نام آزمون: شمارش بدون شمردن

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - با حروف کلمه‌ی $RANGIN$، چند کلمه‌ی رمز ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

(۱) ۶۰

(۲) ۷۲

(۳) ۸۴

(۴) ۱۲۰

۲ - تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی از حروف کلمه $SALAMAT$ که دو حرف آن A باشد، کدام است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۳۶

(۳) ۵۶

(۴) ۷۲

۳ - تعداد جایگشت‌های سه حرفی انتخاب‌شده از حروف کلمهٔ $DELAVAR$ کدام است؟

(۱) ۱۱۵

(۲) ۱۲۵

(۳) ۱۳۰

(۴) ۱۳۵

۴ - تعداد ترتیب‌های مختلف حروف کدام یک از واژه‌ها، متفاوت با واژه‌های دیگر است؟

(۱) مازیار

(۲) کیانوش

(۳) شهریار

(۴) خشایار

۵ - حروف کلمهٔ $severe$ را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار دارد، به طوری که eها یک‌درمیان باشند؟

(۱) ۶

(۲) ۳۶

(۳) ۱۲

(۴) ۲۴

۶ - با حروف کلمهٔ «خوارزمی» چند کلمهٔ ۵حرفی و بدون توجه به معنا می توان نوشت که فقط ۲ نقطه داشته باشد؟

(۱) ۷۲۰

(۲) ۷۴۴

(۳) ۶۲۴

(۴) ۴۸۰

۷ - به چند طریق می‌توان رئوس یک چهارضلعی را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند؟

(۱) ۳۶

(۲) ۱۲

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴

۸ - در یک کشور نوعی اتومبیل در ۳ مدل، ۵ رنگ و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود. چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

(۱) ۱۰

(۲) ۲۰

(۳) ۳۰

(۴) ۴۰

۹ - زهرا می‌خواهد برای تولد دوستش یک روان‌نویس یا یک کتاب شعر و یا یک قاب هدیه بخرد. در مغازه‌ای که وارد شده است ۶ مدل روان‌نویس، ۷ کتاب شعر متفاوت و ۳ مدل قاب وجود دارد. چند انتخاب برای خرید کادو وجود دارد؟

(۱) ۱۶

(۲) ۱۲۶

(۳) !۱۶

(۴) $P(۱۶,۳)$

۱۰ – یک مربی فوتبال به چند طریق می‌تواند از بین شش بازیکن دفاعی که در تمامی پست‌های دفاعی می‌توانند بازی کنند، ۴ بازیکن را برای بازی در چهار پست مختلف دفاع انتخاب کند؟

(۱) ۱۸۰
(۲) ۳۶۰
(۳) ۱۲۰
(۴) ۳۰

۱۱ – چند عدد ۳ رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

(۱) ۱۲۰
(۲) ۱۸۰
(۳) ۱۷۰
(۴) ۱۶۰

۱۲ – با حروف کلمه‌ی «گل پیرا» بدون تکرار حروف چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آن دو حرف «پ» و «ر» کنار هم نیامده باشند؟

(۱) ۳۶۰
(۲) ۲۴۰
(۳) ۷۲۰
(۴) ۴۸۰

۱۳ – تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ دادن به تعدادی سوال دو گزینه‌ای برابر $۸۱^{۵}$ است. تعداد سوالات کدام است؟ (پاسخ دادن به سوالات اجباری نیست.)

(۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۵
(۴) ۱۵

۱۴ - با ارقام $\{۱,۲,۳,۴,۵,۸\}$ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام متمایز که دهگانی بزرگ‌تر از یکان دارند می‌توان نوشت؟

① ۲۴
② ۶۰
③ ۷۸
④ ۷۲

۱۵ - از مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند تابع می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب $(a,۱)$ باشد ولی شامل زوج مرتب $(b,۲)$ نباشد؟

① ۱۰۰
② ۱۲۵
③ ۱۵۰
④ ۱۷۵

۱۶ - سه برادر و سه خواهر به چند طریق می‌توانند عکس یادگاری بگیرند، به طوری که خواهرها همواره کنار هم باشند؟

① ۳۶
② ۷۲
③ ۱۴۴
④ ۷۲۰

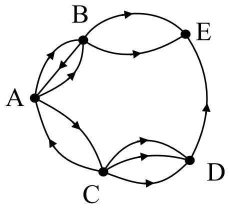
۱۷ - با حروف کلمهٔ «یکسان» چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان ساخت به طوری که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

① ۲۴
② ۴۸
③ ۷۲
④ ۱۲

۱۸ - اگر $P(n,r)$ و $C(n,r)$ به ترتیب تعداد جایگشت‌ها و ترکیب‌های r تایی از n شی متمایز باشند، مقدار $\dfrac{P(n,r)}{C(n,r)}$ همواره برابر کدام است؟

① $n!$
② $r!$
③ $(n-r)!$
④ $(n-r-۱)!$

۱۹ - اگر همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رسید؟ (از هر شهر فقط یک‌بار می‌توان عبور کرد.)



(۱) ۱۴
(۲) ۱۱
(۳) ۷
(۴) ۱۰

۲۰ - با ارقام ۳, ۷, ۴, ۲, ۰ چند عدد زوج سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

(۱) ۱۲
(۲) ۳۶
(۳) ۱۸
(۴) ۳۰

۲۱ - چند عدد ۴ رقمی با ارقام غیرتکراری وجود دارد، به طوری که بین ارقام این عدد، نامساوی «یکان < دهگان < صدگان < هزارگان» برقرار باشد؟

(۱) ۷۲
(۲) ۱۱۲
(۳) ۲۱۰
(۴) ۲۸۰

۲۲ - رمز یک دستگاه از یک رقم و یک حرف الفبای فارسی تشکیل شده است. تعداد حالت‌های ممکن برای این رمز کدام است؟

(۱) ۳۲۰
(۲) ۶۴۰
(۳) ۱۶۰
(۴) ۸۰

۲۳ - تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ ۸ عضوی A به طوری که فاقد b باشد و a و c همراه هم نیایند، کدام است؟

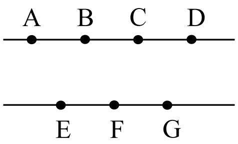
$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

(۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۵
(۴) ۶

۲۴ - از میان ۵ نفر کلاس اولی، ۷ نفر کلاس دومی و ۶ نفر کلاس سومی به چند طریق می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که هم‌کلاسی باشند؟

① ۱۰
② ۳۵
③ ۴۵
④ ۶۵

۲۵ - هفت نقطهٔ A ، B، C، D، E، F و G به صورت زیر روی دو خط موازی قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شوند؟



① ۲۴
② ۳۰
③ ۳۶
④ ۳۵

۲۶ - اگر $C(n+3,3)=5P(n+2,2)$، در این صورت n کدام است؟

① ۲۷
② ۳
③ ۶
④ ۳۳

۲۷ - رمزی از سه رقم تشکیل شده است. اگر ارقام زوج کنار هم نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن است؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

① ۱۰۰
② ۳۰۰
③ ۴۶۰
④ ۴۰۰

۲۸ - یک آزمون شامل ۲ سوال ۴ گزینه‌ای و ۴ سوال ۲ گزینه‌ای است. فردی قصد دارد به صورت تصادفی به سوالات جواب دهد. اگر بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد، او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد؟

① ۲۶۵
② ۲۰۵۰
③ ۲۵۶
④ ۲۰۲۵

۲۹ - با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

(۱) ۶۰

(۲) ۹۶

(۳) ۱۵۶

(۴) ۲۵۰

۳۰- در کیسه‌ای ۶ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سبز قرار دارد. اگر سه مهره به تصادف خارج کنیم، در چند حالت امکان دارد ۳ مهره همرنگ باشند؟

(۱) ۲۰

(۲) ۲۴

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ چون کلمه‌ی $RANGIN$ دارای ۲ حرف تکراری N است، پس برای ساختن رمزهای ۳ حرفی حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) شامل حرف N نباشد: بنابراین ۳ حرف را از بین حروف $\{R, A, G, I\}$ انتخاب کرده و جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{۴}{۳} \times ۳! = ۴ \times ۶ = ۲۴$$

ب) شامل یک حرف N باشد: بنابراین ۲ حرف دیگر را از بین حروف $\{R, A, G, I\}$ انتخاب و جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{۴}{۲} \times ۳! = \frac{۴ \times ۳}{۲} \times ۶ = ۳۶$$

ج) شامل دو حرف N باشد: بنابراین حرف سوم را از بین حروف $\{R, A, G, I\}$ انتخاب و با دو حرف تکراری N جایگشت می‌دهیم:

چون جابه‌جایی Nها بی‌تأثیر است حالت‌ها را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم.

$$\binom{۴}{۱} \times \frac{۳!}{۲} = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

در نهایت طبق اصل جمع داریم: $\text{تعداد کل رمزها} = ۲۴ + ۳۶ + ۱۲ = ۷۲$

۲ - گزینه ۴ وجود ۲ حرف A قطعی است. پس برای کلمهٔ ۴ حرفی ۲ حرف دیگر لازم داریم که آنها را از بین بقیهٔ حروف، به‌جز A یعنی T و M و L و S انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴ \times ۳}{۲} = ۶$$

حالا ۴ حرف داریم که دو تای آنها (دو تا A) تکراری است. که جایگشت ۴ حرف دارای ۲ حرف تکراری به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{۴!}{۲!} = \frac{۴ \times ۳ \times ۲}{۲} = ۱۲$$

پس کل جایگشت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با:

$$۶ \times ۱۲ = ۷۲$$

۳ - گزینه ۴ در بین حروف کلمهٔ $DELAVAR$ دو حرف تکراری A داریم. بنابراین مسأله را در سه حالت مختلف زیر حل می‌کنیم:

حالت اول: ابتدا سه حرف از بین تمام حروف (به‌جز A) را انتخاب کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم:

$D\,,\,E\,,\,L\,,\,V\,,\,R\,\rightarrow$ انتخاب ۳ حرف از بین ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز : $\binom{۵}{۳} \times \overbrace{۳!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$

حالت دوم: در این مرحله یکی از حروف A و دو حرف دیگر از حروف غیر A را انتخاب و باز جایگشت آنها را محاسبه می‌کنیم:

انتخاب ۲ حرف از ۵ حرف و جایگشت سه حرف متمایز : $\binom{۵}{۲} \times \overbrace{۳!}^{\text{جایگشت ۳ حرف متمایز}} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$

حالت سوم: در این مرحله دو حرف A و یک حرف از حروف غیر A را انتخاب می‌کنیم و باز هم جایگشت آنها (که این بار حرف تکراری هم دارد) حساب می‌کنیم:

انتخاب ۱ حرف از ۵ حرف و جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان : $\binom{۵}{۱} = ۵ \times \overbrace{\frac{۳!}{۲!}}^{\text{جایگشت ۳ حرف با ۲ حرف تکراری یکسان}} = ۵ \times ۳ = ۱۵$

بنابراین مجموع حالات برابر است با:

$$۶۰ + ۶۰ + ۱۵ = ۱۳۵$$

۴ - گزینه ۲ کلمهٔ کیانوش ۶ حرف متمایز دارد و تعداد ترتیب‌های آن برابر $۶!$ است.

اما سه کلمهٔ دیگر ۶ حرفی هستند که ۲ حرف تکراری دارند بنابراین تعداد ترتیب‌های آن $\frac{۶!}{۲!}$ است.

۵ - گزینه ۳ eها می‌توانند در خانه‌های اول، سوم و پنجم یا در خانه‌های دوم، چهارم و ششم قرار گیرند و حروف دیگر (s, v, r) در خانه‌های باقی‌مانده قرار می‌گیرند. (جابه‌جایی حروف e با خودشان جایگشت جدیدی به‌وجود نمی‌آورند.)

$$\left.\begin{array}{l} \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underline{۳}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underline{۲}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underline{۱} = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \\ \underline{۳}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underline{۲}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underline{۱}\ \underset{e}{\underline{\ \ }} = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow ۶ + ۶ = ۱۲$$

۶ - گزینه ۱ دقت کنید که حرف «ی» اگر در آخر کلمه بیاید، نقطه ندارد و در غیر این‌صورت ۲ نقطه دارد.

حالات ممکن:

- «ز»,«خ» باشند و «ی» نباشد: $\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{انتخاب 3 حرف از 4 حرف باقی مانده}} \times \overbrace{5\,!}^{\text{چیدن 5 حرف}} = 4\times 120 = 480$
- «ز» , «خ» باشند و «ی» حرف آخر باشد: $\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{انتخاب 2 حرف از 4 حرف باقی مانده}} \times \overbrace{4\,!}^{\text{چیدن همه جز «ی»}} = 6\times 4\,! = 144$
- «ز» , «خ» باشند و «ی» باشد و حرف آخر هم نباشد: جایگشت 5 حرف باقی مانده ـ حالاتی که «ی» در آخر است $= 5\,! - 4\,! = 96$

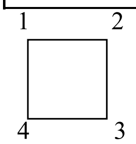
$\Rightarrow$ مجموع $= ۴۸۰ + ۱۴۴ + ۹۶ = ۷۲۰$

۷ ـ گزینه ۳

می‌دانیم:

اگر کاری در دو مرحله انجام بگیرد به‌طوریکه در مرحلهٔ اول m روش و در مرحلهٔ دوم n روش داشته باشد بنابر اصل ضرب، کل کار مورد نظر به $m\times n$ روش قابل انجام است.   اگر کاری را بتوان به یکی از دو روش انجام داد که روش اول m حالت و روش دوم n حالت داشته باشد انجام کل کار مورد نظر بنابر اصل جمع $m+n$ حالت دارد.

چهارضلعی مقابل را در نظر بگیرید.



رأس اول را به ۳ طریق می‌توان رنگ کرد

رأس دوم نباید با رأس اول همرنگ باشد. بنابراین به ۲ طریق قابل رنگ است.

رأس سوم نباید با رأس دوم همرنگ باشد و می‌تواند با رأس اول همرنگ باشد یا نباشد.

رأس چهارم اگر رئوس اول و سوم همرنگ باشند، به ۲ طریق و اگر رئوس اول و سوم همرنگ نباشند به ۱ طریق قابل رنگ است.

بنابراین طبق اصول ضرب و جمع داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{راس اول و سوم همرنگ}: & ۳\times۲\times۱\times۲=۱۲\\ \text{راس اول و سوم ناهمرنگ}: & ۳\times۲\times۱\times۱=۶\end{array}\right\}\Rightarrow ۶+۱۲=۱۸$$

۸ ـ گزینه ۳

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله انجام شود که مرحله‌ی اول آن به m راه و مرحله دوم آن عمل به n راه قابل انجام باشد آن عمل به $m\times n$ راه قابل انجام خواهد بود.

$$\text{تعداد نوع‌ها} = \underset{\text{مدل‌ها}}{۳}\times\overset{\text{رنگ‌ها}}{۵}\times\underset{\text{نوع و دنده}}{۲}=۳۰$$

۹ ـ گزینه ۱

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به گونه‌ای که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ انتخاب وجود خواهد داشت.

تعداد انتخاب‌ها $= ۶+۷+۳=۱۶$

۱۰ ـ گزینه ۲

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز عبارتست از: $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۶\times۵\times۴\times۳=۳۶۰$$

۱۱ ـ گزینه ۲ تمامی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ که یکان آن صفر می‌باشد:

$$\underset{\text{صدگان}}{\boxed{۹}}\quad\underset{\text{دهگان}}{\boxed{۱۰}}\quad\underset{\text{یکان}}{\boxed{۱}}=۹\times۱۰\times۱=۹۰$$

تمامی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ که یکان آن‌ها رقم ۵ می‌باشد:

$$\underset{\text{صدگان}}{\boxed{۹}}\quad\underset{\text{دهگان}}{\boxed{۱۰}}\quad\underset{\text{یکان}}{\boxed{۱}}=۹\times۱۰\times۱=۹۰$$

کلیه‌ی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ $= ۹۰+۹۰=۱۸۰$

در جایگاه صدگان، صفر قرار نمی‌گیرد.

۱۲ ـ گزینه ۴ تعداد کل کلمات ۶ حرفی را بدست می‌آوریم و حالات قرار گرفتن "پ" و "ر" را از آن کم می‌کنیم:

تعداد کل $= 6! = 720$

حال حروف "پ" و "ر" به هم می‌بندیم و هر دو را به عنوان یک حرف در نظر می‌گیریم. این حرف جدید با حروف دیگر، ۵ شیء متمایز را تشکیل می‌دهند و می‌توانند به $5!$ حالت کنار یکدیگر واقع شوند. پس تعداد حالات تشکیل کلمات ۶ حرفی که در آن‌ها "پ" و "ر" در کنار هم باشند برابر است با:

$$5! \times \underset{\text{جایگشت دو حرف پ و ر}}{\underset{\downarrow}{2!}} = 240$$

و پاسخ عبارتست از:

$$720 - 240 = 480$$

۱۳ - گزینه ۲

می‌دانیم:

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به‌طوری‌که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم،
کل کار موردنظر به $m + n$ حالت انجام‌پذیر است.
اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به‌طوری‌که در مرحلهٔ اول m حالت و در مرحلهٔ دوم n حالت داشته باشیم، کار موردنظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.

اگر تعداد سوالات را n فرض کنیم. هر سوال ۳ حالت پاسخ‌گویی دارد (گزینهٔ اول، گزینهٔ دوم، هیچ‌کدام)

بنابراین به 3^n حالت می‌توان به این سوالات پاسخ داد:

$$3^n = 81^5 = 3^n = (3^4)^5 \Rightarrow 3^n = 3^{20} \Rightarrow n = 20$$

۱۴ - گزینه ۴

می‌دانیم:

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به‌طوری‌که در روش اول m حالت و در روش دوم n حالت داشته باشیم،
کل کار موردنظر به $m + n$ حالت انجام‌پذیر است.
اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به‌طوری‌که در مرحلهٔ اول m حالت و در مرحلهٔ دوم n حالت داشته باشیم،
کار موردنظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.

حالت اول: اگر ۲ یکان باشد:

$$\frac{4}{\,} \times \frac{3}{\,} \times \frac{4}{\begin{smallmatrix}3\\4\\5\\8\end{smallmatrix}} \times \frac{1}{2} = 48$$

حالت دوم: اگر ۴ یکان باشد:

$$\frac{4}{\,} \times \frac{3}{\,} \times \frac{2}{\begin{smallmatrix}5\\8\end{smallmatrix}} \times \frac{1}{4} = 24$$

حالت سوم: اگر یکان ۸ باشد عددی بزرگ‌تر از ۸ نیست پس دهگانی نداریم پس این حالت اتفاق نمی‌افتد.

بنابر اصل جمع برای کل کار موردنظر $48 + 24 = 72$ حالت داریم.

۱۵ - گزینه ۱

می‌دانیم:

اگر کاری دارای شامل ۲ مرحله باشد به‌طوری‌که در مرحلهٔ اول m حالت و در مرحلهٔ دوم n حالت داشته باشیم، کار موردنظر به $m \times n$ حالت قابل انجام است.
رابطه‌ای تابع است که به ازای هر x تنها یک y داشته باشیم.

مؤلفهٔ اول	مؤلفهٔ دوم	تعداد حالت‌ها
a	۱	۱
b	۱, ۳, ۴, ۵	۴
c	۱, ۲, ۳, ۴, ۵	۵
d	۱, ۲, ۳, ۴, ۵	۵

بنابر اصل ضرب:

تعداد حالت‌های ممکن: $5 \times 5 \times 4 = 100$

۱۶ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\text{تعداد جایگشت‌های } n \text{ شی متمایز برابر است با } n!}$

۳ خواهر را یک نفر در نظر می‌گیریم که به همراه ۳ برادر به $4!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند.

خود ۳ خواهر نیز به $3!$ حالت در کنار هم قرار می‌گیرند.

بنابر اصل ضرب در مجموع $4! \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ حالت داریم.

۱۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\text{تعداد جایگشت‌های } n \text{ شی متمایز برابر است با } n!}$

برای حرف اول ۲ انتخاب داریم (ی و ن) که به‌ازای هر انتخاب، ۴ حرف دیگر به $!۴$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند بنابراین در مجموع $۲ \times ۴! = ۲ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۴۸$ حالت داریم.

۱۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l} P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!} \\ C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} \end{array}}$

$$\frac{P(n,r)}{C(n,r)} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{n!}{(n-r)!r!}} = \frac{۱}{\frac{۱}{r!}} = r!$$

۱۹ - گزینه ۳

$$A \begin{cases} \xrightarrow{۲} B \xrightarrow{۲} E \\ \text{یا} \\ \xrightarrow{۱} C \xrightarrow{۳} D \xrightarrow{۱} E \end{cases} \Rightarrow ۲ \times ۲ + ۱ \times ۳ \times ۱ = ۴ + ۳ = ۷$$

۲۰ - گزینه ۴ چون عدد مورد نظر باید زوج باشد و صفر نیز در بین ارقام است. بنابراین دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اوّل: یکان صفر

$$\underline{۴}, \underline{۳}, \underset{۰}{\underline{۱}} \Rightarrow ۴ \times ۳ = ۱۲$$

حالت دوم: یکان ۲ یا ۴

$$\underline{۳}, \underline{۳}, \underset{\substack{۲ \\ ۴}}{\underline{۲}} \Rightarrow ۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$$

در کل طبق اصل جمع $۱۲ + ۱۸ = ۳۰$ حالت داریم.

۲۱ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}}$

ابتدا ۴ رقم را انتخاب می‌کنیم که $\binom{۱۰}{۴}$ حالت دارند. سپس ۴ رقم انتخابی را از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم تا شرط موردنظر حاصل شود که تنها به یک حالت امکان‌پذیر است.

بنابراین کار موردنظر به $\binom{۱۰}{۴} = \dfrac{۱۰!}{۶!۴!} = \dfrac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶! \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۱۰$ حالت امکان‌پذیر است.

۲۲ - گزینه ۲ یک حرف و یک عدد انتخاب می‌کنیم و در کنار هم می‌گذاریم:

$$\overset{\substack{\text{رقم} \\ \uparrow}}{\binom{۱۰}{۱}} \times \overset{\substack{\text{حرف} \\ \uparrow}}{\binom{۳۲}{۱}} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{در کنار هم گذاشتن(عدد حرف، حرف عدد)}}}{۲} = ۱۰ \times ۳۲ \times ۲ = ۶۴۰$$

۲۳ - گزینه ۲ باید ۵ عضو از ۸ عضو انتخاب کنیم به طوری که:

الف) a باشد و c و b نباشند یعنی ۴ عضو از ۵ عضو یعنی $۵ = \binom{۵}{۴}$ حالت

ب) c باشد و b و a نباشند یعنی ۴ عضو از ۵ عضو یعنی $۵ = \binom{۵}{۴}$ حالت

ج) c و b و a نباشند یعنی ۵ عضو از ۵ عضو یعنی $۱ = \binom{۵}{۵}$

بنابر اصل جمع کل حالات برابر است با $۱۱ = ۱ + ۵ + ۵$

۲۴ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\binom{n}{۳} = \dfrac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}}$

هر ۳ نفر کلاس اول یا دوم یا سوم باشند:

$$\overset{\substack{\text{اول} \\ \uparrow}}{\binom{۵}{۳}} + \overset{\substack{\text{دوم} \\ \uparrow}}{\binom{۷}{۳}} + \overset{\substack{\text{سوم} \\ \uparrow}}{\binom{۶}{۳}} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{۶} + \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} + \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶} = ۱۰ + ۲۰ + ۳۵ = ۶۵$$

۲۵ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\binom{n}{۳} = \dfrac{n(n-۱)}{۶}}$

برای تشکیل مثلث باید ۳ نقطه انتخاب کنیم بطوریکه هر ۳ روی یک خط نباشند بنابراین باید ۲ نقطه از خط بالا و یک نقطه از خط پایین یا یک نقطه از خط بالا و ۲ نقطه از خط پایین انتخاب کنیم.

داریم:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}\times ۳+۴\times\frac{۳\times ۲}{۲}=۱۸+۱۲=۳۰$$

۲۶ – گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l} P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!} \\ C(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!r!} \end{array}}$

$$C(n+۳,۳)=۵P(n+۲,۲)$$

$$\frac{(n+۳)!}{(n+۳-۳)!۳!}=۵\frac{(n+۲)!}{(n+۲-۲)!}$$

$$\frac{(n+۳)!}{n!۳!}=۵\frac{(n+۲)!}{n!}$$

$$\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)n!}{n!\times ۳\times ۲\times ۱}=۵\frac{(n+۲)(n+۱)n!}{n!}$$

$$\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{۶}=۵(n+۲)(n+۱)\Rightarrow\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{(n+۲)(n+۱)}=۶\times ۵$$

$$\Rightarrow n+۳=۳۰\Rightarrow n=۲۷$$

۲۷ – گزینه ۳ رمز ۳ رقم دارد که می‌تواند ۱ رقم یا ۲ رقم زوج باشند و کنار هم قرار نگیرند یا تمام ارقام فرد باشند.

بنابراین:

$I)$ ۱ رقم زوج : $\underset{\text{رقم زوج (ارقام دوم)}}{۵}\times\underbrace{۵\times ۴}_{\text{رقم فرد}}\times\overset{\text{جایگاه رقم زوج (اول، دوم، سوم)}}{۳}=۳۰۰$

$II)$ ۲رقم زوج : $\underset{\text{رقم فرد}}{۵}\times\underbrace{۵\times ۴}_{\text{رقم زوج (ارقام اول و سوم)}}=۱۰۰$

$III)$ ۳ رقم فرد : $۵\times ۴\times ۳=۶۰$

بنابر اصل جمع $۳۰۰+۱۰۰+۶۰=۴۶۰$ حالت داریم

۲۸ – گزینه ۴ برای سؤال ۴ گزینه‌ای هر کدام ۵ حالت (یکی از ۴ گزینه یا بدون پاسخ گذاشتن سؤال) و برای ۴ سؤال ۲ گزینه‌ای هر کدام ۳ حالت (یکی از دو گزینه یا بدون پاسخ گذاشتن سؤال) داریم.

بنابراین برای کل آزمون $۳^۴\times ۵^۲$ حالت داریم.

$$۵^۲\times ۳^۴=۲۵\times ۸۱=۲۰۲۵$$

۲۹ – گزینه ۳ چون عدد موردنظر باید زوج باشد و صفر هم در بین ارقام است، بنابراین دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: یکان صفر

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underset{۰}{\underline{۱}}=۶۰$$

حالت دوّم: یکان ۲ یا ۴

$$\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underset{\substack{۲\\۴}}{\underline{۲}}=۹۶$$

در کل طبق اصل جمع $۶۰+۹۶=۱۵۶$ حالت برای عدد موردنظر داریم

۳۰ – گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\binom{n}{۳}=\dfrac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}}$

۳ مهره قرمز باشند یا ۳ مهره سبز باشند

$$\binom{۶}{۳}+\binom{۴}{۳}=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۶}+\frac{۴\times ۳\times ۲}{۶}=۲۰+۴=۲۴$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۲	۶	۱	۱۱	۲	۱۶	۳	۲۱	۳	۲۶	۱
۲	۴	۷	۳	۱۲	۴	۱۷	۲	۲۲	۲	۲۷	۳
۳	۴	۸	۳	۱۳	۲	۱۸	۲	۲۳	۲	۲۸	۴
۴	۲	۹	۱	۱۴	۴	۱۹	۳	۲۴	۴	۲۹	۳
۵	۳	۱۰	۲	۱۵	۱	۲۰	۴	۲۵	۲	۳۰	۲