نام آزمون: تابع

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- اگر مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۱۶\}$ برد تابع $f(x)=(a^۲+b)x^۲+(b^۲+c)x+c^۲$ و مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دامنهٔ آن باشد، حاصل $b+c$ کدام است؟

① ۲

② -۲

③ ۶

④ -۶

۲- اگر f تابع همانی، g تابع ثابت و $\frac{g(۵)f(۵)}{f(۵)+g(۵)}=۱$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{f(۴)+g(۴)}{g(۴)+۱}$ کدام است؟

① $\frac{۳}{۷}$

② $\frac{۷}{۳}$

③ $\frac{۷}{۲}$

④ $\frac{۲}{۷}$

۳- برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & , x\leq -۱ \\ x^۲ & , -۱<x<۱ \\ x+۱ & , x\geq ۱ \end{cases}$ کدام است؟

① $[۰,۱)\cup[۲,+\infty)$

② $(-\infty,-۱)\cup[۲,+\infty)$

③ $(-\infty,۲]$

④ $(-۱,۱)\cup[۲,+\infty)$

۴- اگر $f=\{(۲,a),(b-۱,۳),(c,a-۱)\}$ تابع همانی و a، b و c ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، قدرمطلق تفاضل ریشه های معادلهٔ درجه دوم کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) $\sqrt{۲}$

(۴) $۲\sqrt{۲}$

۵- مساحت محدود به نمودار $f(x)=۲-|x-۲|$ و محور طول‌ها کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۶

(۴) ۳۲

۶- اگر $f=\{(۲,۳a+۵),(a+b,۲b)\}$ تابعی همانی باشد، مقدار ab کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) -۲

۷- دامنهٔ تابع خطی f بازهٔ $[۰,۲]$ و برد آن بازهٔ $[-۲,۱]$ است. مقدار $f(\frac{۲}{۳})$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) $-\frac{۱}{۲}$

(۴) ۲

۸ - چند مورد از رابطه‌های زیر، لزوماً بیانگر یک تابع است؟

الف) رابطه‌ای که به هر شخص، سال تولد او را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر شخص، رنگ‌های مورد علاقهٔ او را نسبت می‌دهد.

پ) رابطه‌ای که به هر استان، مرکز آن را نسبت می‌دهد.

ت) رابطه‌ای که به هر دایره، مساحت آن را نسبت می‌دهد.

① ۴

② ۳

③ ۲

④ ۱

۹ - طول یک مستطیل ۵ واحد بیشتر از عرض آن است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر، مساحت این مستطیل را برحسب طول آن نمایش می‌دهد؟

① $f(x)=۴x-۱۰$

② $f(x)=۴x+۱۰$

③ $f(x)=x^۲-۵x$

④ $f(x)=x^۲+۵x$

۱۰ - برای تابع خطی f می‌دانیم: $f(۱)-f(۰)=۳$. مقدار $f(-۱)-f(۱)$ کدام است؟

① ۳

② -۳

③ ۶

④ -۶

۱۱ - به‌ازای کدام مقادیر m، مجموعهٔ $\{(۵,۲m+۱),(۵,m^۲),(۱,۷),(m-\sqrt{۲},۲),(۰,۵m)\}$ نشان‌دهندهٔ یک تابع است؟

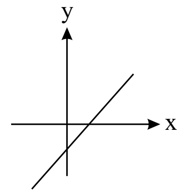
① $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$

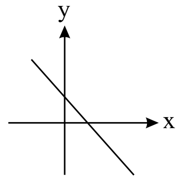
② هیچ مقدار

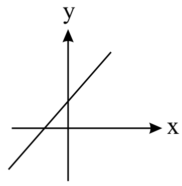
③ $۱+\sqrt{۲}$

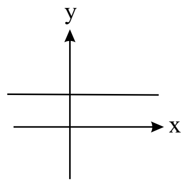
④ $۱-\sqrt{۲}$

۱۲ - اگر a و b دو عدد حقیقی و $ab > ۰$ باشد، کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند مربوط به خط $y = ax + b$ باشد؟

① 

② 

③ 

④ 

۱۳ - نمودار یک سهمی را دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. در این صورت ضابطهٔ سهمی حاصل به‌صورت $y = -x^۲ + ۶x$ خواهد بود. ضابطهٔ سهمی اولیه کدام است؟

① $y = -(x - ۵)^۲ + ۱۰$

② $y = -x^۲ + ۲x + ۹$

③ $y = -x^۲ + ۶x + ۲$

④ $y = (x - ۳)^۲$

۱۴ - اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \left| \dfrac{x - ۲}{۳} + ۱ \right| - ۱$، بازهٔ $(-۲, ۲)$ و برد آن $[a, b)$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

① $\dfrac{۲}{۳}$

② ۱

③ $\dfrac{۱}{۳}$

④ ۲

تابع

۱۵- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=-۲x+۳$ برابر $(-۲,۵]$ و $D_f=$ و برد تابع $g(x)=-x+۴$ برابر $R_g=(۲,۱۴]$ باشد، آنگاه $R_f\cap D_g$ (اشتراک دامنهٔ تابع $g(x)$ و برد تابع $f(x)$) چند عضو طبیعی دارد؟

(۱) ۲
(۲) ۹
(۳) ۱
(۴) صفر

۱۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x+k & x\geq ۲\\ x^۲+۱ & x\leq ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+۴a & x\leq ۲\\ ۲a & x=۲\\ ۳x-۱ & x>۲\end{cases}$ مفروض باشند، $f(a)+g(k)$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) ۱۰
(۳) ۸
(۴) ۶

۱۷- اگر تابع $y=(a^۲-\frac{۳}{۲}a)x^۲+۲ax+۴$ یک تابع خطی و نقطهٔ $(۲,۱۰)$ عضو این تابع باشد، این تابع محور طول‌ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

(۱) $\frac{-۲}{۳}$
(۲) ۴
(۳) $\frac{-۳}{۴}$
(۴) $\frac{-۴}{۳}$

۱۸- اگر $f(\frac{x-۱}{x})+f(۳)=۵x+۴$ باشد، مقدار $f(۹)$ کدام است؟

(۱) $\frac{۲۱}{۴}$
(۲) $\frac{۱۳}{۸}$
(۳) $\frac{۲۱}{۸}$
(۴) $\frac{۱۳}{۴}$

۱۹ - کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

① دامنهٔ تابع $f(x) = ۲$ همهٔ اعداد حقیقی است.

② دامنهٔ تابع $f(x) = \left||x| - \frac{۱}{۳}\right|$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن بازهٔ $(-\frac{۱}{۳}, +\infty)$ است.

③ برد تابع $f(x) = x^{۲} - ۲$ بازهٔ $[-۲, +\infty)$ است.

④ دامنهٔ تابع $f(x)$ با انتقال نمودار آن در راستای محور yها تغییر نمی‌کند.

۲۰ - اگر $f(x) = \begin{cases} -x^{۲} & ; x \geq ۰ \\ x - ۳ & ; x < ۰ \end{cases}$ باشد، برد تابع $g(x) = f(x) + ۴$ کدام است؟

① $(-\infty, ۰]$

② $[۰, +\infty)$

③ $(-\infty, ۴]$

④ $[۴, +\infty)$

۲۱ - اگر نمودار تابع $y = (۵ - x)^{۲}$ را ۲ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار اولیه و جدید با کدام عرض متقاطع‌اند؟

① ۳

② ۴

③ ۱

④ غیر متقاطع‌اند.

۲۲ - اگر f یک تابع همانی و g یک تابع خطی باشد، به‌طوری‌که: $\begin{cases} g(۰) = f(-۱) - ۲ \\ g(۲) - g(۰) = ۲f(۲) \end{cases}$، آنگاه طول نقطهٔ تلاقی نمودارهای توابع f و g کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۲۳ - نمودار تابع یک سهمی از $(۳,۴)$ و $(۴,۳)$ عبور می‌کند. اگر نمودار این تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۵ قطع کند، برد این تابع برابر کدام است؟

① $[۴,+\infty)$

② $(-\infty,۴]$

③ $[-۴,+\infty)$

④ $(-\infty,-۴]$

۲۴ - کدام گزینه نادرست است؟

① دامنهٔ تابع $y=x^۲-۱$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱,+\infty)$ است.

② دامنهٔ تابع $y=-|x|+۲$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $(-\infty,۲]$ است.

③ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن نیز $\mathbb{R}$ است.

④ اگر $f(x)=x^۲-x$ باشد، $f(-۱)=\frac{f(۲)}{۲}$ است.

۲۵ - با فرض $f(x)+f(۱)=\frac{۲x^۲+x}{۳}$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

① ۷

② ۶

③ ۶٫۵

④ ۷٫۵

۲۶ - اگر تابع $f(x)=(۲a-b)x^۲+\frac{a}{۳}x$ یک تابع همانی باشد، a و b کدام‌اند؟

① $\begin{cases} a=۳ \\ b=۶ \end{cases}$

② $\begin{cases} a=۶ \\ b=۳ \end{cases}$

③ $\begin{cases} a=-۳ \\ b=-۶ \end{cases}$

④ $\begin{cases} a=-۶ \\ b=-۳ \end{cases}$

۲۷ - کدام گزینه نادرست است؟

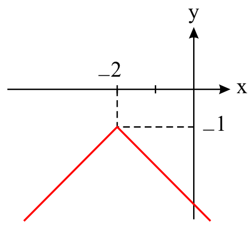
① دامنهٔ تابع $f(x)=۲x^{۲}+۱$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[۱,+\infty)$ است.

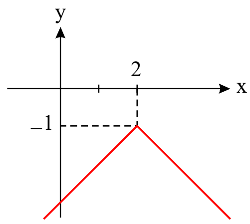
② دامنهٔ تابع $g(x)=|x|-۱$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱,+\infty)$ است.

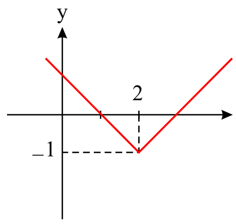
③ برد تابع ثابت $k(x)=-۱$ برابر $\{-۱\}$ است.

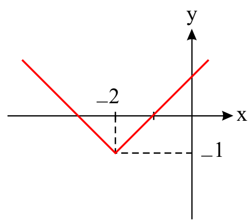
④ اگر $h(x)=۳x+۲$، آنگاه $h(۴)=۲h(۲)$ است.

۲۸ - نمودار تابع $y=-|-x+۲|-۱$ به کدام صورت است؟

①


②


③


④


۲۹ - نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ چند نقطهٔ مشترک دارند؟

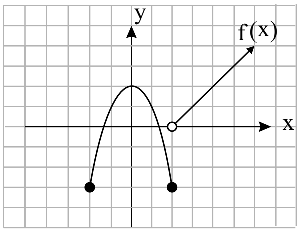
$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ & ,\ ۰<|x|<۲ \\ ۱ & ,\ x=۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} ۱-|x| & ,\ |x|<۲ \\ ۲ & ,\ |x|\geq ۲ \end{cases}$$

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳



۳۰ - شکل مقابل مربوط به کدام تابع قطعه‌ای است؟

① $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲ & -۲<x\leq ۲\\ x+۲ & x\geq ۲\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲ & -۲<x\leq ۲\\ x+۲ & x> ۲\end{cases}$

③ $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲ & -۲\leq x\leq ۲\\ x-۲ & x> ۲\end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲ & -۲<x\leq ۲\\ x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲ & -۲<x\leq ۲\\ x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$

۳۱- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=|x-۲|$ برابر با $(-۱,۷)$ باشد، برد آن کدام است؟

① $(۳,۵)$

② $[۰,۵)$

③ $(۰,۵)$

④ $[۱,۵)$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ می‌دانیم:

تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو باشد را تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو k باشد، این تابع ثابت را با معادلهٔ $f(x)=k$ نشان می‌دهیم.

چون برد این تابع تک‌عضوی است، $f(x)$ باید تابع ثابت باشد، یعنی ضرایب $x^۲$ و x باید صفر باشند و $c^۲$ برابر با ۱۶ باشد:

$$\left.\begin{array}{l} ۱)\ a^۲+b=۰\Rightarrow a^۲=-b \\ ۲)\ b^۲+c=۰\Rightarrow b^۲=-c \\ ۳)\ c^۲=۱۶\Rightarrow c=\pm ۴ \end{array}\right\} \xrightarrow[c<۰]{b<۰} \left\{\begin{array}{l} a^۲=۲\Rightarrow a=\pm\sqrt{۲} \\ \left.\begin{array}{l} b^۲=۴\Rightarrow b=-۲ \\ c=-۴ \end{array}\right\}\Rightarrow b+c=-۶ \end{array}\right.$$

۲ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$g(x)$ تابعی ثابت است هرگاه به‌فرم $g(x)=k$ باشد.
$f(x)$ تابعی همانی است هرگاه به‌فرم $f(x)=x$ باشد.

$g(x)$: **تابع ثابت** $\Rightarrow g(x)=k\Rightarrow g(۵)=k$

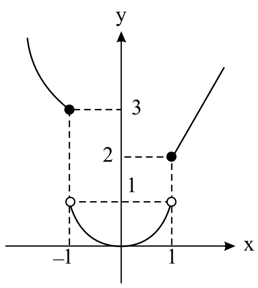
$f(x)$: **تابع همانی** $\Rightarrow f(۵)=۵$

فرض: $\dfrac{k\times ۵}{۵+k}=۱\Rightarrow ۵k=۵+k\Rightarrow ۴k=۵\Rightarrow k=\dfrac{۵}{۴}\Rightarrow g(x)=\dfrac{۵}{۴}$

حکم: $\dfrac{f(۴)+g(۴)}{g(۴)+۱}=\dfrac{۴+\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۴}+۱}=\dfrac{۷}{۳}$

۳ - گزینه ۱ بهترین روش تعیین برد این تابع، رسم نمودار آن است. به این صورت که ابتدا نمودار $y_۱=x^۲+۲$ را با شرط $x\leq -۱$، سپس نمودار $y_۲=x^۲$ را با شرط $-۱<x<۱$ و در مرحلهٔ آخر نمودار تابع $y_۳=x+۱$ را با شرط $x\geq ۱$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع اصلی به‌صورت زیر رسم گردد.

تصویر نمودار بر روی محور yها، برد تابع را نتیجه می‌دهد.



$\Rightarrow$ **برد تابع** $=[۰,۱)\cup[۲,+\infty)$

۴ - گزینه ۳ می‌دانیم:

تابع همانی به‌فرم $f(x)=x$ است.

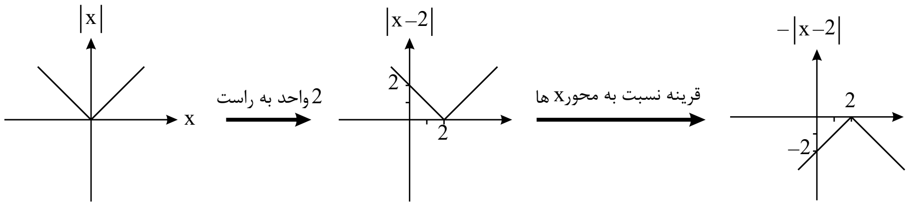
در تابع همانی، ورودی و خروجی باهم برابرند.

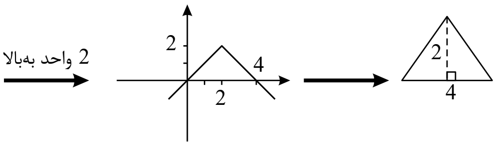
$$\left.\begin{array}{l} a=۲ \\ b-۱=۳\Rightarrow b=۴ \\ c=a-۱\xrightarrow{a=۲} c=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲x^۲+۴x+۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۸=۸\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_۱=\dfrac{-۴+\sqrt{۸}}{۴} \\ x_۲=\dfrac{-۴-\sqrt{۸}}{۴} \end{array}\right\}\Rightarrow |x_۱-x_۲|=\left|\dfrac{-۴+\sqrt{۸}}{۴}-\dfrac{-۴-\sqrt{۸}}{۴}\right|$$

$$=\left|\dfrac{۲\sqrt{۸}}{۴}\right|=\left|\dfrac{۲\times ۲\sqrt{۲}}{۴}\right|=\sqrt{۲}$$

۵ - گزینه ۱ با $y=|x|$ شروع می‌کنیم:





سطح محدود به نمودار و محور طول‌ها برابر است با:

$$S = \frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$$

۶ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\text{تابع همانی تابعی است که هر عضو از دامنه را به همان عضو در برد نسبت می‌دهد. } f(x) = x}$

$(۲, ۳a + ۵) \Leftrightarrow f(۲) = ۳a + ۵ = ۲ \Rightarrow ۳a = -۳ \Rightarrow a = -۱$

$(a + b, ۲b) = (b - ۱, ۲b) \Leftrightarrow f(b - ۱) = ۲b = b - ۱ \Rightarrow b = -۱$

$ab = (-۱) \times (-۱) = ۱$

۷ - گزینه ۲ مطابق نمودارهای زیر، دو حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول:

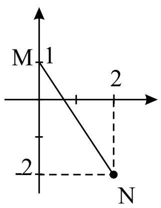
$D = [۰, ۲] \quad , \quad R = [-۲, ۱]$

$M = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$

$m = \frac{-۲ - ۱}{۲ - ۰} = \frac{-۳}{۲}$

$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - ۱ = \frac{-۳}{۲}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{-۳}{۲}x + ۱$

$f(\frac{۲}{۳}) = -۱ + ۱ = ۰$



حالت دوم:

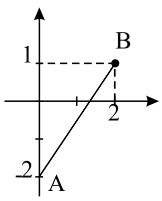
$D = [۰, ۲] \quad , \quad R = [-۲, ۱]$

$A = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

$m = \frac{-۲ - ۱}{۰ - ۲} = \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + ۲ = \frac{۳}{۲}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۲$

$f(\frac{۲}{۳}) = ۱ - ۲ = -۱$

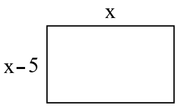


پس $f(\frac{۲}{۳})$ دو مقدار صفر یا -۱ می‌تواند باشد.

۸ - گزینه ۲ می‌دانیم: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود.

رابطهٔ «ب» تابع نیست؛ هر شخص ممکن است به بیش از یک رنگ علاقمند باشد.

۹ - گزینه ۳ طول مستطیل را x می‌نامیم؛ پس عرض آن $x-5$ خواهد بود، داریم:



مساحت مستطیل $= S(x) = x(x-5) = x^2 - 5x$

۱۰ - گزینه ۴ می‌دانیم: ضابطهٔ هر تابع خطی به فرم $f(x) = ax + b$ است.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a + b \\ f(0) = 0 + b = b \\ \text{فرض}:\ f(1) - f(0) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b - b = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{حکم}:\ f(-1) - f(1) = (-a + b) - (a + b) = -2a = -2 \times 3 = -6$$

۱۱ - گزینه ۴ می‌دانیم: رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی از آن مؤلفهٔ اول مساوی نداشته باشند.

$$\left.\begin{array}{l} (5, 2m+1) \\ (5, m^2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2m + 1 = m^2 \Rightarrow m^2 - 2m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \{(5, 3 + 2\sqrt{2}), (1, 7), (1, 2), (0, 5 + 5\sqrt{2})\}\ \text{تابع نیست} \\ m = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \{(5, 3 - 2\sqrt{2}), (1, 7), (1 - 2\sqrt{2}, 2), (0, 5 - 5\sqrt{2})\}\ \text{تابع است} \end{cases}$$

۱۲ - گزینه ۳ $ab > 0$ یعنی a و b هم‌علامت هستند؛ یعنی باید شیب و عرض‌ازمبدأ خط هم‌علامت باشند. این شرایط در گزینهٔ «۳» اتفاق افتاده است.

۱۳ - گزینه ۲ ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت قابل‌انتقال تبدیل می‌کنیم.

$$y = -x^2 + 6x = -(x^2 - 6x) = -(x^2 - 6x + 9) + 9 = -(x - 3)^2 + 9$$

حال برعکس کارهای مورداشاره در مسئله را انجام می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} y = -(x - 3)^2 + 9 + 1 = -(x - 3)^2 + 10$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد به سمت چپ}} y = -(x - 3 + 2)^2 + 10 = -(x - 1)^2 + 10 = -x^2 + 2x + 9$$

۱۴ - گزینه ۲

دامنه $= (-2, 2) \Rightarrow -2 < x < 2$

حال تابع $f(x)$ را روی این دامنه می‌سازیم:

$$\xrightarrow{-2} -4 < x - 2 < 0 \xrightarrow{\div 3} \frac{-4}{3} < \frac{x - 2}{3} < 0 \xrightarrow{+1} -\frac{1}{3} < \frac{x - 2}{3} + 1 < 1$$

$$\xrightarrow{\text{قدرمطلق}} 0 \le \left|\frac{x - 2}{3} + 1\right| < 1 \xrightarrow{-1} -1 \le \left|\frac{x - 2}{3} + 1\right| - 1 < 0 \Rightarrow -1 \le f(x) < 0$$

و این همان برد تابع است:

$$R_f = [-1, 0) = [a, b) \Rightarrow b - a = 0 - (-1) = 1$$

۱۵ - گزینه ۳ تابع $f(x)$ یک خط با شیب منفی است؛ پس برد آن با دامنهٔ $(-2, 5]$ برابر است با:

$$R_f = [f(5), f(-2))$$

$$\left.\begin{array}{l} f(5) = -2 \times 5 + 3 = -7 \\ f(-2) = -2 \times (-2) + 3 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow R_f = [-7, 7)$$

$g(x)$ نیز خطی با شیب منفی است و با برد $(2, 14]$ داریم:

$$g(x) = -x + 4$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = 2 \Rightarrow -x + 4 = 2 \Rightarrow x = 2 \\ g(x) = 14 \Rightarrow -x + 4 = 14 \Rightarrow x = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow D_g = [-10, 2)$$

حکم: $R_f \cap D_g = [-۷, ۲) \Rightarrow$ تنها عدد طبیعی موجود در این بازه ۱ است.

۱۶ - گزینه ۲ اگر $f(x)$ و $g(x)$ بخواهند تابع باشند باید $f(۲)$ از هر دو ضابطهٔ f مقداری یکسان داشته باشد و $g(۲)$ نیز از ضابطهٔ اول و دوم g یکسان به‌دست آید:

$$f(۲) = ۲ + k = ۲^۲ + ۱ \Rightarrow ۲ + k = ۵ \Rightarrow k = ۳$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \geq ۲ \\ x^۲ + ۱ & x \leq ۲ \end{cases}$$

$$g(۲) = ۲ + ۴a = ۲a \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \leq ۲ \\ -۲ & x = ۲ \\ ۳x - ۱ & x > ۲ \end{cases}$$

$$f(-۱) + g(۳) = ((-۱)^۲ + ۱) + (۳ \times ۳ - ۱) = ۲ + ۸ = ۱۰$$

۱۷ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\text{ضابطهٔ هر تابع خطی به فرم } f(x) = ax + b \text{ است.}}$

از آنجاکه تابع خطی (درجهٔ ۱) است، باید ضریب $x^۲$ را صفر کنیم:

$$a^۲ - \frac{۳}{۲}a = ۰ \Rightarrow a(a - \frac{۳}{۲}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \Rightarrow y = ۴ \ \ (I) \\ a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = ۳x + ۴ \ \ (II) \end{cases}$$

اما مختصات نقطهٔ $(۲, ۱۰)$ باید در تابع صدق کند. پس فقط II را می‌پذیریم.

$$y = ۳x + ۴ \xrightarrow{y=۰} ۳x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$$

۱۸ - گزینه ۳

روی $f(۳)$ که در فرض مسئله معلوم است کار می‌کنیم؛ تلاش می‌کنیم که بفهمیم $f(\frac{x-۱}{x})$ چگونه به $f(۳)$ تبدیل می‌شود:

$$\frac{x-۱}{x} = ۳ \Rightarrow x - ۱ = ۳x \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

این را در فرض قرار می‌دهیم:

$$f(۳) + f(۳) = ۵ \times (-\frac{۱}{۲}) + ۴ \Rightarrow ۲f(۳) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(۳) = \frac{۳}{۴}$$

و بازهم در فرض جایگزین می‌کنیم:

$$f(\frac{x-۱}{x}) + \frac{۳}{۴} = ۵x + ۴ \Rightarrow f(\frac{x-۱}{x}) = ۵x + \frac{۱۳}{۴}$$

و برای محاسبهٔ $f(۹)$:

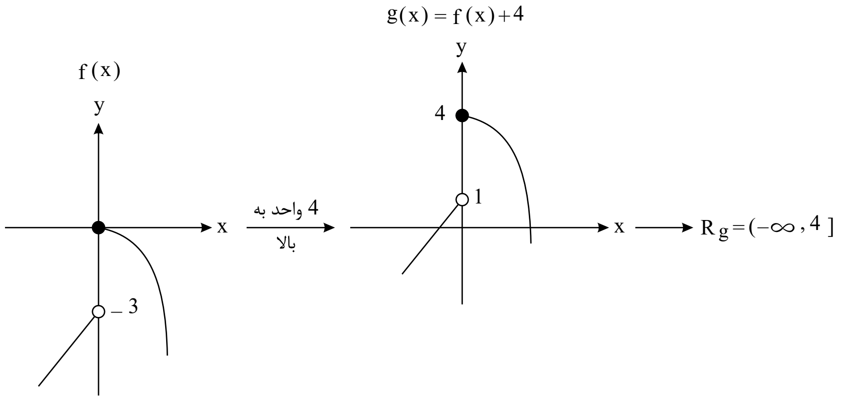
$$\frac{x-۱}{x} = ۹ \Rightarrow x - ۱ = ۹x \Rightarrow ۸x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow f(۹) = ۵ \times (-\frac{۱}{۸}) + \frac{۱۳}{۴} = -\frac{۵}{۸} + \frac{۱۳}{۴} = \frac{۲۱}{۸}$$

۱۹ - گزینه ۲ همهٔ گزینه‌ها صحیح هستند، به‌جز گزینهٔ «۲» که تابعی قدرمطلقی است و انتظار داریم برد آن فقط شامل مقادیر مثبت باشد؛ اما بازهٔ $(-\frac{۱}{۳}, +\infty)$ مقادیر منفی را نیز در خود دارد؛ پس نادرست است.

۲۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\text{برد تابع } f(x) \text{ عبارت است از: تصویر نمودار آن بر محور } y \text{ ها.}}$

تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



پاسخ

۲۱ - گزینه ۲

$$y = (۵ - x)^۲ \xrightarrow{x \to x+۲} y = (۵ - (x + ۲))^۲ = (۳ - x)^۲ \xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} y = (۳ - x)^۲ + ۴$$

$$g(x)=ax+b\Rightarrow\begin{cases}g(\circ)=b\\ g(۲)=۲a+b\end{cases}$$

$$\text{فرض}:\begin{cases}g(\circ)=f(-۱)-۲\\ g(۲)-g(\circ)=۲f(۲)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-۱-۲=-۳\\ ۲a+b-b=۲\times۲\Rightarrow۲a=۴\Rightarrow a=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=۲x-۳$$

$$\text{تلاقی}:\begin{cases}f(x)=x\\ g(x)=۲x-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x\\ y=۲x-۳\end{cases}\xrightarrow{y=x}x=۲x-۳\Rightarrow x=۳$$

۲۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\text{تابع درجه دو به فرم } y=ax^۲+bx+c \text{ و نمودار آن یک سهمی است.}}$

$$(\circ,-۵)\in f\Rightarrow\circ+\circ+c=-۵\Rightarrow c=-۵$$

$$\begin{matrix}(۳,۴)\in f\Rightarrow۹a+۳b-۵=۴\\ (۴,۳)\in f\Rightarrow۱۶a+۴b-۵=۳\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}۹a+۳b=۹\\ ۱۶a+۴b=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-x^۲+۶x-۵\Rightarrow f(x)=-(x^۲-۶x)-۵$$

$$\Rightarrow f(x)=-(x^۲-۶x+۹)-۵+۹=-(x-۳)^۲+۴$$

$$\Rightarrow R_f=(-\infty,۴]$$

۲۴ - گزینه ۴ در گزینهٔ «۴» داریم:

$$\left.\begin{matrix}f(۲)=۲^۲-۲=۲\\ f(-۱)=(-۱)^۲-(-۱)=۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(-۱)\neq\frac{f(۲)}{۲}$$

۲۵ - گزینه ۳

$$x=۱\Rightarrow f(۱)+f(۱)=\frac{۲+۱}{۳}\Rightarrow۲f(۱)=۱\Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{۲}$$

$$x=۳\Rightarrow f(۳)+\underset{\frac{۱}{۲}}{\underset{\downarrow}{f(۱)}}=\frac{۲\times۳^۲+۳}{۳}\Rightarrow f(۳)=\frac{۲۱}{۳}-\frac{۱}{۲}=۷-\circ/۵=۶/۵$$

۲۶ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\text{تابع همانی به‌فرم } f(x)=x \text{ است.}}$

باید ضریب $x^۲$ صفر و ضریب x یک باشد:

$$\frac{a}{۳}=۱\Rightarrow a=۳$$

$$۲a-b=\circ\xrightarrow{a=۳}۶-b=\circ\Rightarrow b=۶$$

۲۷ - گزینه ۴

$$h(x)=۳x+۲\Rightarrow\begin{cases}h(۲)=۳\times۲+۲=۸\\ h(۴)=۳\times۴+۲=۱۴\end{cases}\Rightarrow h(۴)\neq۲h(۲)$$

بقیهٔ گزینه‌ها صحیح هستند.

۲۸ - گزینه ۲

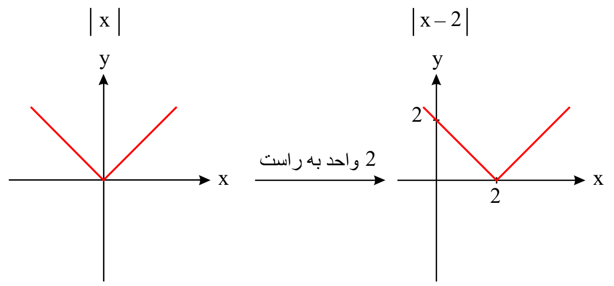
می‌دانیم: $\boxed{|u|=|-u|}$

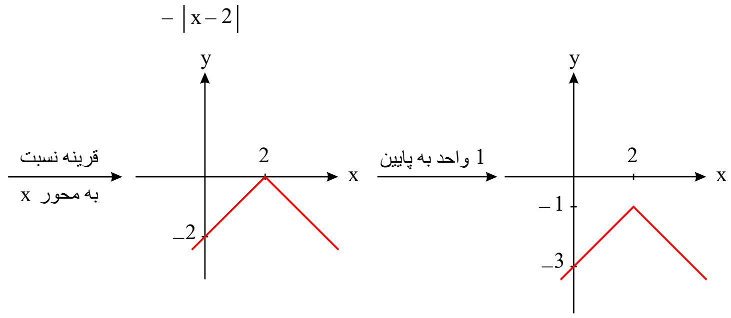
تابع را به‌صورت زیر، ساده می‌نویسیم:

$$y=-|-(x-۲)|-۱$$

$$\Rightarrow y=-|x-۲|-۱$$

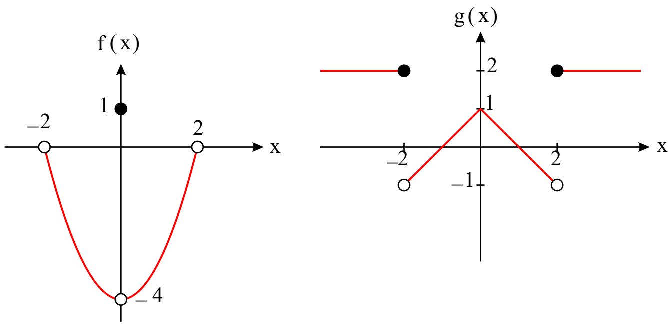
حال از تابع $y=|x|$ شروع می‌کنیم:



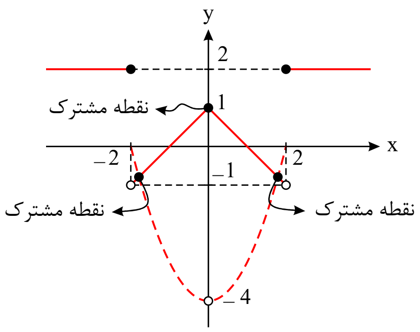


۲۹ ـ گزینه ۴

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



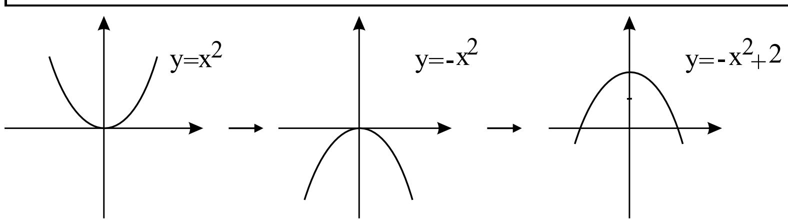
دو نمودار را در یک شکل نشان می‌دهیم، داریم:

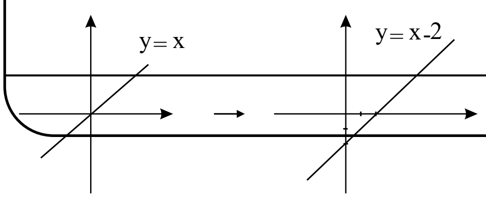


این دو نمودار در سه نقطه متقاطع‌اند.

۳۰ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: **برای رسم نمودار $y=f(x)+k$ نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای عمودی انتقال می‌دهیم که اگر $k>0$ بود انتقال رو به بالا و اگر $k<0$ بود انتقال رو به پایین انجام می‌گیرد.**
در سهمی به معادلهٔ ax^2+bx+c، اگر $a>0$ باشد سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ باشد سهمی رو به پایین است.





پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۲	۲۶ - ۱	۳۱ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۴	۲۲ - ۳	۲۷ - ۴	
۳ - ۱	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲	
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۴	۲۹ - ۴	
۵ - ۱	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۳	