علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - رأس سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ نقطه‌ی $S = (1, 3)$ می‌باشد. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(3, 4)$ بگذرد، $f(\sqrt{2} + 1)$ کدام است؟

① ۳٫۵

② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $3\sqrt{2}$

۲ - مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \geq 2$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

① ۴

② ۲

③ ۵

④ ۳

۳ - اگر بازهٔ (a, b) مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $2x^2 - 1 < x$ باشد، $a + b$ کدام است؟

① $\frac{1}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ ۱

④ -2

۴ - به ازای چه مقداری از k، عبارت $x^{۲} + ۳x + k$ همواره مثبت است؟

① $k > \frac{۹}{۴}$

② $k < \frac{۹}{۴}$

③ $k > -\frac{۹}{۴}$

④ $k < -\frac{۹}{۴}$

۵ - خط تقارن سهمی $y = (x-۵)^{۲} + (x+۱)^{۲}$ کدام است؟

① $x = ۱$

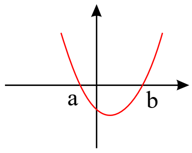
② $x = ۲$

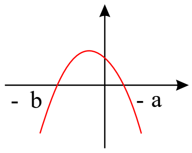
③ $x = ۳$

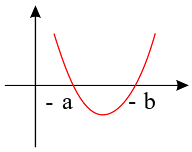
④ $x = ۴$

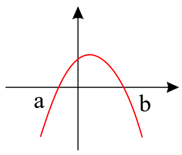
۶ - اگر جدول تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی دوم $P(x)$ به صورت زیر باشد، آن‌گاه نمودار $y = -P(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

x		a		b	
P(x)	+	0	−	0	+

① 

② 

③ 

④ 

۷ - مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{7}{x^2+2x+4} < \frac{|3x-2|}{x^2+2x+4}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۷
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۴

۸ - حدود m کدام باشد تا $x=-1$ بین دو ریشه‌ی معادله‌ی $x^2+mx+2m-3=0$ قرار بگیرد؟

۱) $(6,+\infty)$
۲) $(-2,+\infty)$
۳) $(-\infty,6)$
۴) $(-\infty,2)$

۹ - اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $(m-1)x^2-x-(m^2+1)=0$ برابر -2 باشد، جواب دیگر این معادله کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{5}{2}$
۳) $-\frac{3}{2}$
۴) ۱

۱۰ - کدام عدد مثبت است که وقتی یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع می‌کنیم و دو عدد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم، حاصل برابر ۶ می‌شود؟

۱) ۱۲
۲) ۵
۳) ۱۰
۴) ۶

۱۱- اگر نمودار سهمی $y=(m-3)x^2-2x+1$ همواره بالای محور xها باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<4$

۲) $m>4$

۳) $m>3$

۴) $m<3$

۱۲- خط $x=-1$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=2x^2-mx+n$ است. اگر این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع کند، عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) -4

۲) -2

۳) 2

۴) 4

۱۳- جذر مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x+4=0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{14}$

۲) $3\sqrt{6}$

۳) $2\sqrt{14}$

۴) $4\sqrt{3}$

۱۴- در کدام گزینه قدر مطلق تفاضل دو ریشه بزرگ‌تر است؟

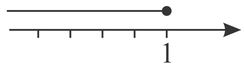
۱) $6x^2=18$

۲) $2x^2-30=0$

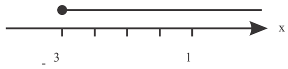
۳) $(2x-3)^2-24=12$

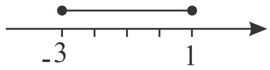
۴) $x^2-2x+3=4$

۱۵ - نمایش جواب نامعادلهٔ $|x+۱| \le ۲$ بر روی محور xها، به چه صورت است؟

۱) 

۲) 

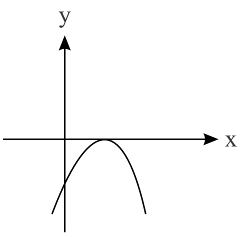
۳) 

۴) 

۱۶ - در یک دورهٔ مسابقهٔ ورزشی، هر تیم با هر یک از تیم‌های دیگر فقط یک بازی انجام داده است. اگر جمعاً ۴۵ بازی صورت گرفته باشد، تعداد تیم‌های این دوره کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۰
۳) ۹
۴) ۸

۱۷ - به‌ازای کدام مقدار a ، شکل مقابل نمودار $y=-x^۲+۴x+a$ است؟



۱) -۱
۲) -۲
۳) -۳
۴) -۴

۱۸ - کدام‌یک از گزینه‌ها، قسمتی از جواب نامعادلهٔ $\frac{x^۲-۹}{۲x+۱} > ۰$ است؟

۱) $۱ < x < ۲$
۲) $۰ < x < ۱$
۳) $-۱ < x < ۰$
۴) $-۲ < x < -۱$

۱۹ - اگر $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی کدام است؟

① $x = ۱$
② $x = ۲$
③ $x = -۱$
④ $x = ۰$

۲۰ - رأس سهمی $y = -۷x^۲ + ۳x - ۱$ در کدام ناحیهٔ مختصات قرار دارد؟

① اول
② دوم
③ سوم
④ چهارم

۲۱ - یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ tاُم از رابطهٔ $h = -۵t^۲ + ۱۸t + ۱۳$ محاسبه می‌شود. تا چند ثانیه پس از آغاز حرکت، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

① ۳٫۲
② ۲
③ ۳
④ ۳٫۶

۲۲ - معادلهٔ $(-۱ + m)x^۲ - mx + ۱ = ۰$ دارای ریشهٔ مضاعف است. m کدام است؟

① ± ۲
② ۲
③ -۲
④ $\pm \frac{۱}{۲}$

۲۳ - مجموع دو عدد ۱۳ و واسطهٔ هندسی آن‌ها ۶ است. عدد کوچک‌تر کدام است؟

① ۶
② ۹
③ ۳
④ ۴

۲۴ - علامت عبارت $-۲x^۲ + ax + b$ مطابق جدول مقابل مشخص شده است. مقدار $b - a$ کدام است؟

x		$\frac{1}{2}$		3	
$-2x^2+ax+b$	$-$	0	$+$	0	$-$

① -۱۰

② ۱۰

③ -۴

④ ۴

۲۵ - مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۲x + ۱ = ۳ - ۲\sqrt{۲}$ کدام است؟

① $\sqrt{۲}$

② ۲

③ $۲\sqrt{۲}$

④ ۳

۲۶ - اگر a، b و c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه $f(x) = ax^۲ + ۲bx + c$ محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

① در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند.

② قطع نمی‌کند.

③ بر محور xها مماس است.

④ هر سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

۲۷ - حاصل‌ضرب سه عدد زوج طبیعی متوالی، ۲۰ برابر مجموع آن سه عدد است. در این صورت مجموع آن سه عدد کدام است؟

① ۲۴

② ۱۲

③ ۴۸

④ ۹۶

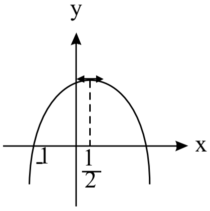
۲۸ - به ازای کدام مقادیر m، سهمی $y = (m+۲)x^۲ - ۲mx + m - ۱$ بالای محور xها است؟

① $m > ۲$

② $m > -۲$

③ $m < -۲$

④ $m < ۲$



۲۹ - سهمی $y = mx^{۲} - \frac{x}{m} + n$ به‌صورت زیر می‌باشد، $m + n$ کدام است؟

① -۳

② -۱

③ ۱

④ ۳

۳۰ - نمایش مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x - ۲| < ۲$ بر روی محور به‌صورت زیر است. اشتراک جواب‌های دو نامعادلهٔ $|x - ۲| < b$ و $|x - a| > ۳$ کدام است؟

① $[۳, ۶]$

② $(۳, ۶)$

③ $(-۲, ۳)$

④ $(-۳, ۶)$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

معادله‌ی سهمی که رأس آن $S\left|\begin{matrix} x_\circ \\ y_\circ \end{matrix}\right.$ باشد، عبارتست از : $y = a(x - x_\circ)^۲ + y_\circ$

اگر رأس سهمی $S\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۳ \end{matrix}\right.$ باشد، معادله‌ی سهمی را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = a(x-۱)^۲ + ۳$$

حال مختصات $\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۴ \end{matrix}\right.$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$۴ = a(۳-۱)^۲ + ۳ \Rightarrow ۴ = ۴a + ۳ \Rightarrow ۴a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

پس معادله‌ی سهمی بصورت زیر در می‌آید:

$$f(x) = \frac{۱}{۴}(x-۱)^۲ + ۳$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۲}+۱) = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۲}+۱-۱)^۲ + ۳ = \frac{۱}{۴} \times ۲ + ۳ = \frac{۱}{۲} + ۳ = ۳/۵$$

۲ - گزینه ۴

$$\frac{۴}{x^۲} - \frac{۲}{x} \geq ۲ \Rightarrow \frac{۴-۲x}{x^۲} \geq ۲ \Rightarrow \frac{۴-۲x}{x^۲} - ۲ \geq \circ \Rightarrow \frac{-۲x^۲-۲x+۴}{x^۲} \geq \circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲x^۲ - ۲x + ۴ = \circ \xrightarrow{-۲} x^۲ + x - ۲ = \circ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = \circ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۱ \end{cases} \\ x^۲ = \circ \Rightarrow x = \circ \end{cases}$$

x		-2		0		1	
$-2x^2-2x+4$	−	0	+		+	0	−
x^2	+		+	0	+		+
$\frac{-2x^2-2x+4}{x^2}$	−	0	+	ت ن	+	0	−

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= [-۲, ۱] - \{\circ\}$ شامل ۳ عدد صحیح است.

۳ - گزینه ۱

$$۲x^۲ - x - ۱ < \circ$$

$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴ \times ۲ \times (-۱) = ۹ \Rightarrow x = \frac{-(-۱) \pm \sqrt{۹}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱+۳}{۴} = ۱ \\ x = \frac{۱-۳}{۴} = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

x		$-\frac{1}{2}$		1	
$2x^2-x-1$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \text{مجموعهٔ جواب} = (-\frac{۱}{۲}, ۱) \\ \text{فرض} \quad (a,b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۱}{۲} \\ b = ۱ \end{cases}$

$$\Rightarrow a + b = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲}$$

۴ - گزینه ۱

عبارت درجهٔ دوم: $ax^۲ + bx + c$ به ازای $a > \circ$ و $\Delta < \circ$ همواره مثبت است.

$P(x) = x^۲ + ۳x + k \Rightarrow \begin{cases} a > \circ & \Rightarrow ۱ > \circ \\ \Delta < \circ & \Rightarrow b^۲ - ۴ac < \circ \Rightarrow ۳^۲ - ۴ \times ۱ \times k < \circ \Rightarrow ۹ - ۴k < \circ \end{cases}$ **: همواره**

$$\Rightarrow ۹ < ۴k \Rightarrow k > \frac{۹}{۴}$$

۵ - گزینه ۲

معادله‌ی خط تقارن سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

ضابطه‌ی داده شده را ساده می‌کنیم تا به فرم استاندارد برسیم:

$$y=(x-5)^2+(x+1)^2=x^2-10x+25+x^2+2x+1=2x^2-8x+26$$

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{2\times 2}=2\Rightarrow x=2$$

۶ ـ گزینه ۴

عبارت درجه‌ی دوم ax^2+bx+c که دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز x_1 و x_2 باشد، در بین دو ریشه علامتی مخالف علامت a و در خارج از فاصله‌ی بین دو ریشه علامتی موافق علامت a دارد.

سطری برای $-P(x)$ (که قرینه‌ی $P(x)$ است) به جدول اضافه می‌کنیم:

x		a		b	
P(x)	+	0	−	0	+
-P(x)	−	0	+	0	−

و این یعنی: $-P(x)$ در $x=a$ و $x=b$ با محور xها تقاطع دارد و در بین a و b بالا محور xها قرار دارد. پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۷ ـ گزینه ۴

نکته: اگر a یک عدد مثبت باشد، آن‌گاه: $|u|<a\Rightarrow -a<u<a$

راه‌حل اول:

در نامعادلهٔ داده شده، عبارت ۴ x^2+2x+4 دارای $\Delta=-12<0$ است. از طرفی چون ضریب x^2 مثبت است، پس این عبارت همواره مثبت می‌باشد. می‌دانیم یک عبارت همواره مثبت را می توان از طرفین یک نامساوی ساده کرد و علامت نامساوی نیز تغییری نمی‌کند. بنابراین:

$$\frac{|3x-2|}{x^2+2x+4}<\frac{7}{x^2+2x+4}\Rightarrow|3x-2|<7\Rightarrow -7<3x-2<7\Rightarrow -5<3x<9\Rightarrow -\frac{5}{3}<x<3$$

بنابراین اعداد صحیح $-1,0,1,2$ در مجموعه‌ی جواب این نامعادله قرار دارند.

راه‌حل دوم:

همهٔ عبارات را به یک سمت نامساوی برده و پس از ساده کردن، تعیین علامت می کنیم:

$$\frac{|3x-2|}{x^2+2x+4}<\frac{7}{x^2+2x+4}\Rightarrow\frac{|3x-2|}{x^2+2x+4}-\frac{7}{x^2+2x+4}<0\Rightarrow\frac{|3x-2|-7}{x^2+2x+4}<0$$

عبارت مخرج دارای $\Delta<0$ و ضریب x^2 مثبت است. پس علامت آن همواره مثبت است. پس برای آنکه علامت کل عبارت منفی باشد، باید علامت صورت منفی باشد.

ادامهٔ راه‌حل مشابه است.

۸ ـ گزینه ۴ راه‌حل اول:

باتوجه به اینکه سهمی داده شده دارای دو ریشه است و ضریب x^2 در آن مثبت است، پس جدول تعیین علامت به صورت زیر می‌باشد:

x					
$x^2+mx+2m-3$	+	0	−	0	+

چون $x=-1$ باید بین دو ریشه باشد، پس باتوجه به جدول تعیین علامت باید داشته باشیم:

$$f(-1)<0\Rightarrow 1-m+2m-3<0\Rightarrow m<2$$

باتوجه به گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی ۴ درست است.

راه‌حل دوم:

از آن‌جایی که بنابر فرض $x=-1$ بین دو ریشه‌ی معادله‌ی $x^2mx+2m-3=0$ واقع شده است، پس این معادله حتماً دارای دو ریشه‌ی متمایز است، یعنی باید $\Delta>0$ باشد، پس داریم:

$$m^2-4(2m-3)>0\Rightarrow m^2-8m+12>0\Rightarrow(m-2)(m-6)>0$$

m		2		6	
(m-2)(m-6)	+	0	−	0	+

$\Rightarrow$ مجموعه‌ی جواب : $(-\infty,2)\cup(6,+\infty)(1)$

از طرفی نمودار سهمی $f(x)=x^2+mx+2m-3$ (باتوجه به علامت ضریب x^2 که مثبت است) رو به بالاست. بنابراین باتوجه به نمودار برای آنکه $x=-1$ بین دو ریشه واقع شده باشد، باید $f(-1)<0$، در نتیجه:

$$f(-1)=1-m+2m-3<0\Rightarrow m<2(2)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که: $m\in(-\infty,2)$

۹ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \;,\; (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab\\ AB=0 \Rightarrow A=0 \;\text{یا}\; B=0\\ ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac\\ x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\end{array}}$$

جواب هر معادله در خود معادله صدق می‌کند بنابراین $x=-2$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$(m-1)x^2-x-(m^2+1)=0 \xrightarrow{x=-2} 4(m-1)+2-(m^2+1)=0$$

$$\Rightarrow 4m-4+2-m^2-1=0 \Rightarrow -m^2+4m-3=0 \Rightarrow m^2-4m+3=0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \quad \text{غ ق ق}\\ \text{یا}\\ m-3=0 \Rightarrow m=3\end{cases}$$

جواب $m=1$ غیرقابل قبول است زیرا معادلهٔ اصلی را تبدیل به یک معادلهٔ درجهٔ ۱ می‌کند که تنها یک جواب دارد.

با جایگذاری $m=3$ داریم:

$$m=3 \Rightarrow 2x^2-x-10=0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta=1-4(2)(-10)=81\\ x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{81}}{2(2)}=\begin{cases}\dfrac{1+9}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{1-9}{4}=\dfrac{-8}{4}=-2\end{cases}\end{cases}$$

۱۰ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l}(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab\\ AB=0 \Rightarrow A=0 \;\text{یا}\; B=0\end{array}}$$

برای عدد مثبت x داریم:

$$(\frac{1}{3}x+1)(\frac{1}{4}x+1)=6 \xrightarrow{\times 12} (x+3)(x+4)=72$$

$$\Rightarrow x^2+7x+12=72 \Rightarrow x^2+7x-60=0 \Rightarrow (x+12)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+12=0 \Rightarrow x=-12\\ x-5=0 \Rightarrow x=5\end{cases} \xrightarrow{x>0} x=5$$

۱۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: سهمی‌ای که همواره بالای محور xهاست یعنی همواره مثبت است. یعنی در معادلهٔ آن $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$

داریم:

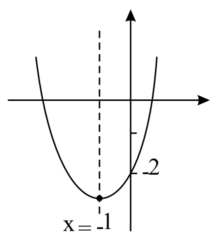
$$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow (-2)^2-4(m-3)(1)<0 \Rightarrow 4-4m+12<0 \Rightarrow 16<4m \Rightarrow 4<m \qquad (I)\\ a>0 \Rightarrow m-3>0 \Rightarrow m>3 \qquad (II)\end{cases}$$

$$I\cap II: m>4$$

۱۲ - گزینه ۱

می‌دانیم: رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ نقطهٔ $S\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{2a}\\ f(\frac{-b}{2a})\end{array}\right.$ است.

با رسم سهمی مفروض داریم:



$$S\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{2a}=-\frac{(-m)}{2(2)}=-1 \Rightarrow \frac{m}{4}=-1 \Rightarrow m=-4\\ f(\frac{-b}{2a})\end{array}\right.$$

$$y=2x^2+4x+n \xrightarrow{(0,-2)} -2=n$$

$$\Rightarrow f(\frac{-b}{2a})=f(\frac{-4}{4})=f(-1)=2(-1)^2+4(-1)-2=-4$$

۱۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: ریشه‌های معادلهٔ درجه دوی $ax^2+bx+c=0$ برابر است با $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x^2-8x+4=0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{64-4(1)(4)}=\sqrt{48}=\sqrt{4\times 12}=2\sqrt{12}$$

$$x=\frac{-(-۸)\pm\sqrt{۴۸}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\dfrac{۸+۲\sqrt{۱۲}}{۲}=۴+\sqrt{۱۲}\\ x_۲=\dfrac{۸-۲\sqrt{۱۲}}{۲}=۴-\sqrt{۱۲}\end{cases}$$

جذر مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با $\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲}$. بنابراین داریم:

$$\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲}=\sqrt{(۴+\sqrt{۱۲})^۲+(۴-\sqrt{۱۲})^۲}=\sqrt{۱۶+۱۲+۸\sqrt{۱۲}+۱۶+۱۲-۸\sqrt{۱۲}}=\sqrt{۵۶}=۲\sqrt{۱۴}$$

۱۴ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{x^۲=a^۲\Rightarrow x=\pm a}$ و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوی $ax^۲+bx+c=۰$ برابر است با $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$

بررسی گزینه‌ها:

$$۱)\quad ۶x^۲=۱۸\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}=|x_۲-x_۱|=\left|\sqrt{۳}+\sqrt{۳}\right|=۲\sqrt{۳}$$

$$۲)\quad ۲x^۲-۳۰=۰\Rightarrow ۲x^۲=۳۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۵}\Rightarrow|x_۲-x_۱|=\left|\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۵}\right|=۲\sqrt{۱۵}$$

$$۳)\quad (۲x-۳)^۲-۲۴=۱۲\Rightarrow(۲x-۳)^۲=۳۶\Rightarrow ۲x-۳=\pm۶$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x-۳=۶\Rightarrow ۲x=۹\Rightarrow x=۴/۵\\ ۲x-۳=-۶\Rightarrow ۲x=-۳\Rightarrow x=-۱/۵\end{cases}$$

$$|x_۱-x_۲|=|۴/۵+۱/۵|=۶$$

$$۴)\quad x^۲-۲x+۳=۴\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\dfrac{-(-۲)+\sqrt{۴-۴(۱)(-۱)}}{۲}=۱+\sqrt{۲}\\ x_۲=\dfrac{-(-۲)-\sqrt{۴-۴(۱)(-۱)}}{۲}=۱-\sqrt{۲}\end{cases}$$

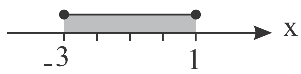
$$|x_۱-x_۲|=\left|۱+\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۲}\right|=۲\sqrt{۲}$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲ پاسخ تست است.

۱۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{|x|\le a\Rightarrow -a\le x\le a}$

$$|x+۱|\le۲\Rightarrow-۲\le x+۱\le۲\Rightarrow-۳\le x\le۱$$



۱۶ - گزینه ۲ هر تیم با سایر تیم‌ها به‌غیر از خودش بازی می‌کند. بنابراین اگر n تیم داشته باشیم، $\dfrac{n(n-۱)}{۲}$ بازی داریم.

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵\Rightarrow n(n-۱)=۹۰\Rightarrow n=۱۰$$

۱۷ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\text{اگر } \Delta=۰ \text{ باشد، آنگاه سهمی در یک نقطه با محور } x\text{ها مماس می‌گردد}}$

$$\Delta=۰\Rightarrow ۴^۲-۴(-۱)(a)=۰\Rightarrow ۴^۲+۴a=۰\Rightarrow ۴(۴+a)=۰\Rightarrow ۴+a=۰\Rightarrow a=-۴$$

۱۸ - گزینه ۴ عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{cases}x^۲-۹=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=-۳\end{cases}\\ ۲x+۱=۰\Rightarrow ۲x=-۱\Rightarrow x=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

		-3		$-\frac{1}{2}$		3	
x^2-9	+	0	−		−	0	+
$2x+1$	−		−	0	+		+
$\frac{x^2-9}{2x+1}$	−	0	+	ن ت	−	0	+

$$\Rightarrow x\in(-۳,-\frac{۱}{۲})\cup(۳,+\infty)$$

۱۹ - گزینه ۳

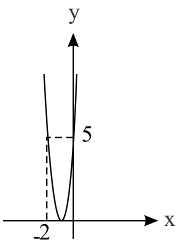
می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ معادلهٔ خط تقارن $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

$$y=ax^۲+bx+c\xrightarrow{(۰,۵)}۵=c$$
$$\xrightarrow{(-۲,۵)}a\times(-۲)^۲+b(-۲)+۵=۵\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow ۴a=۲b\Rightarrow ۲a=b$$
$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-b}{b}=-۱$$

راه حل دوم:

طبق فرض، دو نقطهٔ $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ روی این سهمی قرار دارند. با توجه به اینکه این دو نقطه دارای عرض یکسان هستند، پس نسبت به خط تقارن، قرینهٔ یکدیگرند.

بنابراین خط تقارن سهمی، همان خط تقارن این دو نقطه می‌باشد که به‌صورت $x=\frac{-۲+۰}{۲}=-۱$ است.



۲۰ - گزینه ۴

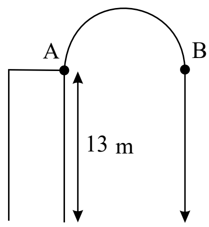
می‌دانیم: رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ نقطهٔ $S\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{۲a}\\ f(\frac{-b}{۲a})\end{array}\right.$ است.

$$S\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{۲(-۷)}=\frac{-۳}{-۱۴}=\frac{۳}{۱۴}\\ f(\frac{-b}{۲a})=-۷(\frac{۳}{۱۴})^۲+۳(\frac{۳}{۱۴})-۱=\frac{-۷\times ۹}{۱۴\times ۱۴}+\frac{۹}{۱۴}-\frac{۱۴}{۱۴}=\frac{-۹+۱۸-۲۸}{۲۸}=\frac{-۱۹}{۲۸}\end{array}\right.$$

۲۱ - گزینه ۴

رابطهٔ ارتفاع جسم از سطح زمین، یک سهمی به معادلهٔ $h(t)=-۵t^۲+۱۸t+۱۳$ است. با توجه به شکل باید t_B یعنی زمانی که جسم به نقطهٔ B می‌رسد را به‌دست بیاوریم. ارتفاع نقطهٔ B برابر ۱۳ متر است. پس باید معادلهٔ $h(t)=۱۳$ را حل کنیم.

$$h(t)=۱۳\Rightarrow -۵t^۲+۱۸t+۱۳=۱۳\Rightarrow -۵t^۲+۱۸t=۰$$
$$t(-۵t+۱۸)=۰\Rightarrow t=۰ \text{ یا } t=\frac{۱۸}{۵}=۳/۶$$



با توجه به شکل $t=۰$ مربوط به نقطهٔ A است. پس $t_B=۳/۶$

۲۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف است هرگاه $\Delta=۰$

$$\Delta=۰\Rightarrow b^۲-۴ac=۰\Rightarrow m^۲-۴(-۱+m)(۱)=۰\Rightarrow m^۲-۴m+۴=۰\Rightarrow (m-۲)^۲=۰\Rightarrow m=۲$$

۲۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: واسطهٔ هندسی دو عدد a و c برابر است با $b^۲=ac$

$$a+c=۱۳\Rightarrow a=۱۳-c$$
$$ac=۶^۲\Rightarrow c(۱۳-c)=۳۶\Rightarrow -c^۲+۱۳c=۳۶\Rightarrow c^۲-۱۳c+۳۶=۰$$
$$\Rightarrow (c-۹)(c-۴)=۰\Rightarrow \begin{cases}c=۹\\ c=۴\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=۴\\ a=۹\end{cases}$$

بنابراین عدد کوچکتر ۴ است.

۲۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: نقاط تغییر علامت در جدول تعیین علامت، ریشه‌های معادله هستند
ریشهٔ هر معادله در خود معادله صدق می‌کند

$$-۲x^۲+ax+b=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۳\Rightarrow -۱۸+۳a+b=۰\Rightarrow ۳a+b=۱۸\\ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{-۱}{۲}+\frac{a}{۲}+b=۰\Rightarrow \frac{a}{۲}+b=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$
-\begin{cases} 3a+b=18 \\ \frac{a}{2}+b=\frac{1}{2} \end{cases}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \frac{5a}{2}=\frac{35}{2} \Rightarrow 5a=35 \Rightarrow a=7 \\ 3a+b=18 \xrightarrow{a=7} 21+b=18 \Rightarrow b=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow b-a=-3-7=-10
$$

۲۵ ـ گزینه ۲

می‌دانیم : ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید که در آن $\Delta=b^2-4ac$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

روش اول:

$$
x^2-2x+1=3-2\sqrt{2} \Rightarrow x^2-2x-2+2\sqrt{2}=0 \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2\sqrt{2}-2 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4-4(1)(2\sqrt{2}-2)}}{2(1)} \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{12-8\sqrt{2}}}{2}
$$

$$
\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}: x_1+x_2=\frac{2+\sqrt{12-8\sqrt{2}}}{2}+\frac{2-\sqrt{12-8\sqrt{2}}}{2}
$$

$$
=\frac{2+\sqrt{12-8\sqrt{2}}+2-\sqrt{12-8\sqrt{2}}}{2}=\frac{4}{2}=2
$$

روش دوم:

$$
x^2-2x+1=3-2\sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2=2-2\sqrt{2}+1
$$

$$
\Rightarrow (x-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \Rightarrow |x-1|=\left|\sqrt{2}-1\right|
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{2}-1 \\ x-1=1-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ x_2=2-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=x_1+x_2=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2
$$

۲۶ ـ گزینه ۳

می‌دانیم : اگر a,b,c سه جمله متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند آن‌گاه $b^2=ac$ تعداد جواب‌های معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ برحسب Δ به‌صورت زیر است.

$$
\begin{cases} \Delta=0 \rightarrow \quad \text{ریشه مضاعف}/\ \text{مماس بر محور } x \\ \Delta>0 \rightarrow \quad \text{دو ریشه}/\ \text{در دو نقطه متقاطع با محور } x \\ \Delta<0 \rightarrow \quad \text{بدون ریشه}/\ \text{عدم تقاطع با محور } x \end{cases}
$$

$$
b^2=ac \quad (I)
$$

$$
\Delta=(2b)^2-4(a)(c)=4b^2-4ac \overset{(I)}{=\!=} 4b^2-4b^2=0
$$

بنابراین نمودار معادلهٔ مورد نظر بر محور xها مماس است.

۲۷ ـ گزینه ۱

می‌دانیم : ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید که در آن $\Delta=b^2-4ac$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

سه عدد زوج متوالی را به‌صورت $x, x+2, x+4$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$
x(x+2)(x+4)=20(x+x+2+x+4) \Rightarrow x(x+2)(x+4)=20(3x+6)
$$

$$
\Rightarrow x(x+2)(x+4)=20\times 3(x+2) \Rightarrow x(x+4)=60 \Rightarrow x^2+4x=60
$$

$$
\Rightarrow x^2+4x-60=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(-60)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{256}}{2}
$$

$$
\Rightarrow x\begin{cases} \frac{-4+16}{2}=6 \\ \frac{-4-16}{2}=-10 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow x+x+2+x+4 \overset{x=6}{=\!=} 24
$$

۲۸ - گزینه ۱

می‌دانیم: سهمی درجه دوم $y = ax^{۲} + bx + c$ همواره مثبت است (بالای محور xهاست) هرگاه $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \Rightarrow (-۲m)^{۲} - ۴(m+۲)(m-۱) < ۰ \Rightarrow ۴m^{۲} - ۴m^{۲} - ۴m + ۸ < ۰ \Rightarrow -۴m + ۸ < ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (I) \\ a > ۰ \Rightarrow m + ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (II) \end{cases}$$

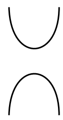
$I \cap II : m > ۲$

۲۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $y = ax^{۲} + bx + c$ مختصات رأس سهمی $\left| \begin{matrix} \frac{-b}{۲a} \\ f(\frac{-b}{۲a}) \end{matrix} \right.$ است.

$a > ۰$

$a < ۰$



$\begin{cases} a > ۰ \rightarrow \text{تقعر رو به بالا} \\ a < ۰ \rightarrow \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۲} = \frac{-(-\frac{۱}{m})}{۲m} \Rightarrow \frac{۱}{۲m^{۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m^{۲} = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

$\xrightarrow{m<0}$  $\Rightarrow y = -x^{۲} + x + n$ دهانهٔ سهمی به سمت پایین است.

نقطهٔ $A(-۱, ۰)$ روی سهمی قرار دارد. در نتیجه:

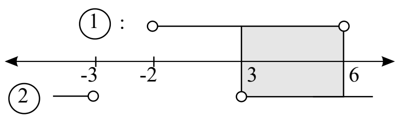
$$۰ = -(-۱)^{۲} + (-۱) + n \Rightarrow ۰ = -۱ - ۱ + n \Rightarrow n = ۲ \Rightarrow m + n = -۱ + ۲ = ۱$$

۳۰ - گزینه ۲ $\boxed{|x| < a \xrightarrow{a>۰} -a < x < a}$ $\boxed{|x| > a \Rightarrow x > a \text{ یا } x < -a}$

$$|x-۲| < ۲ \Rightarrow -۲ < x - ۲ < ۲ \xrightarrow{+۲} ۰ < x < ۴ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ b = ۴ \end{cases}$$

حال دو نامعادلهٔ $|x-۲| < ۴$ و $|x - ۰| > ۳$ را حل می‌کنیم و اشتراک جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} |x-۲| < ۴ \Rightarrow -۴ < x - ۲ < ۴ \xrightarrow{+۲} -۲ < x < ۶ \qquad (۱) \\ |x| > ۳ \Rightarrow \begin{cases} x > ۳ \\ \text{یا} \\ x < -۳ \end{cases} \qquad (۲) \end{cases}$$



اشتراک $= (۳, ۶)$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۴	۱۱ - ۲	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۴	۷ - ۴	۱۲ - ۱	۱۷ - ۴	۲۲ - ۳	۲۷ - ۱
۳ - ۱	۸ - ۴	۱۳ - ۳	۱۸ - ۴	۲۳ - ۴	۲۸ - ۱
۴ - ۱	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۱	۲۹ - ۳
۵ - ۲	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲