوران 2: $\underset{\text{پیش‌غذا}}{5} \times \underset{\text{غذای‌اصلی}}{6} \times \underset{\text{دسر}}{3} = 90$

$\longrightarrow$ مجوع $= 250$

۵ - گزینه ۴ حداقل یکی از نفرات انتخابی جزء سه نفر اول نباشد:

(تعداد کل حالت‌ها) − (همه‌ی افراد انتخابی جزء سه نفر اول لیست کلاس باشند)

= **(انتخاب ۵ کلاس از ۷ کلاس)** × $($انتخاب یک نفر از نفرات کلاس$)^۵$

− **(انتخاب ۵ کلاس از ۷ کلاس)** × $($انتخاب یک نفر از سه نفر اول لیست کلاس$)^۵$

$= \binom{۷}{۵}\binom{۲۰}{۱}^۵ - \binom{۷}{۵}\binom{۳}{۱}^۵ = (\frac{۷ \times ۶}{۲} \times ۲۰^۵) - (\frac{۷ \times ۶}{۲} \times ۳^۵)$

$= ۲۱ \times (۲۰^۵ - ۳^۵)$

۶ - گزینه ۳ یکان عدد زوج، می‌تواند صفر یا زوج باشد، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

یکان: صفر $\Longrightarrow$

۴	۳	۲	۱	۱
همه جز صفر				صفر

$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲۴$ (بقیه)

یکان: زوج $\Longrightarrow$

۳	۳	۲	۱	۲
همه جز صفر و یکان				زوج

$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۳۶$ (بقیه)

$\Longrightarrow$ تعداد کل حالات $=۳۶+۲۴=۶۰$

۷ - گزینه ۲ تعداد انتخاب‌های r شی از n شیء متمایز عبارتست از : $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

اگر دو قوطی متمایز باهم ترکیب شوند:

$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!\times ۲!}=۶$$

اگر سه قوطی متمایز باهم ترکیب شوند:

$$\binom{۴}{۳}=\frac{۴!}{۳!\times ۱!}=۴$$

اگر چهار قوطی متمایز باهم ترکیب شوند:

$$\binom{۴}{۴}=\frac{۴!}{۴!\times ۰!}=۱$$

پس طبق اصل جمع، تعداد کل رنگ‌های جدید حاصل $۱۱ = ۱ + ۴ + ۶$ است.

۸ - گزینه ۴ تعداد انتخاب‌های r شی از n شیء متمایز عبارتست از : $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

چون قرار است که تعداد کلاس اولی‌ها از مجموع دو کلاس دیگر بیشتر باشد، باید از کلاس اول ۳ یا ۴ نفر انتخاب شوند، پس پیشامد A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

پیشامد A : (۳ نفر از کلاس اول و بقیه از کلاس دوم و سوم) یا (۴ نفر از کلاس اول و بقیه از کلاس دوم و سوم)

$$\Rightarrow n(A)=\binom{۴}{۳}\times\binom{۸}{۲}+\binom{۴}{۴}\times\binom{۸}{۱}=\frac{۴!}{۳!\times ۱!}\times\frac{۸!}{۲!\times ۶!}+۱\times\frac{۸!}{۱!\times ۷!}$$

$$=۴\times ۲۸+۱\times ۸=۱۱۲+۸=۱۲۰$$

۹ - گزینه ۱ کلمه‌ی ۶ حرفی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. (سه حرف صدادار و ۵ حرف بی‌صدا داریم)

۳ ×	۱ ×	۴ ×	۲ ×	۵ ×	۳ = ۳۶۰
بی‌صدا	صدادار	بی‌صدا	صدادار	بی‌صدا	صدادار

یا

۱ ×	۲ ×	۲ ×	۴ ×	۳ ×	۵ = ۳۶۰
صدادار	بی‌صدا	صدادار	بی‌صدا	صدادار	بی‌صدا

$$\Rightarrow \text{مجموع}=۳۶۰+۳۶۰=۷۲۰=۶!$$

۱۰ - گزینه ۳ یک مجموعهٔ n عضوی ۲^n زیرمجموعه دارد

تعداد زیرمجموعه‌های حداقل ۳ عضوی = تعداد کل زیرمجموعه‌ها − (تعداد ۰ عضوی + تعداد ۱ عضوی‌ها + تعداد ۲ عضوی‌ها)

$$=۲^{۱۰}-\left(\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}\right)$$

$$=۱۰۲۴-(۱+۱۰+\frac{۱۰!}{۲!\times ۸!})=۱۰۲۴-(۱+۱۰+۴۵)=۱۰۲۴-۵۶=۹۶۸$$

۱۱ - گزینه ۱ توابع از A و B به صورت زیر هستند:

$$f=\{(۱,\cdots),(۳,\cdots),(۵,\cdots),(۷,\cdots),(۹,\cdots)\}$$

که در جاهای خالی هر یک از اعضای مجموعه‌ی B قرار می‌گیرند. پس تعداد کل توابع عبارتست از:

$$۵\times ۵\times ۵\times ۵\times ۵=۵^۵=۳۱۲۵$$

۱۲ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}(n^۲-۳n)!=۲۴\\ \text{می‌دانیم}\quad ۴!=۲۴\end{array}\right\}\Rightarrow n^۲-۳n=۴\Rightarrow n^۲-۳n-۴=۰\Rightarrow (n+۱)(n-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۱\\ n=۴\end{cases}$$

n عددی طبیعی است پس $n=-۱$ غیر قابل قبول است.

$$(n+۲)!=(۴+۲)!=۶!=۷۲۰$$

۱۳ - گزینه ۲ ۴ جایگاه داریم که باید ۲ تا از آن‌ها حتماً با عدد زوج اشغال شوند و دو جایگاه دیگر با اعداد فرد پر شوند:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{انتخاب ۲ جایگاه برای}\\ \text{اعداد زوج از میان}\\ \text{۴ جایگاه}}}{\binom{۴}{۲}}\times\underset{\substack{\downarrow\\ \text{جایگشت دو عدد}\\ \text{زوج}\\ \text{(تکرار مجاز است)}}}{۲^۲}\times\underset{\substack{\downarrow\\ \text{جایگشت ارقام}\\ \text{فرد}\\ \text{(تکرار مجاز است)}}}{۳^۲}=۶\times ۴\times ۹=۲۱۶$$

۱۴ - گزینه ۴

$$\underset{۱}{\_\,\_\,\_\,N\,\_\,\_\,\_}$$

حرف N را در وسط قرار می‌دهیم. ۶ حرف $EAREST$ باقی می‌ماند که جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

توجه کنید که حرف E ۲ بار تکرار شده است و جابه‌جایی آن‌ها تأثیری ندارد پس حاصل را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم.

$$\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲!}{۲}=۳۶۰$$

۱۵ - گزینه ۲

$$\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۳!\ \times ۲\times ۱}=۱۰$$

۱۶ - گزینه ۲

حالت اول: حرف تکراری نداشته باشیم $\Rightarrow Heatr \Rightarrow \boxed{۵}\boxed{۴}\boxed{۳} \Rightarrow$ جواب $=۵\times ۴\times ۳=۶۰$

حالت دوم: حرف e دو بار تکرار شود $\Rightarrow$ جواب $=\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک حرف از چهار حرف } H,a,t,r}\times \underbrace{\frac{۳!}{۲!}}_{\text{جابجایی سه حرف}}=۴\times ۳=۱۲$

بنابراین $۶۰+۱۲=۷۲$ کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت.

۱۷ - گزینه ۱

$$\text{تعداد جایگشت‌ها}=\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک حرف از بین چهار حرف } N,R,H,B}\times \underbrace{\frac{۳!}{۲!}}_{\text{جابه‌جایی سه حرف}}=۴\times ۳=۱۲$$

۱۸ - گزینه ۱ ۳ نفر خاص، قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید ۲ نفر دیگر را از بین ۶، $(۹-۳=۶)$ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست به‌کمک فرمول ترکیب محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌های انتخاب}=\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{(۶-۲)!\times ۲!}=\frac{۶\times ۵\times ۴!}{۴!\ \times ۲\times ۱}=۱۵$$

۱۹ - گزینه ۴

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی $=\binom{n}{r}$

$$\Rightarrow \binom{n}{۲}=۱۰\Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!\,۲!}=۱۰\Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲(n-۲)!}=۱۰\rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}=۱۰$$

$$\Rightarrow n^۲-n=۲۰\Rightarrow n^۲-n-۲۰=۰\Rightarrow (n-۵)(n+۴)=۰\Rightarrow \begin{cases} n-۵=۰\Rightarrow n=۵ & \text{ق ق}\\ n+۴=۰\Rightarrow n=-۴ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ ۵ عضوی $=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۳!}=۱۰$

۲۰ - گزینه ۳ برای هر سؤال ۴ حالت مختلف وجود دارد، لذا:

$$\underbrace{۴\times ۴\times \cdots \times ۴}_{\text{۲۸۰بار}}=۴^{۲۸۰}$$

۲۱ - گزینه ۱ در خانه‌ی اول سمت راست (یکان) ۲ حالت داریم، ۳ یا ۵. در اولین خانه‌ی سمت چپ (صدگان) صفر نمی‌تواند باشد و یک عدد هم برای خانه‌ی اول (یکان) انتخاب کرده‌ایم، پس ۳ حالت دارد. در خانه‌ی وسط صفر نیز می‌تواند باشد. پس ۳ حالت دارد.

پس $۳\times ۳\times ۲=۱۸$ عدد می‌توان ساخت.

۲۲ - گزینه ۳

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو سیاه}}\times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک سفید}}=\frac{۵!}{۲!\,(۵-۲)!}\times \frac{۴!}{۱!\,(۴-۱)!}=\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۱\times ۳!}\times \frac{۴\times ۳!}{۱\times ۳!}=۱۰\times ۴=۴۰$$

۲۳ - گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}\text{(مسیر } ABC\text{) حالت۱} \Rightarrow \text{تعداد راه ها}=۴\times ۳=۱۲\\ \text{(مسیر } ABC\text{) حالت۱} \Rightarrow \text{تعداد راه ها}=۲\times ۲=۴\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها}=۱۲+۴=۱۶$$

۲۴ - گزینه ۱

$$\begin{array}{ccccccc} ④ & \boxed{3} & ③ & \boxed{2} & ② & \boxed{1} & ① \\ \text{زوج} & \text{فرد} & \text{زوج} & \text{فرد} & \text{زوج} & \text{فرد} & \text{زوج}\end{array}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد اعداد مطلوب}=۴\times ۳\times ۳\times ۲\times ۲\times ۱\times ۱=۱۴۴$$

۲۵ - گزینه ۲

چون عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز است، یکان از بین اعداد $\{۱,۳,۵,۹\}$ انتخاب می‌شود. باتوجه به این که یکی از اعداد برای یکان استفاده شده است و صدگان نمی‌تواند صفر باشد بنابراین صدگان ۵ حالت دارد، دهگان نیز باتوجه به انتخاب شدن دو عدد، ۵ حالت خواهد داشت، پس:

$$\underset{\text{صدگان}}{\boxed{۵}} \times \underset{\text{دهگان}}{\boxed{۵}} \times \underset{\text{یکان}}{\boxed{۴}} = ۱۰۰$$

۲۶ - گزینه ۱ به جای رقم صدگان ارقام ۵ ,۴ ,۳ را می‌توان قرار داد تا عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰ شود، پس صدگان ۳ حالت دارد. رقم دهگان هر یک از ۵ رقم داده شده می‌تواند باشد. برای آن که عدد حاصل زوج باشد، در مرتبهٔ یکان یکی از دو رقم ۲ یا ۴ می‌تواند قرار گیرد، پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳ \times ۵ \times ۲ = ۳۰$

۲۷ - گزینه ۴ چهار خانه را در نظر می‌گیریم. کلمهٔ ملایر پنج‌حرفی است. بنابراین خانه‌های سمت راست و چپ با حروف «م» و «ل» و هر کدام به یک طریق پُر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، دو خانهٔ دیگر به ۳ و ۲ طریق تکمیل می‌گردد.

$$\overset{\text{ل}}{\boxed{۱}}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \overset{\text{م}}{\boxed{۱}} \longrightarrow ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

۲۸ - گزینه ۱ می‌خواهیم اعداد حاصل کوچک‌تر از ۴۰ باشند، بنابراین در خانه‌ی دهگان تنها ارقام ۱ و ۳ می‌توانند قرار بگیرند و در خانه‌ی یکان نیز می‌توان تمام ارقام فرد را گذاشت، بنابراین داریم:

ارقام فرد: $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$

یکان دهگان

$\square\ \square$

$۲ \times ۵ = ۱۰$

۲۹ - گزینه ۲ چون پاسخ‌گویی به همه‌ی سؤال‌ها الزامی نیست، بنابراین برای پاسخ‌گویی به هر تست، ۳ حالت خواهیم داشت:

$$۳^۴ = (۳^۲)^۲ = ۹^۲$$

۳۰ - گزینه ۲ از آن جایی که فقط دو حرف G حتماً باید انتخاب شود، پس از میان حروف L, U, A, E باید سه حرف دیگر را انتخاب کنیم و چون در کلمه‌ی پنج حرفی، ۲ حرف تکراری است، بنابراین داریم:

$$= \binom{۴}{۳} \times \frac{۵!}{۲!} = \frac{۴!}{۳!} \times \frac{۵!}{۲!} = ۴ \times ۶۰ = ۲۴۰$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۳	۶	۳	۱۱	۱	۱۶	۲	۲۱	۱	۲۶	۱
۲	۲	۷	۲	۱۲	۴	۱۷	۱	۲۲	۳	۲۷	۴
۳	۱	۸	۴	۱۳	۲	۱۸	۱	۲۳	۱	۲۸	۱
۴	۳	۹	۱	۱۴	۴	۱۹	۴	۲۴	۱	۲۹	۲
۵	۴	۱۰	۳	۱۵	۲	۲۰	۳	۲۵	۲	۳۰	۲