نام آزمون: شمارش بدون شمردن

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «$KONKORI$» که در آن‌ها حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند، کدام است؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۲۴۰

(۴) ۳۶۰

۲ - اگر $(n-۱)((n-۱)!+(n-۲)!)=۱۲۰$ باشد، n کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

۳ - با حروف کلمهٔ $perusal$ چند جایگشت هفت حرفی بدون تکرار می‌توان نوشت که به حرف e ختم می‌شود و حروف e، r، u، کنار هم باشند؟

(۱) ۴۸

(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۴۴

(۴) ۲۴۰

۴ - با حروف کلمهٔ «تقویم» و بدون تکرار حروف چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که بین حروف «و» و «م» دقیقاً یک حرف قرار بگیرد؟

(۱) ۳۶

(۲) ۲۴

(۳) ۴۸

(۴) ۳۲

۵ - با ارقام ۸، ۷، ۶، ۴، ۳، ۱ و صفر به چند طریق می‌توان عدد چهار رقمی زوج کوچک‌تر از ۵۰۰۰ نوشت به شرط آن‌که تکرار ارقام مجاز نباشد؟

(۱) ۱۸۰

(۲) ۲۲۰

(۳) ۲۴۰

(۴) ۵۴۰

۶ - در مجتمعی ۱۰ زوج زندگی می‌کنند. به چند طریق می‌توان از بین آنها گروهی ۵ نفره برای شورا تشکیل داد که فقط یک زوج بین آنها باشد؟

(۱) ۹۶۰۰

(۲) ۲۵۲۰

(۳) ۶۷۲۰

(۴) ۲۰۱۶

۷ - چند عدد پنج رقمی وجود دارد که حداقل یک رقم تکراری داشته باشد؟

(۱) ۶۹۷۶۰

(۲) ۴۹۶۰۰

(۳) ۶۲۷۸۴

(۴) ۷۴۸۸۰

۸ - اگر در یک کیسه ۲ مهرهٔ زرد، ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز داشته باشیم و بخواهیم ۴ مهره به تصادف انتخاب کنیم، تعداد حالات ممکن برای آن‌که حداقل یک مهرهٔ زرد و دقیقاً یک مهرهٔ سبز انتخاب شوند، کدام است؟

(۱) ۱۴۰

(۲) ۱۲۵

(۳) ۱۰۵

(۴) ۷۵

۹ - یک نقاش قوطی‌هایی از ۶ رنگ مختلف دارد. او با ترکیب ۳ یا تعداد بیش‌تر از رنگ‌های اولیه می‌تواند یک رنگ جدید به‌دست آورد. اگر او در رنگ آمیزی تابلوی نقاشی خود ۳ رنگ از رنگ‌های جدید ایجاد شده را استفاده کند، به چند طریق می‌تواند رنگ‌های خود را انتخاب کند؟

① ۱۲۶۴۰
② ۱۵۶۰۰
③ ۱۱۴۸۰
④ ۱۰۶۰۰

۱۰ - برای ساخت رمز یک دستگاه از سه کاراکتر استفاده می‌کنیم به‌طوری که برای هر کاراکتر می‌توانیم از یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، و ۴ یا یکی از سه نماد @، # ، $ یا یکی از حروف a، b، c، d و e استفاده کنیم به چند طریق می‌توان این رمز را ساخت به‌طوری که فقط در یک کاراکتر آن از عدد استفاده شود؟

① ۳۸۴
② ۷۶۸
③ ۱۰۲۴
④ ۱۵۳۶

۱۱ - گل فروشی در مغازه‌اش ۱۰ مدل گل مختلف دارد. او با توجه به تقاضای مشتریان دسته گل‌هایی درست می‌کند که در آن‌ها حداقل ۸ شاخه گل متمایز به کار رفته است. وی چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

① ۴۵
② ۵۴
③ ۵۶
④ ۶۰

۱۲ - ۶ نفر به نام‌های a ، b، c، d، e و f را به چند طریق می‌توان در یک صف قرار داد به‌طوری که a و b بعد از e و f در صف قرار بگیرند؟ (a و b الزاما بلافاصله بعد از e و f نیستند.)

① ۳۶۰
② ۲۴۰
③ ۱۲۰
④ ۱۸۰

۱۳ – حاصل عبارت $\binom{14}{10}+\cdots+\binom{7}{3}+\binom{6}{2}+\binom{5}{1}$ کدام است؟

(۱) ۱۳۶۴

(۲) ۱۳۶۵

(۳) ۳۰۰۲

(۴) ۳۰۰۳

۱۴ – با حروف کلمهٔ «ماسوله» و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان نوشت که بخشی از آن کلمهٔ «سلام» باشد؟

(۱) $3!$

(۲) $2 \times 3!$

(۳) 3×3

(۴) $4 \times 3!$

۱۵ – گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته‌گل، از ۳ تا ۵ شاخه‌گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته‌گل متفاوت می‌تواند درست کند؟

(۱) ۵۸۲

(۲) ۷۳۰

(۳) ۴۸۲

(۴) ۳۷۸

۱۶ – از بین ۳ دبیر رشتهٔ ریاضی، ۳ دبیر رشتهٔ تجربی، ۳ دبیر رشتهٔ انسانی و ۳ دبیر رشتهٔ هنر، به چند طریق می‌توان یک کمیتهٔ ۳ نفره انتخاب کرد به‌طوری که هیچ دو نفری از اعضای کمیته هم‌رشته نباشند؟

(۱) ۲۲۰

(۲) ۱۰۸

(۳) ۶۴۸

(۴) ۲۷

۱۷ – به چند طریق می‌توان به ۵ سؤال تستی دو گزینه‌ای (بله، خیر) پاسخ داد؟ (پاسخ دادن به همه‌ی سوالات الزامی است)

۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۳۲
۴) ۳۸

۱۸ – می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آنها یکی از حروف $\{$ن، ی، ب، ج، الف$\}$ و در سمت چپ آنها یک عدد ۳ رقمی بدون رقم صفر نوشته شود. چند کارت می‌توانیم بسازیم؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۱) ۵۰۰۰
۲) ۷۲۹
۳) ۳۶۴۵
۴) ۴۵۰۰

۱۹ – برای تزئین کردن یک شاخه گل، روبان‌هایی به رنگ‌های زرد، قرمز و صورتی، ۴ رنگ مختلف کاغذ و ۳ نوع برگ تزئینی در اختیار داریم. اگر بخواهیم از روبان صورتی استفاده کنیم، به چند روش می‌توانیم این شاخه گل را با ۱ برگ تزئینی و ۱ کاغذ تزئین کنیم؟

۱) ۲۴
۲) ۳۶
۳) ۱۲
۴) ۲۷

۲۰ – مقدار n در عبارت $\frac{۳}{۲} = \frac{n!\,(n-۳)!}{(n-۲)!\,(n-۱)!}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۵

۲۱ - با ارقام $(۰, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸)$ چند عدد ۴ رقمی فرد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

① ۴۸

② ۶۸

③ ۷۲

④ ۹۶

۲۲ - با ارقام $(۰, ۲, ۳, ۵, ۷, ۹)$ چند عدد ۳ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

① ۴۰

② ۳۶

③ ۳۲

④ ۲۸

۲۳ - با ارقام ۲, ۳, ۴, ۷, ۸ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که دو رقم فرد کنار هم نباشند؟

① ۴۸

② ۵۶

③ ۷۲

④ ۸۴

۲۴ - سه معلم و دو معاون مدرسه‌ای می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند به طوری که معلمین در کنار هم و معاونین نیز در کنار هم باشند؟

① ۱۲

② ۱۸

③ ۲۴

④ ۳۶

۲۵ - ۵ حرف از ۸ حرف کلمه‌ی «$KHARAZMI$» را با جایگشت‌های متمایز در کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد کلمات ۵ حرفی که هر دو حرف A در آن‌ها موجود باشد کدام است؟

① ۲۰

② ۶۰

③ ۱۲۰۰

④ ۱۴۴۰

۲۶ – تعداد جایگشت‌های ارقام عدد ۲۳۱۲۳۶۳۹ به شرط آن که ارقام برابر کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۲۴۰

(۴) ۳۶۰

۲۷ – اگر $(n+۲)! = ۴۲n!$ باشد، حاصل $\binom{n+۲}{n-۲}$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۲۶

(۳) ۳۵

(۴) ۴۲

۲۸ – با ارقام $۰, ۱, ۳, ۵, ۷$ چند عدد سه رقمی مضرب پنج بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

(۱) ۸

(۲) ۲۱

(۳) ۲۴

(۴) ۲۶

۲۹ – تیم ملی والیبال ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفرشان با هم یکسان نیست. به چند طریق می‌توان ۳ نفر از آنها انتخاب کرد به‌طوری که از بین بلندترین فرد و کوتاه‌ترین فرد تیم، فقط یک نفر انتخاب شده باشد؟

(۱) ۱۵۶

(۲) ۱۳۲

(۳) ۲۶۴

(۴) ۶۶

۳۰ – تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ $SAMPLE$، به‌طوری که A و P کنار هم نباشند، کدام است؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۸۰

(۳) ۴۸۰

(۴) ۲۴۰

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\text{تعداد جایگشت‌های } n \text{ شیء متمایز برابر است با } n!}$

دو حرف K را یک حرف و دو حرف O را یک حرف در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های ۵ حرف را محاسبه می‌کنیم که برابر است با $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

۲ ـ گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \cdots}$

$$(n-1)((n-1)! + (n-2)!) = 120 \Rightarrow (n-1)((n-1)(n-2)! + (n-2)!) = 120$$

$$\Rightarrow (n-1)((n-2)!(n-1+1)) = 120 \Rightarrow (n-1)((n-2)!n) = 120$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)! = 120 \Rightarrow n! = 120 \Rightarrow n = 5$$

۳ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\text{تعداد جایگشت‌های } n \text{ شیء متمایز برابر است با } n!}$

حرف آخر e است. برای آنکه حروف e و r و u کنار هم باشند، حروف دوم و سوم از آخر باید r و u باشند که !۲ حالت دارند و برای سایر حروف محدودیتی وجود ندارد و خانه‌های اول تا چهارم توسط آنها پر می‌شوند.

در مجموع طبق اصل ضرب داریم:

$$4! \times 2! \times 1 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 48$$

۴ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\text{تعداد جایگشت‌های } n \text{ شیء متمایز برابر است با } n!}$

حروف «و» و «م» و یک حرف در وسطشان را که به ۳ طریق قابل انتخاب است، یک بسته در نظر می‌گیریم که با ۲ حرف باقی‌مانده !۳ حالت دارند. خود «و» و «م» به !۲ حالت جابه‌جا می‌شوند و در مجموع بنا بر اصل ضرب داریم:

$$3! \times 3 \times 2 = 6 \times 3 \times 2 = 36$$

۵ ـ گزینه ۲ رقم هزارگان باید ۱ یا ۳ یا ۴ باشد و رقم یکان ۰ یا ۴ یا ۶ یا ۸ که چون عدد ۴ در هر دو جایگاه (یکان و هزارگان) می‌تواند باشد و تکرار ارقام مجاز نیست دو حالت زیرا را در نظر می گیریم:

حالت اول: هزارگان ۴ باشد.

$$\underset{4}{\underline{1}} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underset{\substack{0\\6\\8}}{\underline{3}} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

حالت دوم: هزارگان ۱ یا ۳ باشد.

$$\underset{\substack{1\\3}}{\underline{2}} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underset{\substack{0\\4\\6\\8}}{\underline{4}} = 5 \times 4 \times 4 \times 2 = 160$$

بنابر اصل جمع $220 = 60 + 160$ حالت داریم.

۶ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

ابتدا یک زوج را انتخاب می‌کنیم که $\binom{10}{1} = 10$ حالت دارد.

پس از این ۹ زوج باقی‌مانده ۳ زوج را انتخاب می کنیم و از هر کدام یک نفر یعنی $\binom{9}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$

در مجموع طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{10}{1}\binom{9}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 10 \times \frac{9 \times 8 \times 7}{6} \times 2 \times 2 \times 2 = 6720$$

۷ ـ گزینه ۳ برای محاسبه تعداد اعداد ۵ رقمی که حداقل یک رقم تکراری داشته باشند، تعداد اعداد ۵ رقمی که بدون تکرار ارقام هستند را از تعداد کل اعداد ۵ رقمی (با تکرار ارقام) کم کرد. داریم:

تعداد کل اعداد ۵ رقمی: $\underline{9} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{10} = 9 \times 10^4 = 90000$

تعداد اعداد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام: $\underline{9} \times \underline{9} \times \underline{8} \times \underline{7} \times \underline{6} = 27216$

$$90000 - 27216 = 62784$$

۸ ـ گزینه ۴ راه اول: دقیقا یک مهره سبز و حداقل یک مهره زرد یعنی (یک مهره سبز و یک مهره زرد و ۲ مهره قرمز) یا (یک مهره سبز و ۲ مهره زرد و ۱ مهره قرمز)

$$\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}\times\binom{5}{2}+\binom{3}{1}\times\binom{2}{2}\times\binom{5}{1}=3\times2\times\frac{5\times4}{2}+3\times1\times5=60+15=75$$

راه حل دوم:

ابتدا کل حالاتی که دقیقا یک مهره‌ی سبز داشته باشیم را حساب می‌کنیم:

مهرهٔ سبزه: $\binom{3}{1}\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times3=105$

حال از این تعداد به روش متمم تعداد حالاتی که مهرهٔ زرد نداشته باشیم را کم می‌کنیم:

۱ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ قرمز: $\binom{3}{1}\binom{5}{3}=3\times10=30$

حالا مقدار فوق را از کل حالات کم می‌کنیم:

حالت $105-30=75$

۹ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

ابتدا تعداد رنگ‌های جدید که از ۶ رنگ اولیه بدست می‌آیند را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=\frac{6\times5\times4}{6}+\frac{6\times5}{2}+6+1=42$$

حال ۳ رنگ از این ۴۲ رنگ انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{42}{3}=\frac{42\times41\times40}{6}=11480$$

۱۰ ـ گزینه ۲ در یکی از کاراکترهای (اول یا دوم یا سوم) عدد قرار می‌دهیم که ۴ حالت دارد.

در کاراکتر دیگر می‌توانند حرف یا نماد باشند که هر کدام ۸ حالت دارند.

با توجه به جایگاه عدد، ۳ حالت مختلف می‌توانیم داشته باشیم. داریم:

$$\underset{\text{جایگاه عدد}}{\underset{\downarrow}{3}}\times\overset{\text{عدد}}{\overset{\uparrow}{4}}\times\underbrace{8\times8}_{\text{نماد یا حرف}}=768$$

۱۱ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l}\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\\ \binom{n}{n-1}=n\end{array}}$

حداقل ۸ شاخه یعنی ۸ یا ۹ یا ۱۰ شاخه

$$\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}=\frac{10\times9}{2}+10+1=45+10+1=56$$

۱۲ ـ گزینه ۳ ابتدا ۴ جای خالی از ۶ جای خالی صف را انتخاب می‌کنیم که این عمل $\binom{6}{4}$ حالت دارد (در شکل زیر فقط یک حالت از آن‌ها نشان داده شده است.) پس:

a، b، e و f را به ۴ حالت در ۴ جای خالی انتخاب شده قرار می‌دهیم.

$\boxed{e}-\boxed{f}-\boxed{a}\boxed{b}$

$\boxed{e}-\boxed{f}-\boxed{b}\boxed{a}$

$\boxed{f}-\boxed{e}-\boxed{a}\boxed{b}$

$\boxed{f}-\boxed{e}-\boxed{b}\boxed{a}$

سپس c و d را به $2!$ حالت در خانه‌های باقی‌مانده قرار می‌دهیم.

پس در کل حالات برابر است با:

$$\binom{6}{4}\times4\times2!=\frac{6!}{4!\times2!}\times4\times2!=15\times4\times2=120$$

۱۳ ـ گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}}$

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3}+\cdots+\binom{14}{10}-\binom{5}{0}$$
$$=\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3}+\cdots+\binom{14}{10}-\binom{5}{0}$$
$$=\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\cdots+\binom{14}{10}-\binom{5}{0}$$
$$\vdots$$

$$= \binom{۱۴}{۹} + \binom{۱۴}{۱۰} - \binom{۵}{۰} = \binom{۱۵}{۱۰} - \binom{۵}{۰} = \frac{۱۵!}{۱۰!۵!} - ۱ = ۳۰۰۳ - ۱ = ۳۰۰۲$$

۱۴ – گزینه ۱ می‌دانیم: تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز برابر است با $n!$

حروف کلمهٔ «سلام» را یک بسته در نظر گرفته و به همراه دو حرف دیگر جایگشت ۳ حرف را محاسبه می‌کنیم که برابر است با $۳!$

۱۵ – گزینه ۱ می‌دانیم: انتخاب r شئ از n شئ متمایز که ترکیب انتخاب مهم نیست یک ترکیب rتایی از n شئ متمایز نامیده می‌شود و داریم $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{دسته‌گل‌های} \\ \text{۳ تایی}}}{\binom{۱۰}{۳}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{دسته‌گل‌های} \\ \text{۴ تایی}}}{\binom{۱۰}{۴}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{دسته‌گل‌های} \\ \text{۵ تایی}}}{\binom{۱۰}{۵}} = \frac{۱۰!}{۷!۳!} + \frac{۱۰!}{۶!۴!} + \frac{۱۰!}{۵!۵!} = ۱۲۰ + ۲۱۰ + ۲۵۲ = ۵۸۲$$

۱۶ – گزینه ۲ می‌دانیم: انتخاب r شئ از n شئ متمایز که ترکیب انتخاب مهم نیست یک ترکیب rتایی از n شئ متمایز نامیده می‌شود و داریم $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

ابتدا ۳ رشته از ۴ رشته را انتخاب می‌کنیم و سپس از هر رشته یک دبیر:

$$\binom{۴}{۳} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۴ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۱۰۸$$

۱۷ – گزینه ۳ برای هر سؤال دو حالت وجود دارد، پس داریم:

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵ = ۳۲$$

۱۸ – گزینه ۳ ارقام ۱ تا ۹ را درنظر می‌گیریم.

$$\underbrace{\boxed{۹}\boxed{۹}\boxed{۹}}_{\substack{\downarrow \\ \text{اعداد}}} \; \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{\downarrow \\ \text{حرف}}} \Rightarrow ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۵ = ۳۶۴۵$$

۱۹ – گزینه ۳ برای کاغذ دور گل ۴ حالت و برای برگ تزئینی کنار آن ۳ حالت در اختیار داریم و چون می‌خواهیم روبان صورتی باشد حالت‌های دیگر (زرد و قرمز) محاسبه نمی‌شوند. بنابراین خواهیم داشت: $۴ \times ۳ \times ۱ = ۱۲$

۲۰ – گزینه ۱

$$\frac{n!\,(n-۳)!}{(n-۲)!\,(n-۱)!} = \frac{۳}{۲} = \frac{n(n-۱)! \times (n-۳)!}{(n-۲)(n-۳)! \times (n-۱)!} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{n}{n-۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۳n - ۶ = ۲n$$

$$\Rightarrow ۳n - ۲n = ۶ \Rightarrow n = ۶$$

۲۱ – گزینه ۳ چون عدد باید فرد باشد، در خانهٔ یکان یا ۵ یا ۷ قرار می‌گیرد، پس دو حالت داریم. در خانهٔ اول سمت چپ چون عدد باید از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید ۴ یا بیشتر از ۴ باشد که یکی از ارقام ۵ و ۷ را قبلاً انتخاب کردیم، پس ۳ حالت داریم یا ۸ یا ۴ یا یکی از ۵ و ۷ (۲ و صفر نمی‌تواند در خانهٔ اول باشد.)

برای خانهٔ دوم از سمت چپ، چون از ۶ تا رقم دو رقم استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای خانهٔ سوم از سمت چپ به همین ترتیب ۳ رقم باقی می‌ماند.

$$\boxed{۳}\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۲} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

۲۲ – گزینه ۲ کلیهٔ اعداد ۳ رقمی زوج با ارقام غیرتکراری که یکان صفر باشد، برابر است با:

$$\boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{صفر قرار دارد.}}}{\boxed{۱}} = ۲۰$$

کلیهٔ اعداد ۳ رقمی زوج با ارقام غیرتکراری که یکان دو باشد برابر است با: (رقم صدگان صفر نمی‌تواند باشد.)

$$\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۱} = ۱۶$$

بنابراین $۲۰ + ۱۶ = ۳۶$ عدد وجود دارد.

۲۳ – گزینه ۳ از روش متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا تعداد کل حالات اعداد ۵ رقمی را می‌یابیم و سپس تعداد حالت‌هایی را که دو رقم فرد کنار هم باشند را از آن کم می‌کنیم:

تعداد کل حالات عدد ۵ رقمی با ارقام داده شده $= ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

تعداد اعداد پنج رقمی وقتی دو رقم فرد کنار هم باشند: $\underbrace{۲, ۴, ۸, \boxed{۳, ۷}}_{\text{۴ شئ}} = ۴! \times ۲! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ \times ۱ = ۴۸$

تعداد حالات مطلوب $= ۱۲۰ - ۴۸ = ۷۲$

۲۴ – گزینه ۳ معلمین و معاونین به ترتیب به $۳!$ و $۲!$ حالت می‌توانند در کنار هم جایگشت داشته باشند. از طرفی معلمین می‌توانند در ابتدا قرار گیرند و معاونین به دنبال آن‌ها و برعکس، پس در دو حالت نیز ترتیب آن‌ها را داریم؛ بنابراین خواهیم داشت:

تعداد کل حالات $= ۲ \times ۳! \times ۲! = ۲ \times (۳ \times ۲ \times ۱) \times (۲ \times ۱) = ۲۴$

۲۵ – گزینه ۳ چون ۲ حرف A باید موجود باشد، پس ۳ حرف دیگر از بین ۶ حرف باقی مانده «K, H, R, Z, M, I» باید انتخاب شود که این کار به طریق زیر امکان‌پذیر است.

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳! \times ۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳!} = ۲۰$$

از طرفی باید ۵ حرف انتخاب شده کنار هم قرار گیرند و یک جایگشت بسازند و چون حرف A دو بار تکرار شده پس تعداد جایگشت‌ها برابر است با $۶۰ = \frac{۱۲۰}{۲} = \frac{۵!}{۲!}$، بنابراین طبق اصل شمارش تعداد کلمه‌های مورد نظر برابر است با:

$$۲۰ \times ۶۰ = ۱۲۰۰$$

۲۶ - گزینه ۱ دو رقم یکسان ۲ و سه رقم یکسان ۳ را هر کدام در یک بسته قرار می‌دهیم و با هر بسته مثل یک رقم برخورد می‌کنیم.

$$۲۳۱۲۳۶۳۹ \Rightarrow \boxed{۲۲}\boxed{۳۳۳}۱۶۹$$

پس ۵ شیء متمایز داریم و تعداد جایگشت‌های این ۵ شیء عبارت است از:

$$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

۲۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l} \binom{n}{۳} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶} \\ (n+۲)! = (n+۲)(n+۱)n! \end{array}}$

$$(n+۲)! = (n+۲)(n+۱)n! = ۴۲n! \Rightarrow (n+۲)(n+۱) = ۴۲ = ۷ \times ۶ \Rightarrow n = ۵$$

$$\binom{n+۲}{n-۲} = \binom{۵+۲}{۵-۲} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} = ۳۵$$

۲۸ - گزینه ۲ رقم یکام باید صفر یا ۵ باشد، ۲ حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اوّل: یکان صفر

$$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underset{۰}{\underline{۱}} = ۱۲$$

حالت دوّم: یکان ۵

$$\underline{۳} \times \underline{۳} \times \underset{۵}{\underline{۱}} = ۹$$

طبق اصل جمع $۱۲ + ۹ = ۲۱$ حالت داریم.

۲۹ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}}$

از بین بلندترین و کوتاه‌قدترین افراد تیم یک نفر و ۲ نفر دیگر را از بین سایر افراد باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۱۲}{۲} = ۲ \times \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۱۳۲$$

۳۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\text{تعداد جایگشت‌های } n \text{ شی متمایز برابر است با } n!}$

تعداد حالت‌هایی که P و A کنار هم باشند – تعداد کل حالت‌ها = تعداد حالت‌هایی که A و P کنار هم نباشند

P و A را یک حرف در نظر می‌گیریم و جایگشت ۵ حرف را در نظر می‌گیریم که برابر است با $۵!$

خود P و A هم به ۲ حالت کنار هم قرار می‌گیرند بنابراین تعداد حالت‌هایی که P و A کنار هم باشند $۲ \times ۵!$ است

$$۶! - ۵! \times ۲ = ۷۲۰ - ۱۲۰ \times ۲ = ۷۲۰ - ۲۴۰ = ۴۸۰$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۶	۳	۱۱	۳	۱۶	۲	۲۱	۳	۲۶	۱
۲	۲	۷	۳	۱۲	۳	۱۷	۳	۲۲	۲	۲۷	۳
۳	۱	۸	۴	۱۳	۳	۱۸	۳	۲۳	۳	۲۸	۲
۴	۱	۹	۳	۱۴	۱	۱۹	۳	۲۴	۳	۲۹	۲
۵	۲	۱۰	۲	۱۵	۱	۲۰	۱	۲۵	۳	۳۰	۳