



علی هاشمی

نام آزمون: معادله ها و نامعادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- اگر معادله‌ی درجه دوم $9x^2 - 12x + c = 0$ تنها یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، مقدار این ریشه کدام است؟

① $-\frac{2}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ $\frac{4}{3}$

۲- طول و عرض مستطیلی مضارب طبیعی و متوالی عدد ۶ هستند. اگر عدد مساحت این مستطیل دو برابر عدد محیط آن باشد، طول این مستطیل کدام است؟

① ۱۸

② ۱۲

③ ۲۴

④ ۳۰

۳- اگر ضرایب عددی a ، b و c از معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه این معادله:

① ریشه‌ی مضاعف دارد.

② ریشه‌ی حقیقی ندارد.

③ دو ریشه‌ی متمایز مثبت دارد.

④ دو ریشه متمایز منفی دارد.

۴- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های ۳ و -۲ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱۲ قطع می‌کند. معادله‌ی این سهمی کدام است؟

① $y = x^2 - x - 6$

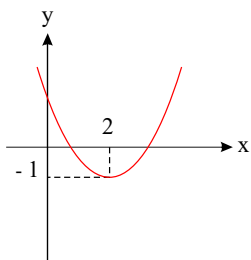
② $y = x^2 - 2x + 3$

③ $y = 2x^2 - 2x - 12$

④ $y = 2x^2 - 4x + 6$



۵- اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار سهمی $y = x^2 + ax + b$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

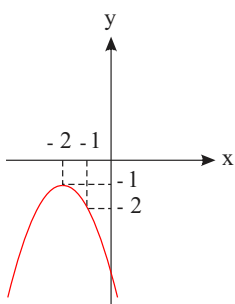


- ① ۳
- ② -۴
- ③ ۱
- ④ -۱

۶- چند عدد صحیح منفی در نامعادله $\frac{1+x}{3} < -2 - \frac{x}{4}$ صدق می کند؟

- ① ۱
- ② ۳
- ③ ۴
- ④ بی شمار

۷- معادله ی سهمی شکل روبه رو کدام است؟



- ① $y = -x^2 - 4x - 3$
- ② $y = -x^2 + 4x - 5$
- ③ $y = -x^2 - 4x - 5$
- ④ $y = -4x^2 - 4x - 3$

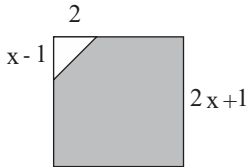
۸- در حل معادله ی درجه ی دوم $x(4x + 1) = \frac{5}{4}$ به روش مربع کامل کردن، پس از آن که ضریب

x^2 را برابر با یک می کنیم، کدام عدد به طرفین معادله اضافه می شود؟

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{12}$
- ③ $\frac{1}{64}$
- ④ $\frac{1}{256}$



۹- اگر مساحت قسمت رنگی از مربع زیر برابر با ۲۴ سانتی متر مربع باشد، x چند سانتی متر است؟



- ① $\frac{3}{2}$
- ② $\frac{11}{4}$
- ③ ۲
- ④ ۲

۱۰- مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x-5}{6x^2-7x-5} < 0$ کدام است؟

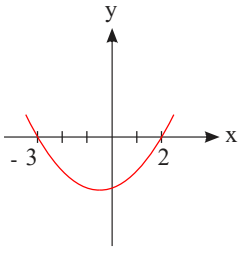
- ① $(-\infty, -\frac{1}{3})$
- ② $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$
- ③ $(-\infty, -\frac{1}{2})$
- ④ $(-\infty, \frac{5}{3})$

۱۱- معادله درجه‌ی دوم $\frac{m}{4}x^2 - 4x + 8 = 0$ به ازای مقادیر $m \in (m_0, +\infty)$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. کم‌ترین مقدار m_0 کدام است؟

- ① ۱
- ② ۲
- ③ ۴
- ④ ۴

۱۲- در حل معادله $2x^2 - 12x + 7 = 0$ به روشی مشابه روش مربع کامل، معادله را به فرم $2(x+b)^2 + c = 0$ می‌نویسیم. حاصل ضرب ریشه‌های معادله چند برابر $b+c$ است؟

- ① $-\frac{1}{4}$
- ② $\frac{7}{3}$
- ③ $-\frac{7}{4}$
- ④ $-\frac{3}{2}$



۱۳- باتوجه به نمودار زیر که مربوط به تابع $y = ax^2 + bx + c$ است، جواب نامعادله $\frac{x}{ax^2 + bx + c} \geq 0$ کدام است؟

- ① $(-3, 0] \cup (2, +\infty)$
- ② $(-3, 0) \cup [2, +\infty)$
- ③ $(-3, 2) - \{0\}$
- ④ $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \cup \{0\}$

۱۴- کدام گزینه، نمایش تابع قدرمطلق است؟

- ① $f(x) = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$
- ② $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
- ③ $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$
- ④ $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & x \neq 0 \end{cases}$

۱۵- نمودار یک سهمی از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. کدام یک از نقاط زیر روی این سهمی قرار دارد؟

- ① $(-1, 6)$
- ② $(-2, 10)$
- ③ $(3, 2)$
- ④ $(4, -1)$

۱۶- مجموعه جواب نامعادله $2x^2 - 5x < 3$ کدام بازه است؟

- ① $(-\infty, 0)$
- ② $(-3, \frac{1}{2})$
- ③ $(-1, 3)$
- ④ $(-\frac{1}{2}, 3)$



۱۷- به ازای چه مقادیری از k ، عبارت درجه دوم $A = kx^2 + 4x + 3$ همواره مثبت و عبارت $B = -3x^2 - kx - k$ همواره منفی است؟

① $(0, 12)$

② $(\frac{4}{3}, 12)$

③ $(-\frac{4}{3}, +\infty)$

④ \emptyset

۱۸- تویی از بالای یک ساختمان که ۱۰ متر ارتفاع دارد به بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع توپ از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -t^2 + 3t + 1$ محاسبه می‌شود. اگر در بازه زمانی (a, b) ، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۰ متر باشد، $b - a$ کدام است؟

① ۱٫۵

② ۳

③ ۴

④ ۵

۱۹- اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1$ به صورت $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ باشد، $b - a$ کدام است؟

① ۳

② صفر

③ ۱

④ ۲

۲۰- نامعادله $\frac{2x-9}{|x^2+1|} < -1$ در کدام بازه، برقرار است؟

① $(2, 6)$

② $(-4, 2)$

③ $(-2, 4)$

④ $(-1, 5)$



۲۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{|2x-1|}{3x+2} \leq 1$ کدام است؟ (کامل ترین گزینه را انتخاب نمایید.)

① $(-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{5}, +\infty)$

② $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

③ $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [-\frac{1}{5}, +\infty)$

④ $(-\infty, -3] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

۲۲- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^3 - 4x}{-x^2 + 3x - 4} \geq 0$ کدام است؟ (کامل ترین گزینه را انتخاب نمایید.)

① $x \geq 2$

② $-2 \leq x \leq 0$

③ $0 \leq x \leq 2$

④ $x \leq -2$ یا $0 \leq x \leq 2$

۲۳- چند عدد صحیح نامنفی در نامعادله $\left| \frac{x+6}{3x+1} \right| \leq x$ صدق نمی کند؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ بی شمار

۲۴- عبارت $P(x) = \frac{x(x+2)^2}{x^2-x-2}$ در چه بازه‌ای همواره مثبت است؟

① $(0, +\infty)$

② $(-2, 2)$

③ $(-1, 2)$

④ $(-1, 0)$



۲۵- نمودار سهمی $y = 3x^2 + mx + 4$ همواره بالای خط $y = -2x + 1$ قرار می‌گیرد. حدود m کدام است؟

- ① $(-8, 4)$
- ② $(-6, 6)$
- ③ $(0, +\infty)$
- ④ $(-4, 8)$

۲۶- تعداد ضربان قلب یک ورزشکار، پس از x دقیقه تمرین سنگین از رابطه $f(x) = 2x^2 - 20x + 72$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک تمرین سنگین، تعداد ضربان قلب از ۱۲۰ بیشتر است؟

- ① $x > 6$
- ② $x > 6$ یا $0 < x < 4$
- ③ $x > 12$
- ④ $6 < x < 12$

۲۷- به ازای چه مقادیری از m سهمی $y = 2mx^2 - 3x + 2m$ تماماً پایین محور x ها قرار دارد؟

- ① $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$
- ② $(-\infty, -\frac{3}{4}]$
- ③ $(-\infty, -\frac{3}{4})$
- ④ $(\frac{3}{4}, +\infty)$

۲۸- به ازای کدام مقادیر a عبارت $ax^2 + 2x + 4a$ همواره نامنفی است؟

- ① $a \geq \frac{1}{2}$
- ② $a \leq -\frac{1}{2}$
- ③ $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$
- ④ $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$



۲۹- حدود a کدام باشد تا به ازای مقادیر مناسب از b عبارت درجه دوم $(b-a)x^2 + bx + a$ همواره نامنفی باشد؟

- ① $(-\infty, 0)$
- ② $(0, +\infty)$
- ③ \emptyset
- ④ R

۳۰- اگر مجموعه جواب نامعادله $|x - a| \geq 2b$ به صورت $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ① ۵,۲۵
- ② ۴,۵
- ③ ۶
- ④ ۵,۷۵



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

هر معادله‌ی درجه دو با شرط $\Delta = 0$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد که مقدار آن برابر با $-\frac{b}{2a}$ است.

راه اول:

$$9x^2 - 12x + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 9 \times c = 0$$

$$\Rightarrow 144 - 36c = 0 \Rightarrow 36c = 144 \Rightarrow c = \frac{144}{36} = 4$$

$$\text{معادله } 9x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow (3x - 2)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

راه دوم:

$$\text{ریشه‌ی مضاعف} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 9} = \frac{2}{3}$$

دقت: در روش دوم نیازی به محاسبه‌ی c نیست.

۲ - گزینه ۲ اگر عرض مستطیل x باشد، طول آن $x + 6$ است:

$$\text{مساحت} = 2 \times \text{محیط} \Rightarrow x(x + 6) = 2 \times (2(x + x + 6))$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x = 2(4x + 12) \Rightarrow x^2 + 6x = 8x + 24 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x - 6)(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \Rightarrow \text{طول} = x + 6 = 12 \\ x = -4 \Rightarrow \text{طول ضلع است، پس نمی‌تواند منفی باشد} \end{cases}$$

۳ - گزینه ۲ اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q باشند، آنگاه $b = aq$ و $c = aq^2$ بنابراین:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + aqx + aq^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\div a} x^2 + qx + q^2 = 0 \Rightarrow \Delta = q^2 - 4q^2 = -3q^2 < 0$$

پس معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۴ - گزینه ۳

معادله سهمی که محور x ها را در طول‌های α و β قطع کند، عبارتست از:

$$y = k(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$y = k(x + 2)(x - 3) = k(x^2 - x - 6)$$

از طرفی نقطه $(-12, 0)$ روی سهمی قرار دارد؛ پس:

$$-12 = k(0^2 - 0 - 6) \Rightarrow -12 = -6k \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow y = 2(x^2 - x - 6) = 2x^2 - 2x - 12$$

۵ - گزینه ۴ مختصات رأس سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ عبارتست از: $S \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$

$$\text{طول رأس} = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \xrightarrow{y=x^2+ax+b} \frac{-a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4$$

نقطه $(-1, 2)$ نیز بر روی سهمی قرار دارد؛ پس:

$$-1 = 2^2 + 2a + b \xrightarrow{a=-4} -1 = 4 - 8 + b \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow a + b = -4 + 3 = -1$$

۶ - گزینه ۲

$$-2 - \frac{x}{4} < \frac{1+x}{3} \Rightarrow \frac{1+x}{3} + \frac{x}{4} > -2$$

$$\Rightarrow \frac{4 + 4x + 3x}{12} > -2 \xrightarrow{\times 12} 7x + 4 > -24$$

$$\Rightarrow 7x > -28 \xrightarrow{\div 7} x > -4 \xrightarrow{\text{عدده صحیح منفی}} x \in \{-1, -2, -3\}$$

سه عدد صحیح منفی در معادله صدق می‌کند.



معادله‌ی سهمی با رأس $S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ به صورت $y = k(x - \alpha)^2 + \alpha$ است.

بر طبق نمودار، رأس سهمی نقطه‌ی $S \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ است. پس:

$$y = k(x - (-2))^2 + (-1)$$

$$\Rightarrow y = k(x + 2)^2 - 1$$

از طرفی این سهمی از نقطه‌ی $(-1, -2)$ نیز می‌گذرد. پس:

$$-2 = k(-1 + 2)^2 - 1 \Rightarrow -2 = k \times 1 - 1 \Rightarrow k = -1$$

پس معادله‌ی سهمی عبارتست از:

$$y = -(x + 2)^2 - 1 = -(x^2 + 4x + 4) - 1 \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 5$$

در معادله‌ی درجه‌ی دومی که ضریب x^2 در آن یک است، برای مربع کامل کردن باید مربع نصف ضریب x را به طرفین اضافه کنیم.

$$4x^2 + x = \frac{5}{4} \rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{5}{16}$$

ضریب x ، $\frac{1}{4}$ است. نصف آن $\frac{1}{8}$ است و مربع نصف آن $\frac{1}{64}$ خواهد بود. پس باید $\frac{1}{64}$ را به طرفین اضافه کنیم تا عبارت سمت چپ معادله به یک مربع کامل تبدیل شود.

$$\text{مساحت مثلث} - \text{مساحت مربع} = \text{مساحت قسمت رنگی}$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 - (x - 1)^2 = 4x^2 + 3x + 2$$

بنابه فرض، این مساحت برابر با ۲۴ سانتی‌متر است:

$$4x^2 + 3x + 2 = 24 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 22 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times (-22) = 9 + 352 = 361$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{-3 \pm 19}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{11}{4} \end{cases}$$

چون x باید طول اضلاع $2x + 1$ و $x - 1$ را تشکیل دهد، مقدار $\frac{-11}{4}$ برای آن قابل قبول نیست و فقط $x = 2$ را می‌پذیریم.

$$\frac{3x - 5}{6x^2 - 7x - 5} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ 6x^2 - 7x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 \\ \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{7 \pm 13}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

جدول را رسم می‌کنیم:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
$3x - 5$	-	0 +
$6x^2 - 7x - 5$	+ 0 -	0 +
$\frac{3x - 5}{6x^2 - 7x - 5}$	- +	+ +

پس مجموعه‌ی جواب $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$ است.

معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به‌ازای $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$\frac{m}{4}x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{m}{4} \times 8 = 16 - 8m$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 8m < 0 \Rightarrow 16 < 8m \rightarrow 2 < m \Rightarrow m \in (2, +\infty)$$

پس کم‌ترین مقدار m_0 برابر با ۲ است.

۱۲ - گزینه ۱ تلاش می‌کنیم که معادله $2x^2 - 12x + 7 = 0$ را به شکل $2(x + b)^2 + c = 0$ درآوریم:



مربع نصف ضریب x را به داخل پرانتز اضافه و کم می کنیم تا مربع کامل حاصل شود:

$$\Rightarrow 2(x^2 - 6x) + 7 = 0$$

$$9 = \text{مربع نصف ضریب} \xrightarrow{(-)^2} -3 = \text{نصف ضریب } x \xrightarrow{\div 2} -6 = \text{ضریب } x$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 7 = 0 \Rightarrow 2(x - 3)^2 - 11 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{مقایسه} \\ \text{فرض: } 2(x + b)^2 + c = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -3 \\ c = -11 \end{array}$$

معادله را حل می کنیم:

$$2(x - 3)^2 - 11 \Rightarrow 2(x - 3)^2 = 11 \Rightarrow (x - 3)^2 = \frac{11}{2} \xrightarrow{\sqrt{\quad}}$$

$$|x - 3| = \sqrt{\frac{11}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3 = \sqrt{\frac{11}{2}} \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{\frac{11}{2}} \\ x_2 - 3 = -\sqrt{\frac{11}{2}} \Rightarrow x_2 = 3 - \sqrt{\frac{11}{2}} \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه ها} = x_1 \times x_2 = (3 + \sqrt{\frac{11}{2}})(3 - \sqrt{\frac{11}{2}}) = 3^2 - (\sqrt{\frac{11}{2}})^2 = 9 - \frac{11}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{x_1 x_2}{b + c} = \frac{\frac{7}{2}}{-3 - 11} = \frac{-1}{4}$$

۱۳ - گزینه ۱

$$\frac{x}{ax^2 + bx + c} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نمودار}} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

و نمودار y بین این دو ریشه، در زیر محور x ها قرار دارد؛ پس علامت عرض های آن منفی است.

اکنون جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم:

x	-3	0	2
x	$-$	$-$	$+$
$ax^2 + bx + c$	$+$	$-$	$+$
$\frac{x}{ax^2 + bx + c}$	$-$	$+$	$-$

پس مجموعه جواب عبارتست از: $(-3, 0] \cup (2, +\infty)$

۱۴ - گزینه ۲

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ می دانیم:}$$

۱۵ - گزینه ۱

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(0, 1) \rightarrow c = 1$$

$$(1, -2) \rightarrow a + b + 1 = -2 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow 2a + 2b = -6$$

$$(2, -3) \rightarrow 4a + 2b + 1 = -3 \Rightarrow 4a + 2b = -4$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = -6 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

$$-2a = -2 \Rightarrow a = 1 \rightarrow a + b = -3 \xrightarrow{a=1} 1 + b = -3 \Rightarrow b = -4$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f(-1) = 1 + 4 + 1 = 6 \Rightarrow$$

نقطه $(-1, 6)$ روی این سهمی است.

۱۶ - گزینه ۴

$$\text{می دانیم:} \quad \text{جواب معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ از رابطه } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ بدست می آید.}$$

$$2x^2 - 5x < 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 < 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ x = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c|cc} x & -\frac{1}{2} & 3 \\ \hline 2x^2 - 5x - 3 & + \circ - \circ + \end{array} \Rightarrow x\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$$

۱۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه
 $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه

$$A > 0 \Rightarrow kx^2 + 4x + 3 > 0$$

$$B < 0 \Rightarrow -3x^2 - kx - k < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow -3 < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow k^2 - 4(-3)(-k) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow k > 0 \text{ (I)} \\ \Delta < 0 \Rightarrow 16 - 4(k)(3) < 0 \Rightarrow 16 - 12k < 0 \Rightarrow 16 < 12k \Rightarrow k > \frac{4}{3} \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow k^2 - 12k < 0 \Rightarrow k(k - 12) < 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 12 \\ \hline k^2 - 12k & + \circ - \circ + \end{array} \Rightarrow 0 < k < 12 \text{ (III)}$$

$$I \cap II \cap III: k \in \left(\frac{4}{3}, 12\right)$$

۱۸ - گزینه ۲

$$h > 1 \Rightarrow -t^2 + 3t + 1 > 1 \Rightarrow -t^2 + 3t > 0 \Rightarrow t(-t + 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 3 \\ \hline -t + 3 & - \circ + \circ - \end{array} \Rightarrow 0 < t < 3 \Rightarrow t \in (0, 3) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3$$

۱۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره مثبت است هرگاه
 $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره منفی است هرگاه

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - (x-1)(x+1) + x(x+1)}{x(x+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - (x^2 - 1) + x^2 + x}{x^2 + x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x^2 + 1 + x^2 + x}{x^2 + x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \\ +x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = -3 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{همواره مثبت} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & -1 & 0 \\ \hline x^2 + x + 1 & + & + \\ x^2 + x & + \circ - \circ + \\ \hline \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} & + \text{تن} - \text{تن} + \end{array}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

۲۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \geq 0 \Rightarrow |x^2 + 1| = x^2 + 1 \text{ (I)}$$

$$\frac{2x - 9}{|x^2 + 1|} < -1 \Rightarrow \frac{2x - 9}{x^2 + 1} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{2x - 9 + x^2 + 1}{x^2 + 1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow \frac{(x+4)(x-2)}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \end{cases}$$

جواب ندارد



	-4	2	
x^2+2x-8	+	○	-
x^2+1	+	+	+
$\frac{x^2+2x-8}{x^2+1}$	+	○	-

 $\Rightarrow \lambda x \in (-4, 2)$

۲۱ - گزینه ۳

می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq \frac{1}{2} \quad (I) \\ -2x + 1 & x < \frac{1}{2} \quad (II) \end{cases}$$

$$I = \frac{|2x - 1|}{3x + 2} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x - 1}{3x + 2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x - 1 - 3x - 2}{3x + 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x - 3}{3x + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty) \xrightarrow{x > \frac{1}{2}} x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$$

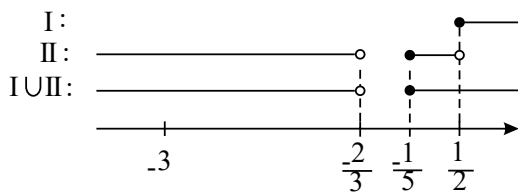
	-3	$-\frac{2}{3}$	
$-x - 3$	+	○	-
$3x + 2$	-	-	○
$\frac{-x - 3}{3x + 2}$	-	○	+

$$II: \frac{|2x - 1|}{3x + 2} \leq 1 \Rightarrow \frac{-2x + 1}{3x + 2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x + 1 - 3x - 2}{3x + 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-5x - 1}{3x + 2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x - 1 = 0 \Rightarrow -5x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \\ 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{5}$	
$-5x - 1$	+	+	○
$3x + 2$	-	○	+
$\frac{-5x - 1}{3x + 2}$	-	○	+

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [-\frac{1}{5}, +\infty) \xrightarrow{x < \frac{1}{2}} x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [-\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$$



$$I \cup II = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [-\frac{1}{5}, +\infty)$$

۲۲ - گزینه ۴

$$\frac{x^2 - 4x}{-x^2 + 3x - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x^2 - 4)}{-x^2 + 3x - 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x - 2)(x + 2)}{x^2 - 3x + 4} \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 4 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = -7 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{همواره مثبت}$$



	-2	0	2	
x	-	-	o	+
x^2-4	+	o	-	o
x^2-3x+4	+	+	+	+
$\frac{x(x^2-4)}{x^2-3x+4}$	-	o	+	o

$\Rightarrow x \leq -2$ یا $0 \leq x \leq 2$

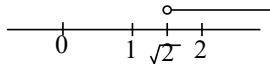
۲۳ - گزینه ۲

$\left| \frac{x+6}{3x+1} \right| \leq x \xrightarrow{\text{قدرمطلق همواره مثبت}} x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+6 > 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+6}{3x+1} > 0$

$\Rightarrow \left| \frac{x+6}{3x+1} \right| = \frac{x+6}{3x+1}$

$\frac{x+6}{3x+1} \leq x \Rightarrow x+6 \leq x(3x+1) \Rightarrow x+6 \leq 3x^2+x \Rightarrow 6 \leq 3x^2$

$\Rightarrow 2 \leq x^2 \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{x > 0} x > \sqrt{2}$



اعداد صحیح نامنفی که در این مجموعه نیست صفر و ۱ هستند.

۲۴ - گزینه ۴ عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

$\begin{cases} x = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \end{cases}$

	-2	-1	0	2	
x	-	-	-	o	+
$(x+2)^2$	+	o	+	+	+
x^2-x-2	+	+	o	-	o
P(x)	-	o	+	o	+

$\Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

تنها گزینه‌ای که در بازه‌ی بالا صدق می‌کند گزینه ۴ است.

۲۵ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$\Delta < 0$	عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره مثبت است هرگاه
$a > 0$	
$\Delta < 0$	عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره منفی است هرگاه
$a < 0$	

$3x^2 + mx + 4 > -2x + 1 \Rightarrow 3x^2 + (m+2)x + 3 > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow 3 > 0 \end{cases}$

$\Delta < 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(3)(3) < 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 36 < 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 32 < 0$

$\Rightarrow (m+8)(m-4) < 0 \Rightarrow \begin{cases} m+8 = 0 \Rightarrow m = -8 \\ m-4 = 0 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$

	-8	4	
$m^2+4m-32$	+	o	+

$\Rightarrow -8 < m < 4 \Rightarrow m \in (-8, 4)$

۲۶ - گزینه ۳

$2x^2 - 20x + 72 > 120 \Rightarrow 2x^2 - 20x - 48 > 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 10x - 24 > 0 \Rightarrow (x-12)(x+2) > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-12 = 0 \Rightarrow x = 12 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

	-2	12	
$x^2-10x-24$	+	o	+

$\Rightarrow x < -2 \cup x > 12 \xrightarrow{x > 0} x > 12$
زمان همواره مثبت



می‌دانیم: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره مثبت است هرگاه
 $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه و همواره منفی است هرگاه
 $x^2 > a^2 \Rightarrow x < -a$ یا $x > a$

$$2mx^2 - 3x + 2m < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4(2m)(2m) < 0 \Rightarrow 9 - 16m^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16m^2 > 9 \Rightarrow m^2 > \frac{9}{16} \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m < -\frac{3}{4} \end{cases} \xrightarrow{m < 0} m < -\frac{3}{4} \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{3}{4})$$

می‌دانیم: $x^2 > a^2 \Rightarrow x < -a$ یا $x > a$

$$ax^2 + 2x + 4a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow a \geq 0 \quad (I) \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow 4 - 4(a)(4a) \Rightarrow 4 - 16a^2 \leq 0 \Rightarrow 16a^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a \geq \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad a \leq -\frac{1}{2} \quad (II)$$

$$I \cap II = a \geq \frac{1}{2}$$

می‌دانیم: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه
 $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه

$$(b-a)x^2 + bx + a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} b-a > 0 \Rightarrow b > a \quad (I) \\ b^2 - 4(b-a)a \leq 0 \Rightarrow b^2 - 4ab + 4a^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b-2a)^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (b-2a)^2 < 0 \quad \text{ناممکن} \\ (b-2a)^2 = 0 \Rightarrow b = 2a \quad (II) \end{cases}$$

$$I: b > a \xrightarrow{II: b=2a} 2a > a \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a \in (0, +\infty)$$

می‌دانیم: $|x| > a \Rightarrow \begin{cases} x > a \\ \text{یا} \\ x < -a \end{cases}$

$$|x-a| \geq 2b \Rightarrow \begin{cases} x-a \geq 2b \Rightarrow x \geq a+2b \Rightarrow x \in [a+2b, +\infty) \\ x-a \leq -2b \Rightarrow x \leq -2b+a \Rightarrow x \in (-\infty, 2b+a] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b=6 \\ a-2b=3 \end{cases}$$

$$2a=9 \Rightarrow a=4,5 \Rightarrow 4,5-2b=3 \Rightarrow 2b=1,5 \Rightarrow b=0,75$$

$$a+b=4,5+0,75=5,25$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۲	۱۱ - ۲	۱۶ - ۴	۲۱ - ۳	۲۶ - ۳
۲ - ۲	۷ - ۳	۱۲ - ۱	۱۷ - ۲	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۳	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۱
۴ - ۳	۹ - ۴	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۱	۳۰ - ۱