نام آزمون: شمارش بدون شمردن

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه دارد که شامل عضوهای ۱، ۴ و ۵ باشد ولی شامل عضو ۳ نباشد؟

۱) ۳۲

۲) ۶۴

۳) ۱۰۲۴

۴) ۵۱۲

۲ - با اعداد ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که اولین رقم سمت چپ، عدد اول باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۶

۲) ۳۰

۳) ۲۴

۴) ۱۸

۳ - ۵ قوطی رنگ متفاوت داریم. اگر بتوانیم با ترکیب ۲ تا یا بیشتر از این قوطی‌ها، رنگ‌های جدید و متمایز بسازیم، تعداد کل رنگ‌هایی که می‌توانیم داشته باشیم کدام است؟

۱) ۳۶

۲) ۳۰

۳) ۳۲

۴) ۳۱

۴ - می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن‌ها یکی از حروف {ن، ی، ب، ج، الف} و در سمت چپ آن‌ها عدد ۳ رقمی بدون رقم صفر نوشته شود. چند کارت می‌توانیم بسازیم؟

۱) ۵۰۰۰

۲) ۷۲۹

۳) ۳۶۴۵

۴) ۴۵۰۰

۵ - به چند طریق می‌توان ۶ دانش‌آموز را در نیمکت‌های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟

۱) ۴۵
۲) ۵۴
۳) ۶۰
۴) ۷۲

۶ - مقدار x در تساوی $\left(\frac{2x}{3}-3\right)!=6$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۸
۴) ۶

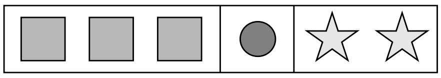
۷ - تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ $SASANPOOR$ به شرط آنکه حروف یکسان کنار هم قرار بگیرند، کدام است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۷۲۰
۳) ۱۴۴۰
۴) $6!\times 2!\times 2!\times 2!$

۸ - با حروف کلمهٔ $DANESH$، چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت. به‌طوری که حرف S در هر رمز باشد؟

۱) ۲۴۰
۲) ۲۵۰
۳) ۲۶۰
۴) ۲۷۰

۹ - اگر برچسب‌های اجناس یک فروشگاه به‌صورت زیر طراحی شده باشد، این فروشگاه حداکثر چند برچسب با این طراحی و شرایط زیر می‌تواند بسازد؟



الف) داخل هر ستاره یک رقم غیرصفر قرار گیرد.

ب) داخل دایره یک حرف از حروف مجموعهٔ {آ, ب, پ, ت, ج, د} قرار گیرد.

پ) داخل مربع یک عدد از میان اعداد حسابی زوج یک رقمی و غیر تکراری قرار گیرد.

(۱) ۳۲۴۰۰

(۲) ۲۹۱۶۰

(۳) ۱۱۶۶۴

(۴) ۲۵۹۲۰

۱۰ - یک آزمون شامل ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای و ۵ سؤال دوگزینه‌ای (بلی - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. اگر جواب دادن به سؤال‌های چهارگزینه‌ای اجباری و جواب دادن به سؤال‌های دوگزینه‌ای اختیاری باشد، این فرد به چند روش می‌تواند به سؤال‌ها جواب دهد؟

(۱) $۵^{۱۰} \times ۳^{۵}$

(۲) $۴^{۱۰} \times ۲^{۵}$

(۳) $۵^{۱۰} \times ۲^{۵}$

(۴) $۴^{۱۰} \times ۳^{۵}$

۱۱ - با ارقام ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ و صفر چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۰۸

(۳) ۹۶

(۴) ۲۴۰

۱۲ - به چند حالت می‌توانیم از میان ۴ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی و ۳ دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی، یک گروه ۴نفره تشکیل دهیم، به‌نحوی که حداقل ۳ نفر از آنان از رشتهٔ تجربی باشند؟

(۱) ۱۳

(۲) ۳۶

(۳) ۱۶

(۴) ۹

۱۳ - از بین ۷ نفر که قرار است در یک صف قرار گیرند، فقط ۳ نفر با هم فامیل هستند. این افراد به چند طریق می‌توانند یک صف تشکیل دهند به‌طوری که هیچ دو فردی که فامیل هستند، کنار هم نباشند؟

(۱) $۵!$

(۲) $۱۲ \times ۵!$

(۳) $۷۲ \times ۵!$

(۴) $\binom{۴}{۲} \times \binom{۷}{۳}$

۱۴ - تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ $HAMID$، به‌طوری که دو حرف H و D کنار هم نباشند کدام است؟

(۱) ۵۴

(۲) ۶۵

(۳) ۷۲

(۴) ۸۰

۱۵ - از بین ۴ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ قرمز و ۶ مهرهٔ سیاه به چند طریق می‌توان ۶ مهره انتخاب کرد به‌طوری که تعداد مهره‌های سفید و قرمز برابر باشند؟

(۱) ۱۵۴۱

(۲) ۲۰۴۱

(۳) ۳۶۸۱

(۴) ۱۲۴۱

۱۶ - با حروف کلمهٔ «جهانگردی» چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان نوشت به‌طوری که اگر حرف «ن» در کلمه باشد، حتماً کنار حرف «ج» باشد؟

(۱) ۸۶۴۰

(۲) ۶۸۴۰

(۳) ۱۰۸۰۰

(۴) ۱۵۸۴۰

۱۷ - در بین اعداد چهاررقمی بدون تکرار ارقام که ارقام آن‌ها از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ انتخاب می‌شود، چند عدد با ۲ شروع می‌شود؟

(۱) ۸

(۲) ۶

(۳) ۱۶

(۴) ۲۴

۱۸ - از میان ۵ ریاضیدان، ۶ فیزیکدان و ۴ شیمیدان قرار است کمیته‌ای ۴نفره انتخاب شود به‌طوری‌که از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشد. این کمیته به چند طریق می‌تواند انتخاب شود؟

۱) ۸۴۰
۲) ۷۲۰
۳) ۶۴۰
۴) ۹۶۰

۱۹ - با حروف کلمهٔ $subtitle$ چند کلمهٔ ۸حرفی می‌توان ساخت که حروف صدادار در کنار هم و حروف t نیز در کنار هم باشند؟

۱) ۷۲۰
۲) ۱۲۰
۳) ۳۶۰
۴) !۸

۲۰ - با ارقام $0, 2, 3, 7$ چند عدد سه‌رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴
۲) ۱۲
۳) ۳۲
۴) ۱۰

۲۱ - اگر $28 = \dfrac{3C(n,3) - P(n-1,2)}{n-2}$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

۲۲ - با ارقام $0, 1, 2, 3, 4, 5$ چند عدد چهاررقمی کوچک‌تر از ۳۰۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶۰
۲) ۱۶۰
۳) ۱۲۰
۴) ۲۴۰

۲۳ - با حروف کلمهٔ $monster$، چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان ساخت که حروف m، o و n کنار هم باشند؟

① ۱۲۰

② $\frac{۷!}{۳}$

③ $۲ \times ۶!$

④ ۷۲۰

۲۴ - با ارقام $۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ چند عدد چهاررقمی زوج و کمتر از ۴۵۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

① ۹۷

② ۲۵۵

③ ۷۲

④ ۱۱۴

۲۵ - اگر $۲C(n,۳) = ۵P(n,۲)$ باشد، $C(n,۲)$ کدام است؟ $(n \geq ۳)$

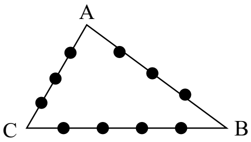
① ۱۳۶

② ۲۷۲

③ ۱۲۰

④ ۲۴۰

۲۶ - با اتصال نقاط مشخص‌شده روی اضلاع مثلث ABC، چند مثلث می‌توانیم بسازیم؟



① ۳۶

② ۱۱۴

③ ۹۹

④ ۱۲۹

۲۷ - با ترکیب حداقل ۳ رنگ از ۵ رنگ قرمز، آبی، زرد، سیاه و سفید، چند رنگ جدید می‌توان درست کرد؟

① ۱۳

② ۱۴

③ ۱۵

④ ۱۶

۲۸ - تعداد کلمات ۳حرفی که با استفاده از حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان ساخت، چند برابر تعداد کلمات ۵حرفی است که با استفاده از حروف مذکور می‌توان ساخت؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

① $\frac{1}{12}$

② $\frac{1}{6}$

③ $\frac{1}{2}$

④ ۲

۲۹ - با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند عدد زوج سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ می‌توان نوشت؟

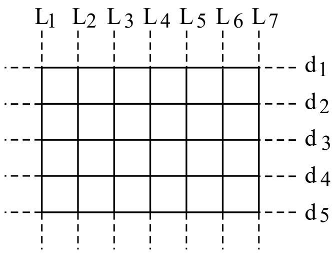
① ۱۱۲

② ۱۱۱

③ ۱۰۱

④ ۸۱

۳۰ - در شکل زیر از برخورد خطوط افقی d_1 تا d_5 و خطوط عمودی L_1 تا L_7 چند مستطیل به‌وجود آمده است؟



① ۲۰۰

② ۲۱۰

③ ۲۲۰

④ ۲۴۰

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ وضعیت ۴ عضو مشخص است، ۶ عضو باقیمانده هریک ۲ حالت دارند: می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۶} = ۶۴$$

۲ - گزینه ۲ برای زوج بودن، عدد یکان باید زوج باشد یعنی ۲ یا ۴

و برای آنکه رقم سمت چپ اول باشد باید از بین ارقام ۵ یا ۳ یا ۲ انتخاب شود.

چون رقم ۲ در هر ۲ جایگاه می‌تواند بنشیند و تکرار ارقام مجاز نیست، ۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: ۲ در یکان باشد:

$$\underline{۲} \times \underline{۳} \times ۲ \times \underline{۱} = ۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$$

۳ ۲

۵

حالت دوم: ۲ در یکان نباشد:

$$\underline{۳} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$$

۲ ۴

۳

۵

در کل طبق اصل جمع $۳۰ = ۱۲ + ۱۸$ حالت داریم.

۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\text{انتخاب } r \text{ شی از } n \text{ شی متمایز که در آنها ترتیب انتخاب اهمیت ندارد، ترکیب } r\text{تایی از } n \text{ شی متمایز نامیده می‌شود که داریم } \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}}$

$$\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۵} = \frac{۵ \times ۴}{۲} + \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{۶} + ۵ + ۱ = ۱۰ + ۱۰ + ۵ + ۱ = ۲۶$$

هریک از رنگ‌ها نیز به تنهایی قابل استفاده است، بنابراین:

$$۲۶ + ۵ = ۳۱$$

۴ - گزینه ۳

ارقام ۱ تا ۹ را در نظر می‌گیریم.

$$\underbrace{\boxed{۹}\,\boxed{۹}\,\boxed{۹}}_{\text{اعداد}}\,\underbrace{\boxed{۵}}_{\text{حرف}} \Rightarrow ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۵ = ۳۶۴۵$$

۵ - گزینه ۳

پر کردن نیمکت ۳ نفره: $\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳! \times ۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳!} = ۲۰$

پر کردن نیمکت ۲ نفره از بین ۳ دانش‌آموز باقی‌مانده: $\binom{۳}{۲} = \frac{۳!}{۲! \times ۱!} = \frac{۳ \times ۲!}{۲!} = ۳$

پر کردن نیمکت ۱ نفره با ۱ دانش‌آموز باقی‌مانده: $\binom{۱}{۱} = ۱$

پس تعداد کل راه‌های ممکن برابر است با $۲۰ \times ۳ \times ۱ = ۶۰$

۶ - گزینه ۱ می‌دانیم $۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$ است.

پس: $(\frac{۲x}{۳} - ۳)! = ۳! \rightarrow \frac{۲x}{۳} - ۳ = ۳ \Rightarrow \frac{۲x}{۳} = ۶ \Rightarrow ۲x = ۱۸ \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۲} = ۹$

۷ - گزینه ۲

$\boxed{SS}\ \boxed{AA}\ \boxed{OO}\ N\ P\ R \Rightarrow$ تعداد جایگشت‌ها $= ۶! = ۷۲۰$

دقت کنید چون حروف داخل مستطیل‌ها یکسان هستند، جابه‌جایی آنها را در داخل مستطیل‌ها درنظر نمی‌گیریم.

۸ - گزینه ۱

ابتدا حرف S را حذف کرده تعداد دسته‌های سه‌حرفی بدون S که ترتیب مهم نباشد را می‌نویسیم.

$D\ A\ N\ E\ \cancel{S}\ H$

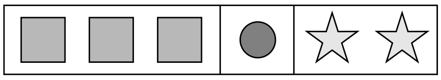
پس از ۵ حرف باقی‌مانده سه حرف انتخاب می‌کنیم (ترتیب مهم نیست)

$$\binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$

پس به ۱۰ طریق سه حرف غیر S انتخاب می‌کنیم حال با S، ۴ حرف می‌شوند و !۴ ترتیب جابه‌جایی آنها است. پس:

جواب : $\underset{\text{انتخاب‌های دسته‌های سه تایی بدون } S}{۱۰} \times \underset{\text{جابه‌جایی ۴ عضو}}{۴!} = ۱۰ \times ۲۴ = ۲۴۰$

۹ - گزینه ۲



یکی از ۶ حزفوجها به‌جز مشخص‌رقم‌مربع اول

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۶ \times \underbrace{۹ \times ۹}_{\text{رقم غیرصفر}} = ۲۹۱۶۰$$

زوج‌ها به‌جز زوج‌ها

رقم مربع اول

۱۰ - گزینه ۴ هر تست چهارگزینه‌ای را می‌توان به ۴ حالت پاسخ داد؛ اما برای پاسخ هر سؤال بله/خیر، ۳ حالت وجود دارد، چون می‌توان هیچ پاسخی به آن‌ها نداد؛ پس با توجه به اصل ضرب داریم:

$$\underbrace{\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \cdots \times \boxed{۴}}_{\text{۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای}} \times \underbrace{\boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳} \times \boxed{۳}}_{\text{۵ سؤال ۲ گزینه‌ای}} = ۴^{۱۰} \times ۳^{۵}$$

۱۱ - گزینه ۲

کل حالات ممکن:

- رقم یکان صفر باشد: $\underset{\text{همه به‌جز صفر}}{\boxed{۵}}\ \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \underset{\text{صفر}}{\boxed{۱}} = ۲۰$
- رقم یکان ۵ باشد: $\underset{\text{همه به‌جز ۵ و صفر}}{\boxed{۴}}\ \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \underset{\text{پنج}}{\boxed{۱}} = ۴۸$

$\Rightarrow$ کل حالت‌ها : $۶۰ + ۴۸ = ۱۰۸$

۱۲ - گزینه ۱

(۴ نفر تجربی) یا (۳ نفر تجربی و یک نفر ریاضی) $\rightarrow$ حداقل سه نفر تجربی

$\Rightarrow$ تعداد حالات $= \binom{۴}{۳} \times \binom{۳}{۱} + \binom{۴}{۴} = ۴ \times ۳ + ۱ = ۱۳$

۱۳ - گزینه ۲ این ۷ نفر باید به‌صورت مقابل در یک صف قرار بگیرند:

فامیل   فامیل   فامیل   فامیل   فامیل

غیر فامیل ، غیر فامیل ، غیر فامیل ، غیر فامیل

«غیرفامیل‌ها» را به !۴ حالت در صف قرار می‌دهیم؛ سپس از ۵ محل مجاز برای فامیل‌ها ۳جا را انتخاب می‌کنیم و ۳ فامیل را به !۳ حالت در این مکان‌ها قرار می‌دهیم:

$$\underset{\text{جایگشت غیرفامیل‌ها}}{۴!} \times \underset{\text{انتخاب ۳ جا}}{\binom{۵}{۳}} \times \underset{\text{جایگشت فامیل‌ها}}{۳!} = ۴! \times \frac{۵!}{۳!۲!} \times ۳! = ۱۲ \times ۵!$$

۱۴ - گزینه ۳ تعداد حالاتی که H و D در کنار هم هستند را از تعداد کل حالات کم می‌کنیم تا تعداد حالات موردنظر مسئله به‌دست آید:

تعداد کل حالات $= ۵! = ۱۲۰$

تعداد حالات H و D در کنار هم : $\boxed{H, D}\,,\ \boxed{A}\,,\ \boxed{M}\,,\ \boxed{I} = \underset{\text{۴ شیء داریم}}{۴!} \times \overset{\text{جایگشت } H \text{ و } D}{۲!} = ۴۸$

$\Rightarrow ۱۲۰ - ۴۸ = ۷۲$

۱۵ - گزینه ۴ تعداد مهره‌های سفید و قرمز می‌توانند به حالت‌های صفر، یک، دو و سه تا باهم برابر باشند:

تعداد حالات:

- صفر سفید، صفر قرمز، شش سیاه : $\binom{4}{0}\times\binom{5}{0}\times\binom{6}{6}=1\times1\times1=1$
- یک سفید، یک قرمز، چهار سیاه : $\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}\times\binom{6}{4}=4\times5\times15=300$
- دو سفید، دو قرمز، دو سیاه : $\binom{4}{2}\times\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}=900$
- سه سفید، سه قرمز، صفر سیاه : $\binom{4}{3}\times\binom{5}{3}\times\binom{6}{0}=40$

$\Rightarrow 1+300+900+40=1241$

۱۶ – گزینه ۱ اگر حرف «ن» در کلمه باشد حتماً کنار حرف «ج» باشد، یعنی:

- حرف «ن» در کلمهٔ ۶ حرفی نباشد. → (از ۷ حرف باقی‌مانده ۶ تا انتخاب کنیم) و آن‌ها را بچینیم → $\binom{7}{6}\times 6!=7!$
- ن و ج در کلمه وجود داشته باشند و کنار هم باشند. → $\boxed{\text{ن،ج}}$, $\boxed{\text{۴ حرف دیگر}}$

$\to \underbrace{2!}_{\text{جایگشت ن و ج}}\times\overset{\text{انتخاب ۴ حرف باقی‌مانده}}{\binom{6}{4}}\times\underbrace{5!}_{\text{چیدن ۵ شیء حاصل}}=30\times5!$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالات $=7!+30\times5!=8640$

۱۷ – گزینه ۲

$\underbrace{\boxed{1}}_{\text{دو}}\times\underbrace{\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}}_{\text{بقیه اعداد}}=6$

۱۸ – گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\text{تعداد حالات انتخاب } r \text{ شیء از } n \text{ شیء متمایز برابر است با: } \binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}}$

«از هر رشته حداقل یک نفر» یعنی از یک رشته ۲ نفر و از دو رشتهٔ دیگر هرکدام ۱ نفر در کمیته حاضر باشند.

حالات ممکن:

- 1شیمیدان ، 1 فیزیکدان ، 2ریاضیدان $\longrightarrow \binom{5}{2}\times\binom{6}{1}\times\binom{4}{1}=10\times6\times4=240$
- 1شیمیدان ، 2 فیزیکدان ، 1 ریاضیدان $\longrightarrow \binom{5}{1}\times\binom{6}{2}\times\binom{4}{1}=5\times15\times4=300$
- 2شیمیدان ، 1 فیزیکدان ، 1 ریاضیدان $\longrightarrow \binom{5}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{4}{2}=5\times6\times6=180$

$\Rightarrow 240+300+180=720$

۱۹ – گزینه ۱

باید ترکیب زیر را بین حروف داشته باشیم: $\boxed{u\,i\,e}\,,\ \boxed{t\,t}\,,\ l\,,\ b\,,\ s$

$\Rightarrow$ تعداد حالات $=\underbrace{5!}_{\text{جایگشت ۵ شیء}}\times\underbrace{3!}_{\text{جایگشت } e,i,u}=120\times6=720$

۲۰ – گزینه ۴

حالات ممکن:

- یکان صفر باشد: $\frac{3}{}\times\frac{2}{}\times\frac{1}{\text{صفر}}=6$
- یکان 2 باشد: $\frac{2}{\text{سه یا هفت}}\times\frac{2}{}\times\frac{1}{\text{دو}}=4$

$\Longrightarrow 4+6=10$

۲۱ – گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{و} \quad P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}}$

$$۳C(n,۳) = ۳ \times \frac{n!}{۳!(n-۳)!} = \cancel{۳} \times \frac{n(n-۱)(n-۲)\cancel{(n-۳)!}}{\cancel{۳} \times ۲ \times ۱ \times \cancel{(n-۳)!}} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲}$$

$$P(n-۱,۲) = \frac{(n-۱)!}{(n-۱-۲)!} = \frac{(n-۱)!}{(n-۳)!} = \frac{(n-۱)(n-۲)\cancel{(n-۳)!}}{\cancel{(n-۳)!}} = (n-۱)(n-۲)$$

$$\frac{۳C(n,۳) - P(n-۱,۲)}{n-۲} = \frac{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲} - (n-۱)(n-۲)}{n-۲}$$

$$= \frac{n(n-۱)}{۲} - (n-۱) = \frac{n(n-۱) - ۲(n-۱)}{۲} = \frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} = ۲۸$$

$$\Rightarrow \underbrace{(n-۱)(n-۲)}_{\substack{\text{حاصلضرب دو عدد متوالی} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ ۸ \quad ۷}} = ۵۶ \Rightarrow n-۱ = ۸ \Rightarrow n = ۹$$

۲۲ ـ گزینه ۳ عدد مطلوب به‌صورت زیر است:

$$\underset{\text{۱ یا ۲}}{\underline{۲}} \times \underbrace{\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳}}_{\text{بقیهٔ اعداد}} = ۱۲۰$$

۲۳ ـ گزینه ۴

کلمهٔ مورد نظر به‌صورت مقابل است: $\boxed{mon}, \boxed{s}, \boxed{t}, \boxed{e}, \boxed{r}$

$$\text{تعداد کلمات} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{۵ بستهٔ فوق}}}{۵!} \times \underset{\substack{\downarrow \\ n,o,m \text{ جایگشت}}}{۳!} = ۷۲۰$$

۲۴ ـ گزینه ۴

حالات ممکن:

$$\underset{\text{چهار}}{\frac{1}{}} \times \underbrace{\frac{3}{} \times \frac{3}{}}_{\text{بقیه}} \times \underset{\substack{\text{صفر} \\ \text{یا} \\ 2}}{\frac{2}{}} : 3 \times 3 \times 2 = 18$$

$$\underset{\text{دو}}{\frac{1}{}} \times \underbrace{\frac{4}{} \times \frac{3}{}}_{\text{بقیه}} \times \underset{\substack{\text{صفر} \\ \text{یا} \\ 4}}{\frac{2}{}} : 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$\underset{\substack{\text{یک} \\ \text{یا} \\ \text{سه}}}{\frac{2}{}} \times \underbrace{\frac{4}{} \times \frac{3}{}}_{\text{بقیه}} \times \underset{\substack{\text{صفر} \\ \text{یا} \\ \text{2 یا 4}}}{\frac{3}{}} : 2 \times 4 \times 3 \times 3 = 72$$

بنابر اصل جمع داریم:

$$\text{مجموع} = ۱۸ + ۲۴ + ۷۲ = ۱۱۴$$

۲۵ ـ گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad , \quad P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$

$$۲ \times \frac{\cancel{n!}}{۳!(n-۳)!} = ۵ \times \frac{\cancel{n!}}{(n-۲)!} \Rightarrow \frac{۲}{۶(n-۳)!} = \frac{۵}{(n-۲)(n-۳)!}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{n-۲} \Rightarrow n-۲ = ۱۵ \Rightarrow n = ۱۷$$

$$C(۱۷,۲) = \frac{۱۷!}{۲! \times ۱۵!} = \frac{۱۷ \times ۱۶ \times \cancel{۱۵!}}{۲ \times \cancel{۱۵!}} = ۱۷ \times ۸ = ۱۳۶$$

۲۶ ـ گزینه ۲ می‌دانیم: تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطهٔ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به‌دست می‌آید.

حالات ممکن:

- از هر ضلع یک راس انتخاب شود : $\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{1} = 3\times 3\times 4 = 36$
- یک ضلع روی AB باشد : $\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{3}{2}\times\binom{3}{1} = 12+9 = 21$
- یک ضلع روی AC باشد : $\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{3}{2}\times\binom{3}{1} = 12+9 = 21$
- یک ضلع روی BC باشد : $\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}+\binom{4}{2}\times\binom{3}{1} = 18+18 = 36$

$\Rightarrow$ مجموع حالت‌ها $=$ ۳۶ + ۲۱ + ۲۱ + ۳۶ = ۱۱۴

۲۷ - گزینه ۴ می‌دانیم:

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ به‌دست می‌آید.

رنگ مورد نظر از ترکیب حداقل ۳ رنگ حاصل می‌شود؛ یعنی ۳ رنگ یا ۴ رنگ یا ۵ رنگ:

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}+\frac{۵!}{۴!\times ۱!}+\frac{۵!}{۵!\times ۰!}=۱۰+۵+۱=۱۶$$

۲۸ - گزینه ۱ می‌دانیم:

تعداد حالات چیدن r شیء از n شیء متمایز در کنار هم از رابطه $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{\text{تعداد کلمات ۳ حرفی}}{\text{تعداد کلمات ۵ حرفی}}=\frac{P(۷,۳)}{P(۷,۵)}=\frac{\frac{۷!}{۴!}}{\frac{۷!}{۲!}}=\frac{۲!}{۴!}=\frac{۲}{۲۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

۲۹ - گزینه ۲

حالات ممکن:

- یکان صفر و صدگان 3 : $\frac{1}{3}\times\frac{6}{\{1,2,\dots,6\}}\times\frac{1}{\text{صفر}}=6$
- یکان صفر و صدگان بزرگتر مساوی 4 : $\frac{3}{4,5,6}\times\frac{7}{\{0,1,\dots,6\}}\times\frac{1}{\text{صفر}}=21$
- یکان 2 یا 4 یا 6 : $\frac{4}{6,5,4,3}\times\frac{7}{\{0,1,\dots,6\}}\times\frac{4}{6,4,2}=84$

$\Rightarrow$ تعداد حالات مطلوب $=$ ۶ + ۲۱ + ۸۴ = ۱۱۱

۳۰ - گزینه ۲ می‌دانیم:

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز از رابطه $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ به‌دست می‌آید.

هر مستطیل از برخورد دو خط افقی و دو خط عمودی تشکیل می‌شود:

$$\overset{\text{خطوط افقی}}{\binom{۵}{۲}}\times\overset{\text{خطوط عمودی}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}\times\frac{۷!}{۲!\times ۵!}=۱۰\times ۲۱=۲۱۰$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۲	۲۶ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۲	۱۲ - ۱	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۴
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۴	۲۸ - ۱
۴ - ۳	۹ - ۲	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲