



علی هاشمی

نام آزمون: معادله ها و نامعادله ها

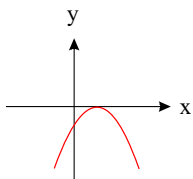
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- چند عدد صحیح در مجموعه جواب نامعادله $|x - 3| \leq 2$ قرار دارد؟

- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۲- معادله ی سهمی مقابل کدام گزینه می تواند باشد؟



- ۱ $y = -x^2 + 4x - 3$ (۱)
- ۲ $y = -x^2 - 2\sqrt{2}x - 2$ (۲)
- ۳ $y = x^2 - 8x + 16$ (۳)
- ۴ $y = -x^2 + 2\sqrt{2}x - 2$ (۴)

۳- به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x ها است؟

- ۱ $(0, +\infty)$ (۱)
- ۲ $(-4, 0)$ (۲)
- ۳ $(-\infty, -4]$ (۳)
- ۴ $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ (۴)

۴- نقطه ی S رأس هر دو سهمی $y = -(x - 3)^2 + k$, $y = x^2 - (k + 2)x + m$ می باشد. مقدار m کدام است؟

- ۱ -10 (۱)
- ۲ 13 (۲)
- ۳ 3 (۳)
- ۴ 10 (۴)



۵- اگر مجموعه جواب نامعادله های $2x - 1 < \frac{x+1}{2} < \frac{2-3x}{2} < b$ ، یکسان باشد، $a + b$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{2}$
- ② -3
- ③ $\frac{14}{3}$
- ④ صفر

۶- خطی که مبدأ مختصات را به رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 9$ وصل می کند، سهمی را در نقطه‌ی دیگری با کدام طول قطع می کند؟

- ① $2,5$
- ② $3,5$
- ③ $4,5$
- ④ $5,5$

۷- اگر $m \in (a, b)$ باشد، منحنی درجه‌ی دوم به معادله $f(x) = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x ها قرار می گیرد. بیش تر مقدار $b - a$ کدام است؟

- ① ۱
- ② ۲
- ③ ۳
- ④ ۴

۸- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{2x-3}{x+2} \right| \leq 2$ به صورت $[a, +\infty)$ است. a کدام است؟

- ① $-\frac{1}{4}$
- ② $-\frac{1}{8}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $-\frac{7}{8}$



۹- اگر دو نامعادله $\begin{cases} A + 3B > 18 \\ 3A + B < 12 \end{cases}$ برقرار باشند، حدود A کدام است؟

① $A > 9$

② $A > \frac{9}{4}$

③ $A < \frac{9}{4}$

④ $A < 9$

۱۰- اگر راس سهمی $y = x^2 + kx + k - 1$ بر روی خط $y = x + 1$ واقع باشد مقدار k کدام است؟

① ۲ و ۳

② ۱ و ۴

③ ۳ و ۱

④ ۲ و ۴

۱۱- مجموعه جواب نامعادله $||x - 2| - 2| < 1$ کدام است؟

① $(-1, 1) \cup (3, 5)$

② $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

③ $(-1, 5)$

④ $(-1, 3)$

۱۲- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^3 - x^2}{3x^3 - 3} > 1$ کدام است؟

① $R - \{1\}$

② $\{x \in R | x < 1\}$

③ \emptyset

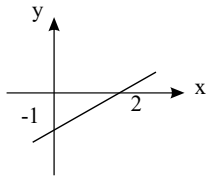
④ $\{x \in R | x > 1\}$



۱۳- کدام یک از معادلات زیر به ازای تمام مقادیر حقیقی a جواب دارد؟

- ① $x^2 - 2x + a = 0$
- ② $a^2 x^2 + x + 1 = 0$
- ③ $x^2 + (a + 1)x + a = 0$
- ④ $-x^2 + ax - 1 = 0$

۱۴- نمودار خط $y = ax + b$ به صورت مقابل است. جدول تعیین علامت آن کدام است؟



- ①

x	-1
y	- ○ +
- ②

x	2
y	+ ○ -
- ③

x	-1
y	+ ○ -
- ④

x	2
y	- ○ +

۱۵- کدام گزینه جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ را به درستی نشان می دهد؟

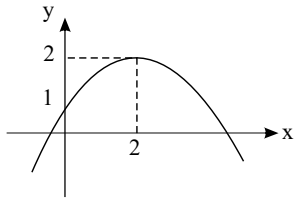
- ①

x	-2	0	1	3
P(x)	+ ○ -	- ○ +	+ ○ -	- ○ +
- ②

x	-1	0	2	3
P(x)	- ن ت +	+ ○ -	+ ن ت +	+ ○ -
- ③

x	-2	0	1	3
P(x)	- ن ت +	+ ○ -	- ن ت +	+ ○ -
- ④

x	-2	0	1
P(x)	- ن ت +	+ ○ -	- ن ت +



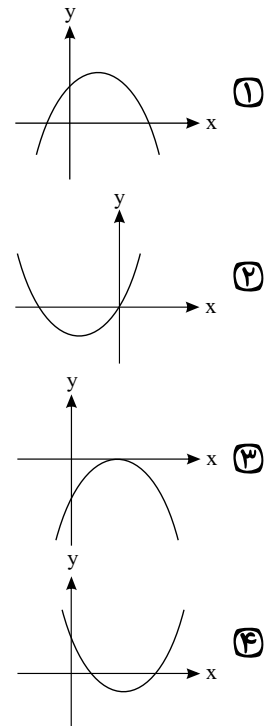
۱۶ - کدام یک از نقاط زیر روی سهمی شکل مقابل قرار دارد؟

- ① (۰, ۴)
- ② $(1, \frac{3}{2})$
- ③ $(-\frac{1}{3}, 0)$
- ④ $(3, \frac{7}{4})$

۱۷ - برای حل معادله $3x(3x - 2) = 17$ به روش مربع کامل کردن، معادله را به صورت $(x + h)^2 = k$ در آورده ایم. مقدار $\frac{k}{h}$ کدام است؟

- ① ۱۸
- ② $\frac{7}{3}$
- ③ -۶
- ④ $-\frac{43}{9}$

۱۸ - نمودارهای زیر مربوط به سهمی $y = ax^2 + bx + c$ هستند. در کدام یک از آنها abc عددی مثبت است؟





۱۹- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-1}{2} - 2 \right| \geq 2$ کدام است؟

① $(-\infty, -1] \cup [9, +\infty)$

② $[1, 9]$

③ $[-1, 9]$

④ $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$

۲۰- حدود a کدام باشد تا نمودار سهمی $y = 2x^2 - ax + 2$ همواره بالای خط $y = x + 1$ قرار گیرد؟

① $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} - 1 < a < 2\sqrt{2} - 1$

③ $-1 < a < 1$

④ $-2\sqrt{2} - 1 < a < \sqrt{2} - 1$

۲۱- اگر $x \geq 3$ باشد، مجموعه جواب‌های نامعادله $x^2 - 2|x - 3| \leq 21$ کدام است؟

① $3 \leq x \leq 4$

② $3 \leq x \leq 5$

③ $3 \leq x \leq \frac{7}{2}$

④ $x \geq 5$

۲۲- اگر عبارت $P(x) = (k-1)x^2 + (kx - x) + 1$ به‌ازای تمام مقادیر x منفی باشد، حدود k کدام است؟

① R

② $k < 1$

③ $1 < k < 5$

④ \emptyset



۲۳- علامت عبارت $P = \frac{(3x+1)(x-1)}{(-x+3)(x^2+1)}$ در کدام بازه زیر همواره منفی است؟

- ① (۰, ۲)
- ② $(-\frac{1}{3}, 1)$
- ③ (-۲, ۱)
- ④ (۲, ۴)

۲۴- اگر $x = -1$ یک ریشه معادله درجه دوم $0 = (m^2 - 2)x^2 + (m + 1)x + 2m - 3$ باشد، ریشه دیگر معادله (برحسب x) کدام است؟

- ① فقط $-\frac{1}{2}$
- ② $\frac{3}{4}$ یا $\frac{1}{2}$
- ③ فقط $\frac{9}{7}$
- ④ $\frac{9}{7}$ یا $-\frac{1}{2}$

۲۵- اگر مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی ۲۵ باشد، قدر مطلق تفاضل مربعات آنها کدام است؟

- ① ۵
- ② ۷
- ③ ۶
- ④ ۸

۲۶- در کدام گزینه، معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف دارد؟

- ① $3x^2 - 2x + 1 = 0$
- ② $2x^2 + x - 2 = 0$
- ③ $5x^2 - 8x + 3 = 0$
- ④ $-5x^2 + 10x - 5 = 0$



۲۷- مجموع جواب‌های معادله‌ی $(x + 2)^2 = (3x - 1)^2$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{3}{5}$
- ③ $\frac{5}{4}$
- ④ $\frac{7}{4}$

۲۸- یکی از جواب‌های معادله‌ی $(m - 1)x^2 - 7x + 2m = 0$ برابر $x = 2$ است. جواب دیگر معادله کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$
- ② ۳
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ ۱

۲۹- در حل معادله‌ی $2x^2 + 3x - 5 = 0$ به روش مربع کامل به تساوی $(x + a)^2 = k$ می‌رسیم. مقدار $a + k$ کدام است؟

- ① $\frac{61}{16}$
- ② $\frac{52}{16}$
- ③ $\frac{49}{16}$
- ④ $\frac{73}{16}$

۳۰- اگر معادله‌ی محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 + ax + b$ به صورت $x = 1$ باشد و نمودار سهمی از نقطه‌ی $(1, -1)$ بگذرد، حاصل

$a - b$ کدام است؟

- ① -۷
- ② -۱
- ③ ۷
- ④ ۱



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$$|x| \leq a \xrightarrow{a > 0} -a < x < a$$

$$|x - 3| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \xrightarrow{+3} 1 \leq x \leq 5 \rightarrow \text{مجموعه اعداد صحیح این بازه} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۲ - گزینه ۴ نمودار داده شده، نمودار یک سهمی است که رو به پایین است ($a < 0$) و در برخورد با محور x ریشه‌های مضاعف دارد ($\Delta = 0$) در میان گزینه‌ها فقط گزینه‌ی ۴ این شرایط را دارد:

$$y = -x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow a < 0 \\ \Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4(-1) \times (-2) = 8 - 8 = 0 \end{cases}$$

دقت: از آن‌جا که طول راس سهمی برابر با $x = -\frac{b}{2a}$ است و در نمودار داده شده طول رأس یک عدد مثبت است، داریم:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$$

به همین دلیل از بین گزینه‌های ۲ و ۴ که فقط در علامت b اختلاف دارند، گزینه‌ی ۴ را برگزیدیم.

گزینه ۲ - ۳

عبارت درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $a < 0$ ، $\Delta < 0$ همواره منفی است.

برای آن که سهمی مذکور همواره پایین محور x باشد، باید عبارت درجه دوم $P(x) = mx^2 - mx - 1$ همواره منفی باشد:

$$a < 0 \rightarrow m < 0 \quad (1)$$

$$\Delta < 0 \rightarrow m^2 - 4m(-1) < 0 \rightarrow m^2 + 4m < 0 \rightarrow m(m + 4) < 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$$

m	-4	0	
Δ	+ 0 -	- 0 +	$-4 < m < 0 \quad (2)$

$$\rightarrow (1) \cap (2) : m \in (-4, 0)$$

۴ - گزینه ۲

اگر معادله‌ی سهمی به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ مرتب شود، رأس آن $S(x_0, y_0)$ است.

$$\text{رأس سهمی } y = ax^2 + bx + c \text{ به فرم } S \left(\begin{array}{l} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{array} \right) \text{ است.}$$

$$y = -(x - 3)^2 + k \rightarrow S \left(\begin{array}{l} 3 \\ k \end{array} \right)$$

$$y = x^2 - (k + 2)x + m \rightarrow S \left(\begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = \frac{k+2}{2} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4m - (k+2)^2}{4} \end{array} \right)$$

و این دو رأس (طبق فرض مسئله) بر هم منطبقند، بنابراین:

$$\begin{cases} 3 = \frac{k+2}{2} \rightarrow k+2 = 6 \rightarrow k = 4 \\ k = \frac{4m - (k+2)^2}{4} \xrightarrow{k=4} 4 = \frac{4m - 36}{4} \rightarrow 16 = 4m - 36 \end{cases}$$

$$\rightarrow 4m = 52 \rightarrow m = 13$$

۵ - گزینه ۴

$$2x - 1 < \frac{x+1}{2} < 2x \rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} < 2x \xrightarrow{\times 2} x+1 < 4x \rightarrow 1 < 3x \rightarrow x > \frac{1}{3} \\ 2x - 1 < \frac{x+1}{2} \xrightarrow{\times 2} 4x - 2 < x+1 \rightarrow 3x < 3 \xrightarrow{\div 3} x < 1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$



حال $\frac{2-3x}{2}$ را می‌سازیم و با $b < \frac{2-3x}{2} < a$ مقایسه می‌کنیم تا a و b به دست آیند:

$$\xrightarrow{\times(-3)} -3 < -3x < -1 \xrightarrow{+2} -1 < 2-3x < 1 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} < \frac{2-3x}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

۶ - گزینه ۳

$$S \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} \\ f\left(-\frac{b}{2a}\right) \end{array} \right. \text{ مختصات رأس سهمی } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ عبارت است از}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ عبارت است از } B \left| \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \end{array} \right., A \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \end{array} \right. \text{ معادله‌ی خط‌گذرنده از دو نقطه‌ی}$$

$$y = x^2 - 4x + 9 \rightarrow \begin{cases} \text{طول رأس} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 1} = 2 \\ \text{عرض رأس} = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 9 = 4 - 8 + 9 = 5 \end{cases}$$

$$\rightarrow S \left| \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \right.$$

حال معادله‌ی خط‌گذرنده از $S \left| \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \right.$ ، $O \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ را می‌نویسیم:

$$y - 0 = \frac{5 - 0}{2 - 0}(x - 0) \rightarrow y = \frac{5}{2}x$$

این خط را با سهمی مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط تقاطع آن‌ها به دست آید:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 9 \\ y = \frac{5}{2}x \end{cases} \rightarrow x^2 - 4x + 9 = \frac{5}{2}x \rightarrow x^2 - 4x - \frac{5}{2}x + 9 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - \frac{13}{2}x + 9 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 169 - 144 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 \pm 5}{4} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = 2$ طول رأس سهمی است؛ بنابراین طول نقطه‌ی دیگر، $x = \frac{9}{2} = 4,5$ است.

۷ - گزینه ۴ به ازای $m \in (a, b)$ باید $f(x) < 0$ باشد:

$$mx^2 - mx - 1 < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow m < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow m^2 - 4m(-1) < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow m(m+4) < 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array} \right. \begin{array}{c|ccc} m & -4 & 0 & \\ \Delta & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow -4 < m < 0 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) = (-4, 0) \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 0 - (-4) = 4$$

فرض مسأله

۸ - گزینه ۱

$$\frac{|2x-3|}{|x+2|} \leq 2 \xrightarrow{\times|x+2|} |2x-3| \leq 2|x+2| \xrightarrow{(\quad)^2} (2x-3)^2 \leq 4(x+2)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 \leq 4x^2 + 16x + 16 \Rightarrow -28x \leq 7 \xrightarrow{\div(-28)} x \geq -\frac{7}{28}$$



$$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow x = [-\frac{1}{4}, +\infty) \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

۹ - گزینه ۳

$$\begin{cases} A + 3B > 18 \\ 3A + B < 12 \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} A + 3B > 18 \\ -9A - 3B > -36 \end{cases}$$

$$-8A > -18 \xrightarrow{\div(-8)} A < \frac{18}{8} \Rightarrow A < \frac{9}{4}$$

۱۰ - گزینه ۴

$S \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} \\ f(-\frac{b}{2a}) \end{array} \right.$ مختصات رأس سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ عبارت است از:

$$\text{طول رأس} = -\frac{b}{2a} = \frac{-K}{2 \times 1} = -\frac{K}{2}$$

از آنجا که رأس روی خط $y = x + 1$ است، عرض آن عبارت است از:

$$y = -\frac{K}{2} + 1$$

پس رأس به صورت $S \left| \begin{array}{l} -\frac{K}{2} \\ -\frac{K}{2} + 1 \end{array} \right.$ به دست می‌آید. از طرفی این نقطه روی سهمی نیز هست:

$$-\frac{K}{2} + 1 = (-\frac{K}{2})^2 + K(-\frac{K}{2}) + K - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{K}{2} + 1 = \frac{K^2}{4} - \frac{K^2}{2} + K - 1 \Rightarrow \frac{-K + 2}{2} = \frac{K^2 - 2K^2 + 4K - 4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-K + 2}{2} = \frac{-K^2 + 4K - 4}{4} \xrightarrow{\times 4} -2K + 4 = -K^2 + 4K - 4$$

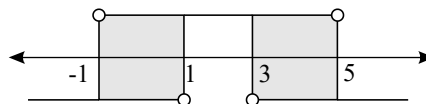
$$\Rightarrow K^2 - 6K + 8 = 0 \Rightarrow (K - 2)(K - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} K = 2 \\ K = 4 \end{cases}$$

۱۱ - گزینه ۱

$|x| \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -a \leq x \leq a$
 $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a$

$$||x - 2| - 2| < 1 \Rightarrow -1 < |x - 2| - 2 < 1 \xrightarrow{+2} 1 < |x - 2| < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 2| < 3 \Rightarrow -3 < x - 2 < 3 \xrightarrow{+2} -1 < x < 5 & (I) \\ |x - 2| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 > 1 \Rightarrow x > 3 \\ x - 2 < -1 \Rightarrow x < 1 \end{cases} & (II) \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$$

۱۲ - گزینه ۳

$$\frac{x^3 - x^2}{3(x^3 - 1)} > 1 \Rightarrow \frac{x^2(x - 1)}{3(x - 1)(x^2 + x + 1)} > 1$$

با فرض $x \neq 1$ صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{3(x^2 + x + 1)} > 1$$

از آنجا که در عبارت $x^2 + x + 1$ دلتا منفی است و a مثبت است، این عبارت همواره مثبت است و می‌توان طرفین نامساوی را بدون تغییر جهت نامساوی در آن ضرب کرد:

$$\frac{x(x^2 + x + 1)}{3} > x^2 + x + 1 \xrightarrow{\times 3} x^3 > 3x^2 + 3x + 3 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 3 < 0$$

اما: در $2x^2 + 3x + 3$ دلتا منفی $a > 0$ است. پس این عبارت همواره مثبت است و نامعادله جواب ندارد.

۱۳ - گزینه ۳ معادله‌ی درجه‌ی ۲ در حالت \geq ؟ جواب دارد.

? را برای همی گزینه‌ها بدست می‌آوریم:

۱) $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(a) = 4 - 4a$

به ازای بعضی از مقادیر a منفی می‌شود.

۲) $\Delta = (-1)^2 - 4(a)^2 \times 1 = 1 - 4a^2$

به ازای بعضی از مقادیر a منفی می‌شود.

۳) $\Delta = (a + 1)^2 - 4 \times 1 \times (a) = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$

به ازای بعضی از مقادیر a منفی می‌شود.

۴) $\Delta = a^2 - 4(-1)(-1) = a^2 - 4$



۱۴ - گزینه ۴ خط مذکور در $x = 2$ از محور x ها عبور می کند (یعنی عرض آن صفر می شود) و علامت عرض های آن از - به + تغییر می کند. پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر خواهد بود:

x	2
y	- 0 +

۱۵ - گزینه ۳

ریشه مضاعف، موجب تغییر علامت نمی شود، یعنی عبارت با عبور از روی ریشه مضاعف علامت خود را حفظ می کند.

$$P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2} = \frac{x(x-3)^2}{(x+2)(x-1)}$$

ریشه ها

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

x	-2	0	1	3
x	-	- 0 +	+ +	+ +
$(x-3)^2$	+	+	+	0 +
x^2+x-2	+ 0 -	- 0 +	+ +	+ +
P(x)	- 0 +	0 -	- 0 +	0 +

۱۶ - گزینه ۴

معادله سهمی با دست های رو به پایین و با رأس $S \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)$ به فرم $y = -a(x - \alpha)^2 + \beta$ است.

رأس این سهمی نقطه $S \left(\frac{2}{3} \right)$ است. پس معادله آن به فرم زیر است:

$$y = -a(x - 2)^2 + 2$$

نقطه $P \left(1 \right)$ روی این سهمی قرار دارد.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow 1 = -a(0 - 2)^2 + 2 \rightarrow 1 = -4a + 2 \rightarrow -4a = -1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

پس معادله سهمی به فرم $y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 2$ است و از میان گزینه ها فقط نقطه $\left(3, \frac{7}{4} \right)$ بروی آن قرار دارد.

۱۷ - گزینه ۳ برای مربع کامل کردن یک عبارت درجهی دو مربع نصف ضریب x را به طرفین اضافه می کنیم؛ البته ضریب x^2 باید یک باشد.

$$3x(3x - 2) = 17 \Rightarrow 9x^2 - 6x = 17$$

$$\div 9 \rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{17}{9} \xrightarrow{+ \left(\frac{1}{3} \right)^2} x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{17}{9} + \left(\frac{1}{3} \right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{17}{9} + \frac{1}{9} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{18}{9}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{1}{3} \\ K = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{h} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6$$

$$(x+h)^2 = k$$

نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) :
 (۱) طول رأس سهمی برابر $-\frac{b}{2a}$ است.
 (۲) اگر $a > 0$ نمودار رو به بالا و اگر $a < 0$ ، نمودار رو به پایین است.
 (۳) اگر $c > 0$ ، نمودار محور عرض ها را در بالای محور طول ها و اگر $c < 0$ ، نمودار محور عرض ها را در پایین محور طول ها قطع می کند و اگر $c = 0$ ، نمودار سهمی از مبدأ مختصات می گذرد.

۱۸ - گزینه ۳

با توجه به نکته بالا، در هر گزینه علامت b, a, c را پیدا می کنیم.

- گزینه ۱: $c > 0, a < 0, -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow abc < 0$ ×
- گزینه ۲: $c = 0 \Rightarrow abc = 0$ ×
- گزینه ۳: $c < 0, a < 0, -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow abc > 0$?
- گزینه ۴: $c > 0, a > 0, -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow abc < 0$ ×

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$|x| \geq a \xrightarrow{a > 0} \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 2 \right| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} - 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 2+2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 4 \xrightarrow{\times 2} x-1 \geq 8 \Rightarrow x \geq 9 \\ \frac{x-1}{2} - 2 \leq -2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq 2-2 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \leq 0 \xrightarrow{\times 2} x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

اجتماع
 \rightarrow مجموعه جواب $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$

۲۰ - گزینه ۲ باید نامعادله $2x^2 - ax + 2 > x + 1$ را حل کنیم:

$$2x^2 - ax - x + 1 > 0 \Rightarrow 2x^2 - x(a+1) + 1 > 0$$

عبارت درجه ۲ فوق زمانی همواره مثبت است که $\Delta < 0$ باشد و ضریب x^2 در آن مثبت باشد (که هست) بنابراین فقط $\Delta < 0$ را اعمال می‌کنیم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-(a+1))^2 - 4 \times 2 \times 1 < 0 \Rightarrow (a+1)^2 - 8 < 0 \Rightarrow (a+1)^2 < 8 \xrightarrow{\sqrt{\quad}}$$

$$|a+1| < \sqrt{8} \Rightarrow |a+1| < 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2} < a+1 < 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2} - 1 < a < 2\sqrt{2} - 1$$

۲۱ - گزینه ۲ داخل قدرمطلق $|3-x|$ به ازای $x \geq 3$ همواره صفر یا منفی است، پس با برداشتن قدرمطلق، عبارت باید قرینه شود؛ یعنی:

$$x \geq 3 \Rightarrow |3-x| = x-3$$

پس در این بازه، نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 - 2(x-3) \leq 21 \Rightarrow x^2 - 2x + 6 - 21 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 \leq 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) \leq 0$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌ها: } \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

x	-3	5
P(x)	+ ○ - ○ +	

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموعه جواب: } -3 \leq x \leq 5 \\ \text{شرایط مسئله: } x \geq 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 3 \leq x \leq 5$$

۲۲ - گزینه ۴ عبارت درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره منفی است:

$$P(x) = (k-1)x^2 + (k-1)x + 1$$

$$a < 0 \Rightarrow k-1 < 0 \Rightarrow k < 1 \quad (1)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (k-1)^2 - 4(k-1) < 0 \Rightarrow (k-1)(k-1-4) < 0 \Rightarrow (k-1)(k-5) < 0$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌ها } \begin{cases} k = 1 \\ k = 5 \end{cases}$$

k	1	5
Δ	+ ○ - ○ +	

$$\text{جواب: } 1 < k < 5 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) = \emptyset$$

۲۳ - گزینه ۲ باید نامعادله $P < 0$ را حل کنیم، پس ریشه‌ها را به دست می‌آوریم و جدول را رسم می‌کنیم:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$-x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ ریشه ندارد!}$$

x	$-\frac{1}{3}$	1	3
$3x+1$	- ○ +	+ ○ +	+ ○ +
$x-1$	- ○ +	- ○ +	+ ○ +
$-x+3$	+ ○ -	+ ○ -	+ ○ -
P	+ ○ -	- ○ +	+ ○ -



پاسخ مسأله $(-\frac{1}{3}, 1)$

$$(m^2 - 2)(-1)^2 + (m + 1)(-1) + 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2 - m - 1 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow (m + 3)(m - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3 \\ m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

حال با هر دو مقدار m ، معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$m = -3 \Rightarrow ((-3)^2 - 2)x^2 + (-3 + 1)x + 2(-3) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 2x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \times 7 \times (-9) = 4 + 252 = 256$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{256}}{14} = \frac{2 \pm 16}{14} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2 + 16}{14} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7} \\ x_2 = \frac{2 - 16}{14} = \frac{-14}{14} = -1 \end{cases}$$

$$m = 2 \Rightarrow (2^2 - 2)x^2 + (2 + 1)x + 2 \times 2 - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + 1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{-3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

پس ریشه دوم معادله $\frac{9}{7}$ یا $\frac{-1}{2}$ است.

۲۵ - گزینه ۲ دو عدد متوالی n و $n + 1$ در نظر می‌گیریم:

$$n^2 + (n + 1)^2 = 25 \Rightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 - 25 = 0 \Rightarrow 2n^2 + 2n - 24 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} n^2 + n - 12 = 0 \Rightarrow (n + 4)(n - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n + 4 = 0 \Rightarrow n = -4 \\ n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

اعداد: ۳، ۴

$$\text{قدر مطلق تفاضل مربعات} = |4^2 - 3^2| = |16 - 9| = |7| = 7$$

۲۶ - گزینه ۴ اگر $\Delta = 0$ معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف دارد.

- ۱) $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times 1 \neq 0$
- ۲) $\Delta = 1 - 4(2)(-2) \neq 0$
- ۳) $\Delta = 64 - 4 \times 5 \times 3 \neq 0$
- ۴) $\Delta = 100 - 4(-5)(-5) = 100 - 100 = 0$

۲۷ - گزینه ۳ $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

$$(x + 2)^2 = (3x - 1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x + 2| = |3x - 1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 3x - 1 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ x + 2 = -(3x - 1) \Rightarrow x + 2 = -3x + 1 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $= \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{6 - 1}{4} = \frac{5}{4}$

۲۸ - گزینه ۱

$$(m - 1)x^2 - 7x + 2m = 0 \xrightarrow{x=2} (m - 1) \times 4 - 7 \times 2 + 2m = 0$$

$$\Rightarrow 4m - 4 - 14 + 2m = 0 \Rightarrow 6m - 18 = 0 \Rightarrow 6m = 18 \Rightarrow m = \frac{18}{6} = 3$$

$m = 3$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1$$

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{4} = 2 \\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$



برای مربع کامل کردن، مربع نصف ضریب x را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم.

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$$

$$+\left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{40+9}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ k = \frac{49}{16} \end{cases}$$

فرض مسئله $(x+a)^2 = k$

$$\Rightarrow a + k = \frac{3}{4} + \frac{49}{16} = \frac{12 + 49}{16} = \frac{61}{16}$$

۳۰ - گزینه ۳

معادله‌ی محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ عبارتست از: $x = -\frac{b}{2a}$

$$y = -2x^2 + ax + b \Rightarrow \text{معادله‌ی محور تقارن: } x = -\frac{a}{2 \times (-2)} = \frac{a}{4} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4$$

فرض مسئله $x = 1$

تا اینجا کار، معادله‌ی سهمی به صورت $y = -2x^2 + 4x + b$ در می‌آید. این سهمی باید از نقطه‌ی $(1, -1)$ بگذرد:

$$-1 = -2(1)^2 + 4(1) + b \Rightarrow -1 = -2 + 4 + b \Rightarrow b = -3$$

$$\text{حکم: } a - b = 4 - (-3) = 7$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۳	۱۱ - ۱	۱۶ - ۴	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۴	۷ - ۴	۱۲ - ۳	۱۷ - ۳	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۱	۱۳ - ۳	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۱
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۴	۱۹ - ۴	۲۴ - ۴	۲۹ - ۱
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۳