نام آزمون: معادله ها و نامعادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - نمودار سهمی به معادلهٔ $y = a^{۲}x^{۲} + bx - c^{۲}$ محور xها را در نقاطی به‌طول ۲ و -۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۳,۳)$ عبور کند، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ $(-\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۲})$ کدام است؟

① ۴

② $۲\sqrt{۲}$

③ ۳

④ $\sqrt{۱۰}$

۲ - تعداد اعداد طبیعی که فاصلهٔ جذر آن‌ها از عدد ۱۶، کم‌تر از یک واحد است، کدام است؟

① ۶۳

② ۶۵

③ ۶۷

④ ۸۲

۳ - اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - (۳a + ۱)x + ۲a^{۲} + ۲ = ۰$ باهم برابر باشند، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

① $-\frac{۱}{۲}$

② صفر

③ ۲

④ -۷

۴ - پدری از پسرش ۲۵ سال بزرگ‌تر است. اگر ۵ سال بعد حاصل‌ضرب سن پدر و پسر برابر ۹۰۰ باشد، آن‌گاه مجموع سن کنونی پدر و پسر کدام است؟

① ۴۰

② ۳۵

③ ۶۵

④ ۵۵

۵ - اگر $S(\frac{۵}{۶}, -\frac{۱}{۱۲})$ رأس سهمی $y = ۳x^۲ + bx + c$ باشد، آن‌گاه مجموع طول و عرض نقاط تلاقی آن با محورهای مختصات کدام است؟

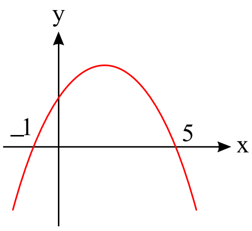
① $\frac{۳}{۱۱}$

② $\frac{۱۱}{۳}$

③ $\frac{۵}{۳}$

④ $\frac{۱۰}{۳}$

۶ - معادلهٔ سهمی مقابل کدام می‌تواند باشد؟



① $y = x^۲ - ۲x + ۵$

② $y = x^۲ - ۴x + ۵$

③ $y = -x^۲ + ۴x + ۵$

④ $y = -x^۲ - ۴x + ۵$

۷ - طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه به‌صورت $۲x + ۳$، $x + ۶$ و $۲x - ۳$ است. اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟ ($۲x + ۳$ طول وتر مثلث است.)

① ۳٫۶

② ۱۲

③ ۲۴

④ ۷٫۲

۸ - اگر خط $y = ۳x$ بر سهمی $y = x^۲ + mx + ۱$ مماس باشد، m کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۹ - نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ محور yها را در نقطه‌ای به‌عرض ۲ و محور xها را در نقاطی به‌طول ۱− و ۲ قطع کرده است. حداکثر مقدار y چقدر است؟

(۱) حداکثر مقدار ندارد.

(۲) $-\frac{۱}{۲}$

(۳) $\frac{۱}{۲}$

(۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۰ - نقطهٔ $(-۲, -۴)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y = -x^۲ - ax + ۲b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

(۱) ۸−

(۲) ۴−

(۳) ۴

(۴) ۸

۱۱ - اگر معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ + bx + c = ۰$ دارای ریشهٔ مضاعف $x = ۴$ باشد، مقدار $b + c$ کدام است؟

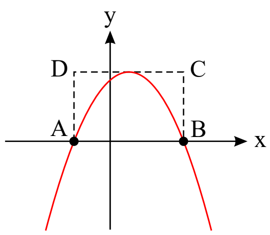
(۱) ۱۶

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۳۲

۱۲ - اگر نمودار سهمی $y = \frac{-x^۲}{۲} + \frac{۳x}{۲} + ۵$ به‌صورت زیر باشد، مساحت مستطیل $ABCD$ کدام است؟



(۱) $\frac{۲۴۵}{۶}$

(۲) $\frac{۳۲۴}{۵}$

(۳) $\frac{۳۴۳}{۸}$

(۴) $\frac{۲۴۵}{۴}$

۱۳ - معادلهٔ $(x^2-x)^2+(x^2-x)-12=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۴ - در تابع $f(x)=\left|\left|\dfrac{x-1}{2}+1\right|-1\right|$ در صورتی که دامنه، بازهٔ $[-2,3]$ باشد، بزرگ‌ترین بازه برای برد این تابع کدام است؟

(۱) $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

(۲) $[-1,1]$

(۳) $[0,1]$

(۴) $[-2,1]$

۱۵ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x<\left|\dfrac{x+8}{2x+1}\right|$ کدام است؟

(۱) $[-2,2]$

(۲) $(0,2)$

(۳) $\mathbb{R}-[-2,2]$

(۴) $(2,+\infty)$

۱۶ - اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x+2|+b<a$ به صورت (n,m) باشد، $m+n$ کدام است؟

(۱) $2a-2b$

(۲) $a-b$

(۳) 4

(۴) -4

۱۷ - چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $\frac{-2x^2+x-1}{2x^2-x-3} \geq 0$ صدق می‌کند؟

① ۲

② ۳

③ صفر

④ بی‌شمار

۱۸ - مجموعه جواب نامعادلهٔ $ax^2+bx+c<0$ به صورت $(-2,3)$ است. اگر a عددی صحیح باشد، $b+c$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

① ۱۴

② -14

③ ۱۰

④ -10

۱۹ - به‌ازای کدام مقادیر m سهمی به معادلهٔ $y=(m-1)x^2+mx+m$ بالای خط به معادلهٔ $y=2x+1$ قرار می‌گیرد؟

① $m>1$

② $m>\frac{4}{3}$

③ $0<m<\frac{4}{3}$

④ $1<m<\frac{4}{3}$

۲۰ - یک جسم از بالای یک ساختمان که ۲۰ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطهٔ $h=-5t^2+20t+20$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین در مسیر برگشت به سطح زمین بیشتر از ۳۵ متر خواهد بود؟

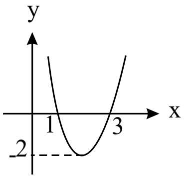
① $(1,3)$

② $(2,3)$

③ $(0,3)$

④ $(1,2)$

۲۱ - اگر نمودار زیر، مربوط به سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟



① -۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۲۲ - اگر رأس نمودار سهمی با ضابطه‌ی $y = mx^۲ + ۲x + ۳$ بر خط $y = ۲$ واقع باشد و دهانهٔ این سهمی به سمت پایین باز شود، آنگاه طول رأس سهمی کدام است؟

① -۱
② ۱
③ ۲
④ چنین سهمی‌ای وجود ندارد.

۲۳ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $||x + ۳| - ۲| < ۱$ کدام است؟

① $(-۴, -۲) \cup (-۲, ۰)$
② $(-۶, -۴) \cup (-۲, ۰)$
③ $(۰, ۲) \cup (۴, ۶)$
④ $(-۶, -۳) \cup (-۳, -۲)$

۲۴ - اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|ax + ۵| < ۳$ به صورت بازهٔ $(b, ۴)$ باشد، $a + b$ کدام است؟

① ۱
② -۱
③ ۳
④ ۱۵/۵

۲۵ – معادلهٔ سهمی‌ای که محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۲ و محور xها را در $x=-۱$ و $x=۳$ قطع کند، کدام است؟

(۱) $y=\frac{۲}{۳}x^{۲}-\frac{۴}{۳}x-۲$

(۲) $y=\frac{۲}{۳}x^{۲}+\frac{۴}{۳}x-۲$

(۳) $y=\frac{۱}{۳}x^{۲}-\frac{۴}{۳}x+۲$

(۴) $y=\frac{۱}{۳}x^{۲}-\frac{۲}{۳}x-۲$

۲۶ – مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(-x^{۲}+۲x-۲)(x^{۲}-۳x+۲)\geq ۰$ کدام است؟

(۱) $(-\infty,۱]\cup[۲,+\infty)$

(۲) $[۱,۲]$

(۳) $[۱-\sqrt{۳},۱]\cup[۲,۱+\sqrt{۳}]$

(۴) $(-\infty,۱-\sqrt{۳})\cup[۱+\sqrt{۳},+\infty)$

۲۷ – مجموعهٔ مقادیر m کدام باشد تا نابرابری $(m+۱)x^{۲}-۲(m+۱)x+۲m-۱>۰$ به‌ازای هر x برقرار باشد؟

(۱) $\{m\in\mathbb{R}|m>\frac{۵}{۷}\}$

(۲) $\{m\in\mathbb{R}|m>-۱\}$

(۳) $\{m\in\mathbb{R}|-۱<m<\frac{۵}{۷}\}$

(۴) $\{m\in\mathbb{R}|m>۲\}$

۲۸ – اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۴x+۱<۳x-۱\leq ۵x+a$ بازهٔ $[-۴,-۲)$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) -۶

(۲) -۷

(۳) ۶

(۴) ۷

۲۹- هرگاه $(-\infty, \frac{2m-7}{3}) \cup [\frac{m+2}{2}, +\infty) = \mathbb{R}$ باشد، حدود m کدام است؟

① $[-20, 20]$

② $[20, +\infty)$

③ $(-\infty, 20]$

④ $(-\infty, 20)$

۳۰- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$ کدام است؟

① -2

② 2

③ $2-2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ روش اول:

می‌دانیم: مختصات رأس سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ برابر است با: $S\left|\begin{array}{l} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{array}\right.$

فاصله در نقاط A و B برابر است با: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$

$$y = a^۲x^۲ + bx - c^۲$$

نقاط $(۲, ۰)$، $(-۳, ۰)$ و $(۳, ۳)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\xrightarrow{(۲,۰)} ۴a^۲ + ۲b - c^۲ = ۰ \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-۳,۰)} ۹a^۲ - ۳b - c^۲ = ۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(۳,۳)} ۹a^۲ + ۳b - c^۲ = ۳ \quad (III)$$

$$(I), (II) : - \begin{cases} ۴a^۲ + ۲b - c^۲ = ۰ \\ \underline{۹a^۲ - ۳b - c^۲ = ۰} \end{cases}$$
$$-۵a^۲ + ۵b = ۰ \Rightarrow ۵(b - a^۲) = ۰ \Rightarrow b - a^۲ = ۰ \Rightarrow b = a^۲$$

با جایگذاری $b = a^۲$ در معادلات (II) و (III) داریم:

$$\begin{cases} ۴b + ۲b - c^۲ = ۰ \\ ۹b + ۳b - c^۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶b - c^۲ = ۰ \\ \underline{۱۲b - c^۲ = ۳} \end{cases}$$
$$۶b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$۶b - c^۲ = ۰ \Rightarrow ۶b = c^۲ \xrightarrow{b=\frac{۱}{۲}} ۳ = c^۲$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی داریم:

$$y = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x - ۳$$

$$S\left|\begin{array}{l} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{array}\right. \Rightarrow S\left|\begin{array}{l} \frac{-\frac{۱}{۲}}{۲(\frac{۱}{۲})} = -\frac{۱}{۲} \\ f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} - ۳ = \frac{۱}{۸} - \frac{۲}{۸} - \frac{۲۴}{۸} = \frac{-۲۵}{۸} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} S(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲۵}{۸}) \\ A(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۸}) \end{cases} \Rightarrow |AS| = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (-\frac{۱}{۸} - (-\frac{۲۵}{۸}))^۲} = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$$

روش دوم:

چون سهمی موردنظر دارای ۲ ریشهٔ ۲ و ۳- است، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = a^۲(x - ۲)(x + ۳) \xrightarrow{(۳,۳)} ۳ = a^۲(۳ - ۲)(۳ + ۳) \Rightarrow a^۲ = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x - ۲)(x + ۳) = \frac{۱}{۲}(x^۲ + x - ۶) = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x - ۳$$

$$x_{\text{راس}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_{\text{راس}} = \frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2}) - 3$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8} \Rightarrow S' = (-\frac{1}{2}, -\frac{25}{8})$$

$$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) \text{ از } S' \text{ فاصلهٔ نقطهٔ} = \sqrt{(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}))^2 + (-\frac{1}{8}-(-\frac{25}{8}))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

۲ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\text{برای نشان دادن فاصله از قدرمطلق استفاده می‌کنیم.}}$

$$|16-\sqrt{x}| < 1 \Rightarrow -1 < 16-\sqrt{x} < 1 \Rightarrow -17 < -\sqrt{x} < -15$$

$$\Rightarrow 15 < \sqrt{x} < 17 \Rightarrow 225 < x < 289 \Rightarrow 226 \le x \le 288$$

تعداد اعضاء: $288 - 226 + 1 = 63$

۳ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\text{معادلهٔ درجه دوم } ax^2+bx+c=0 \text{ دارای ریشهٔ مضاعف است هرگاه: } \Delta = 0}$

$$x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-(3a+1))^2 - 4(1)(2a^2+2) = 0$$

$$\Rightarrow 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (a+7)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -7 \end{cases}$$

۴ - گزینه ۴ سن کنونی پسر را x درنظر می گیریم و داریم:

$$\begin{cases} x \\ x+25 \end{cases} \xrightarrow{\text{۵ سال بعد}} \begin{cases} x+5 \\ x+30 \end{cases}$$

$$(x+5)(x+30) = 900 \Rightarrow x^2 + 35x + 150 = 900 \Rightarrow x^2 + 35x - 750 = 0$$

$$(x-15)(x+50) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \Rightarrow \text{مجموع سن کنونی پدر و پسر}: x + x + 25 = 55 \\ x = -5 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

۵ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\text{رأس سهمی به معادلهٔ } y = ax^2+bx+c \text{ برابر است با: } S\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)}$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{-b}{6} \Rightarrow b = -5$$

$$y = 3x^2 + bx + c \xrightarrow{b=-5} y = 3x^2 - 5x + c$$

$$\xrightarrow{(\frac{5}{6}, \frac{-1}{12})} \frac{-1}{12} = 3(\frac{5}{6})^2 - 5(\frac{5}{6}) + c \Rightarrow \frac{-1}{12} = \frac{75}{36} - \frac{150}{36} + c$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{36} - \frac{75}{36} + \frac{150}{36} = c \Rightarrow c = \frac{72}{36} = 2$$

$$y = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow (3x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

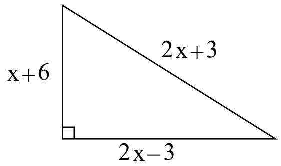
مجموع طول و عرض این سه نقطه: $2 + 1 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

۶ - گزینه ۳

ریشه‌های سهمی باتوجه به شکل برابر است با ۵ و -1 بنابراین داریم: $y = a(x-5)(x+1)$

از آن‌جایی که سهمی دارای ماکزیمم است پس ضریب x^2 (a) باید منفی باشد تنها گزینهٔ ۳ در این شرایط صدق می‌کند.

۷ - گزینه ۴ با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس داریم:

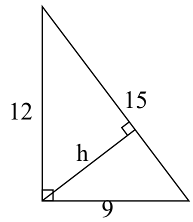


$$(2x+3)^2=(x+6)^2+(2x-3)^2$$

$$4x^2+12x+9=x^2+12x+36+4x^2-12x+9$$

$$x^2-12x+36=0\Rightarrow (x-6)^2=0\Rightarrow x=6$$

با توجه به شکل داریم:



$$\text{(مساحت مثلث)}\ S=\frac{9\times 12}{2}=\frac{h\times 15}{2}\Rightarrow h=\frac{9\times 12}{15}=7/2$$

۸ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\text{خط بر سهمی مماس است، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف باشد.}}$

$$\begin{cases} y=3x \\ y=x^2+mx+1 \end{cases}\Rightarrow x^2+mx+1=3x\Rightarrow x^2+(m-3)x+1=0$$

$$\Delta=0\Rightarrow (m-3)^2-4(1)(1)=0\Rightarrow m^2-6m+9-4=0$$

$$\Rightarrow m^2-6m+5=0\Rightarrow (m-5)(m-1)=0\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=5 \end{cases}$$

۹ - گزینه ۴

$$y=ax^2+bx+c$$

نقاط $(0,2)$، $(-1,0)$ و $(2,0)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند، داریم:

$$\xrightarrow{(0,2)} c=2$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{(-1,0)} a-b+2=0 \\ \xrightarrow{(2,0)} 4a+2b+2=0 \end{matrix}\Rightarrow \begin{cases} a-b+2=0 \\ 4a+2b+2=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 2a-2b+4=0 \\ \underline{4a+2b+2=0} \end{cases}$$

$$6a+6=0\Rightarrow 6a=-6\Rightarrow a=-1$$

$$a-b+2=0\xrightarrow{a=-1} -1-b+2=0\Rightarrow b=1$$

درنتیجه معادلهٔ سهمی برابر است با:

$$y=-x^2+x+2\xrightarrow{a<0} \text{دارای } \max \text{ است.}$$

$$\text{رأس سهمی}\ S\left|\begin{matrix} \dfrac{-b}{2a} \\ \dfrac{-\Delta}{4a} \end{matrix}\right.\Rightarrow y_{\max}=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-\left(1^2-4(-1)(2)\right)}{4(-1)}=-\frac{(1+8)}{-4}=\frac{9}{4}$$

۱۰ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\text{در سهمی به معادلهٔ } y=ax^2+bx+c \text{ رأس سهمی نقطهٔ } S\left|\begin{matrix} \frac{-b}{2a} \\ f(\frac{-b}{2a}) \end{matrix}\right. \text{ است.}}$

$$S\left|\begin{matrix} -2 \\ -4 \end{matrix}\right.\Rightarrow \frac{-(-a)}{2(-1)}=-2\Rightarrow a=4$$

نقطهٔ $(-2,-4)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، داریم:

$$y=-x^2-4x+2b\xrightarrow{(-2,-4)} -4=-(-2)^2-4(-2)+2b\Rightarrow -4=-4+8+2b\Rightarrow b=-4$$

نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها یعنی مقدار سهمی به‌ازای $x=0$ برابر است با:

$$y=-x^2-4x-8\rightarrow f(0)=-8$$

۱۱ - گزینه ۱

$x=4$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ درجهٔ دوم است؛ داریم:

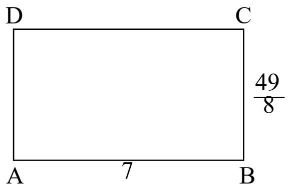
$$2x^2+bx+c=2(x-4)^2=2x^2-16x+32\Rightarrow b+c=-16+32=16$$

۱۲ - گزینه ۳ A و B ریشه‌های سهمی و C و D عرض رأس سهمی هستند؛ بنابراین داریم:

$$y=\frac{-x^2}{2}+\frac{3x}{2}+5$$
$$\frac{-x^2}{2}+\frac{3x}{2}+5=0\Rightarrow -x^2+3x+10=0\Rightarrow x^2-3x-10=0$$
$$\Rightarrow (x-5)(x+2)=0\Rightarrow \begin{cases} x_A=-2\\ x_B=5\end{cases}\Rightarrow |AB|=7$$

(رأس سهمی) $S\left|\begin{array}{l}\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{2(\frac{-1}{2})}=\dfrac{3}{2}\\ f(\dfrac{-b}{2a})=f(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{9}{8}+\dfrac{9}{4}+5=\dfrac{-9+18+40}{8}=\dfrac{49}{8}=|CB|\end{array}\right.$

باتوجه به اعداد به‌دست آمده داریم:



$$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{7\times 49}{8}=\frac{343}{8}$$

۱۳ - گزینه ۳ با تغییر متغیر $t=(x^2-x)$ داریم:

$$t^2+t-12=0\Rightarrow (t+4)(t-3)=0\Rightarrow\begin{cases}t=-4\\ t=3\end{cases}$$

$x^2-x=-4\Rightarrow x^2-x+4=0\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(+4)=1-16=-15<0$ جواب ندارد.

$$x^2-x=3\Rightarrow x^2-x-3=0\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(-3)=1+12=13$$

$\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ ۲ جواب دارد.

۱۴ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{|x|\geq 0}$

$$D_f=[-2,3]\Rightarrow -2\leq x\leq 3\Rightarrow -3\leq x-1\leq 2\Rightarrow \frac{-3}{2}\leq\frac{x-1}{2}\leq 2$$
$$\xrightarrow{|x|\geq 0} 0\leq\left|\frac{x-1}{2}\right|\leq 2\Rightarrow -1\leq\left|\frac{x-1}{2}\right|-1\leq 1\Rightarrow R_f=[-1,1]$$

۱۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{|x|<a\Rightarrow -a<x<a,\ a\geq 0}$

$$\left|\frac{x+8}{2x+1}\right|<x\Rightarrow -x<\frac{x+8}{2x+1}<x$$
$$I:\frac{x+8}{2x+1}<x\Rightarrow\frac{x+8}{2x+1}-x<0\Rightarrow\frac{x+8-2x^2-x}{2x+1}<0\Rightarrow\frac{-2x^2+8}{2x+1}<0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-2x^2+8=0\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\\ 2x+1=0\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

		-2	$-\frac{1}{2}$	2	
$-2x^2+8$	−	0 +	+	0 −	
$2x+1$	−	−	0 +	+	
$\frac{-2x^2+8}{2x+1}$	+	0 −	ت.ن +	0 −	

$$\Rightarrow x\in(-2,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$$

$$II:-x<\frac{x+8}{2x+1}\Rightarrow\frac{x+8}{2x+1}+x>0\Rightarrow\frac{x+8+2x^2+x}{2x+1}>0\Rightarrow\frac{2x^2+2x+8}{2x+1}>0$$

$\Rightarrow\begin{cases}2x^2+2x+8=0\Rightarrow a=2>0\ \Delta=4-4(2)(8)=4-64=-60<0\\ 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ همواره مثبت

		$-\frac{1}{2}$	
$2x^2+2x+8$	$+$		$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$
$\frac{2x^2+2x+8}{2x+1}$	$-$	ت.ن	$+$

$\Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$

راه حل دوّم: چون حاصل قدر مطلق عبارتی نامنفی است، پس باید x بزرگتر از صفر باشد تا نامعادلهٔ سؤال جواب داشته باشد، یعنی $x > 0$ است. پس:

$$\begin{cases} x+8>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+8}{2x+1} > 0 \Rightarrow \left|\frac{x+8}{2x+1}\right| = \frac{x+8}{2x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x+8}{2x+1} < x \Rightarrow x+8 < 2x^2+x \Rightarrow 2x^2 > 8 \Rightarrow x^2 > 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ \text{یا} \\ x<-2 \end{cases} \xrightarrow{x>0} x>0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}(2,+\infty)$$

۱۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{|x| < a \Rightarrow -a < x < a, a \geq 0}$

$$|x+2| + b < a \Rightarrow |x+2| < a-b$$

$$\Rightarrow b-a < x+2 < a-b \Rightarrow b-a-2 < x < a-b-2 \Rightarrow \begin{cases} n = b-a-2 \\ m = a-b-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m+n = a-b-2+b-a-2 = -4$$

۱۷ - گزینه ۱

$$\frac{-2x^2+x-1}{2x^2-x-3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x^2+x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1-4(-2)(-1) = -7 < 0 : \text{همواره منفی} \\ a=-2<0 \end{cases} \\ 2x^2-x-3=0 \Rightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1\pm5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+5}{4}=\frac{3}{2} \\ x=\frac{1-5}{4}=-1 \end{cases} \end{cases}$$

		-1		$\frac{3}{2}$	
$-2x^2+x-1$	$-$		$-$		$-$
$2x^2-x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{-2x^2+x-1}{2x^2-x-3}$	$-$	ت.ن	$+$	ت.ن	$-$

$\Rightarrow x \in (-1, \frac{3}{2})$

اعداد صحیح موجود در بازهٔ جواب ۰ و ۱ هستند. یعنی ۲ تا

۱۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{x_2 \text{ و } x_1 \text{ ریشه‌های عبارت درجه دوم } a(x-x_1)(x-x_2)=0 \text{ هستند}}$

عبارت ax^2+bx+c در بازهٔ $(-2,3)$ منفی است.

نتیجه می‌گیریم: اولاً ۳ و -2 ریشه‌های عبارت هستند بنابراین:

$$a(x+2)(x-3) = a(x^2-x-6) = ax^2-ax-6a = ax^2+bx+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=-6a \end{cases} \Rightarrow b+c=-7a$$

ثانیاً a عددی مثبت است، چرا که بین دو ریشه علامت عبارت مخالف علامت a است.

با توجه به این دو مورد حاصل $b+c$ باید عددی مضرب -7 باشد که تنها گزینهٔ مضرب -7 گزینهٔ ۲ است.

۱۹ - گزینه ۲

می‌دانیم:

عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases} \Delta<0 \\ a>0 \end{cases}$

عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c همواره منفی است هرگاه $\begin{cases} \Delta<0 \\ a<0 \end{cases}$

$$(m-1)x^2+mx+m > 2x+1 \Rightarrow (m-1)x^2+(m-2)x+m-1>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1 \qquad (I) \\ \Delta<0 \Rightarrow (m-2)^2-4(m-1)(m-1)<0 \Rightarrow m^2-4m+4-4m^2+8m-4<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3m^2+4m<0 \quad -3m^2+4m=0 \Rightarrow m(-3m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\frac{4}{3} \end{cases}$$

		0		$\frac{4}{3}$	
$-3m+4m$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow m<0$ یا $m>\frac{4}{3} \qquad (II)$

$I \cap II = m > \frac{۴}{۳}$

۲۰ - گزینه ۲

می‌دانیم:

رأس سهمی به معادلهٔ $ax^۲ + bx + c$ نقطهٔ $S \left\lvert \begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{matrix} \right.$ است.

$h > ۳۵ \Rightarrow -۵t^۲ + ۲۰t + ۲۰ > ۳۵ \Rightarrow ۵t^۲ - ۲۰t + ۱۵ < ۰$

$\Rightarrow t^۲ - ۴t + ۳ < ۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۳) < ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \\ t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۳ \end{cases}$

		1		3	
$t^2 - 4t + 3$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow ۱ < t < ۳$

جسم تا نقطهٔ رأس سهمی بالا می‌رود و پس از آن در حال بازگشت به زمین قرار می‌گیرد بنابراین:

$S \left\lvert \begin{matrix} -\frac{b}{۲a} = \frac{-۲۰}{۲(-۵)} = \frac{-۲۰}{-۱۰} = ۲ \\ f(۲) \end{matrix} \right.$

بنابراین از لحظه $t = ۲$ به بعد، جسم در حال برگشت به زمین است.

$۱ < t < ۳ \xrightarrow{t > ۲} ۲ < t < ۳ \Rightarrow t \in (۲, ۳)$

۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم:

رأس سهمی به معادلهٔ $ax^۲ + bx + c$ نقطهٔ $S \left\lvert \begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{matrix} \right.$ است.

$y = ax^۲ + bx + c$

$\begin{matrix} \xrightarrow{(۱,۰)} \\ \xrightarrow{(۳,۰)} \end{matrix} \underbrace{\begin{cases} a + b + c = ۰ \\ ۹a + ۳b + c = ۰ \end{cases}}_{۸a + ۲b = ۰ \quad (I)}$

$x_S = \frac{۱ + ۳}{۲} = ۲$

$\xrightarrow{(۲,-۲)} \underbrace{\begin{cases} ۴a + ۲b + c = -۲ \\ a + b + c = ۰ \end{cases}}_{۳a + b = -۲ (II)}$

$\xrightarrow{I, II} \begin{cases} ۸a + ۲b = ۰ \\ ۳a + b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} ۸a + ۲b = ۰ \\ ۶a + ۲b = -۴ \end{cases}}_{۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲}$

۲۲ - گزینه ۴

می‌دانیم:

رأس سهمی به معادلهٔ $ax^۲ + bx + c$ نقطهٔ $S \left\lvert \begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ -\frac{\Delta}{۴a} \end{matrix} \right.$ است.

$-\frac{\Delta}{۴a} = ۲ \Rightarrow \frac{-((۲^۲) - ۴(m)(۳))}{۴(m)} = ۲ \Rightarrow \frac{-۴ + ۱۲m}{۴m} = ۲$

$\Rightarrow -۴ + ۱۲m = ۸m \Rightarrow -۴ = -۴m \Rightarrow m = ۱$

$\Rightarrow y = x^۲ + ۲x + ۳$ دهانه سهمی رو به بالاست

بنابراین چنین سهمی‌ای وجود ندارد.

۲۳ - گزینه ۲

می‌دانیم:

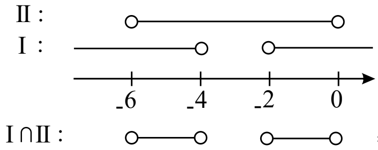
$\lvert x \rvert < a \Rightarrow -a < x < a$
$\lvert x \rvert > a \Rightarrow x > a$ یا $x < -a$

$\lvert \lvert x + ۳ \rvert - ۲ \rvert < ۱ \Rightarrow -۱ < \lvert x + ۳ \rvert - ۲ < ۱$

$\Rightarrow ۱ < \lvert x + ۳ \rvert < ۳$

$I = \lvert x + ۳ \rvert > ۱ \Rightarrow \begin{cases} x + ۳ > ۱ \Rightarrow x > -۲ \\ x + ۳ < -۱ \Rightarrow x < -۴ \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -۴) \cup (-۲, +\infty)$

$II = \lvert x + ۳ \rvert < ۳ \Rightarrow -۳ < x + ۳ < ۳ \Rightarrow -۶ < x < ۰ \Rightarrow x \in (-۶, ۰)$



$= (-6,-4)\cup(-2,0)$

۲۴ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{|x|<a \Rightarrow -a<x<a}$

$|ax+۵|<۳ \Rightarrow -۳<ax+۵<۳ \Rightarrow -۸<ax<-۲$

$\xrightarrow{a>۰\quad \text{فرض}} \begin{cases}\frac{-۸}{a}<x<\frac{-۲}{a}\\ b<x<۴\end{cases} \Rightarrow \frac{-۲}{a}=۴ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$ با فرض اولیهٔ $a>۰$ تناقض دارد پس قابل قبول نیست.

$\xrightarrow{a<۰\quad \text{فرض}} \begin{cases}\frac{-۲}{a}<x<-\frac{۸}{a}\\ b<x<۴\end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{-۸}{a}=۴\Rightarrow a=-۲\\ \frac{-۲}{a}=b\Rightarrow \frac{-۲}{-۲}=b\Rightarrow b=۱\end{array}\right\} \Rightarrow a+b=-۱$

۲۵ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\text{معادلهٔ سهمی به‌صورت } ax^۲+bx+c \text{ است.}}$

$y=ax^۲+bx+c \xrightarrow{(۰,-۲)} c=-۲$

$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{(-۱,۰)} a-b-۲=۰\Rightarrow a-b=۲\\ \xrightarrow{(۳,۰)} ۹a+۳b-۲=۰\Rightarrow ۹a+۳b=۲\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}۳a-۳b=۶\\ ۹a+۳b=۲\end{cases}$
$\overline{۱۲a=۸\Rightarrow a=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}}$

$۳a-۳b=۶ \xrightarrow{a=\frac{۲}{۳}} ۲-۳b=۶ \Rightarrow -۳b=۴ \Rightarrow b=\frac{-۴}{۳}$

$y=\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۴}{۳}x-۲$

۲۶ ـ گزینه ۲

می‌دانیم:
عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a>۰\end{cases}$
عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a<۰\end{cases}$

$(-x^۲+۲x-۲)(x^۲-۳x+۲)\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases}-x^۲+۲x-۲=۰\Rightarrow \Delta=۴-۴(-۱)(-۲)<۰\\ x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۲)(x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x=۱\end{cases}\end{cases}$

		1		2	
$-x^2+2x-2$	−		−		−
x^2-3x+2	+	0	−	0	+
$(-x^2+2x-2)(x^2-3x+2)$	−	0	+	0	−

$\Rightarrow x\in[۱,۲]$

۲۷ ـ گزینه ۴

می‌دانیم:
عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a>۰\end{cases}$
عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a<۰\end{cases}$

$(m+۱)x^۲-۲(m+۱)x+۲m-۱>۰$

$\Rightarrow \begin{cases}a>۰\Rightarrow m+۱>\Rightarrow m>-۱ \quad (I)\\ \Delta<۰\Rightarrow (-۲(m+۱))^۲-۴(m+۱)(۲m-۱)<۰\Rightarrow ۴(m+۱)^۲-۴(m+۱)(۲m-۱)<۰\end{cases}$

$\Rightarrow ۴(m+۱)(m+۱-۲m+۱)<۰\Rightarrow ۴(m+۱)(-m+۲)<۰ \xrightarrow{m+۱>۰} -m+۲<۰$

$\Rightarrow m>۲ \ \ (II)$

$I\cap II=m>۲\Rightarrow \{m\in\mathbb{R}|m>۲\}$

۲۸ ـ گزینه ۴

$۴x+۱<۳x-۱\leq ۵x+a$

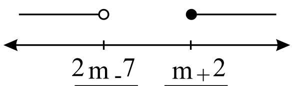
$I: ۴x+۱<۳x-۱\Rightarrow x<-۲$

$$II: 3x - 1 \leq 5x + a \Rightarrow 2x \geq -1 - a \Rightarrow x \geq \frac{-a-1}{2} \Rightarrow x \geq -\frac{a+1}{2}$$

$$I \cap II : x \in [-\frac{a+1}{2}, -2) = [-4, -2) \Rightarrow \frac{a+1}{2} = 4 \Rightarrow a + 1 = 8 \Rightarrow a = 7$$

۲۹ - گزینه ۲

اگر بازه‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:



شرط لازم و کافی برای آن‌که اجتماع دو بازه $\mathbb{R}$ شود آنست که $\frac{m+2}{2} \leq \frac{2m-7}{3}$**. بنابراین:**

$$\frac{2m-7}{3} \geq \frac{m+2}{2} \xrightarrow{\times 6} (2m-7) \times 2 \geq (m+2) \times 3 \Rightarrow 4m - 14 \geq 3m + 6$$

$$\Rightarrow m \geq 20 \Rightarrow m \in [20, +\infty)$$

۳۰ - گزینه ۲ از طرفین معادله، جذر می‌گیریم:

$$(x-1)^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 \xrightarrow{\sqrt{}} x - 1 = \pm(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{2} \\ x - 1 = -(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow x - 1 = -\sqrt{2} + 1 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها $= \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۳	۱۱ - ۱	۱۶ - ۴	۲۱ - ۲	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۴	۱۲ - ۳	۱۷ - ۱	۲۲ - ۴	۲۷ - ۴
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۳	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۲	۲۹ - ۲
۵ - ۲	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۲	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲