



علی هاشمی

نام آزمون: معادله ها و نامعادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- عبارت $P = \frac{3x}{3x+1} - \frac{x+2}{x-1}$ در بازه (a, b) منفی است. اگر a و b منفی باشند، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

① $\frac{1}{15}$

② $\frac{2}{15}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{5}$

۲- برای حل معادله $2x^2 = 3x + 5$ از روش مربع کامل، بعد از یک شدن ضریب x^2 ، چه عددی باید به طرفین معادله اضافه کنیم تا عبارت به مربع کامل تبدیل شود؟

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{9}{4}$

③ ۹

④ $\frac{9}{16}$

۳- اگر قدرمطلق تفاضل جواب های معادله $(x-2)^2 = (k-1)^4$ برابر ۸ باشد، آن گاه حاصل ضرب مقادیر مختلف k کدام است؟

① ۲

② -۳

③ -۴

④ -۱۶



۴- اگر عبارت درجه دوم $mx^2 + 2x - 1$ همواره نامثبت باشد، حدود m کدام است؟

- ① $m < 0$
 ② $m \geq -1$
 ③ $m \leq -1$
 ④ $-1 \leq m < 0$

۵- کف اتاقی به ابعاد 5×4 متر، یک قالی به مساحت 12 متر مربع پهن شده است. اگر فاصله لبه های قالی تا دیوار یکسان باشد، این فاصله چقدر است؟

- ① 1
 ② $\frac{1}{2}$
 ③ 2
 ④ 4

۶- در مسابقات یک فصل از یک لیگ فوتبال که بازی های رفت و برگشت دارد، در مجموع تعداد 56 بازی انجام می شود. تعداد تیم های شرکت کننده در این لیگ کدام است؟

- ① 8
 ② 10
 ③ 16
 ④ 7

۷- فشار خون نرمال یک شخص مذکر، برحسب میلی متر جیوه از رابطه $P = 0.006s^2 - 0.02s + 120$ به دست می آید که در آن P مقدار فشار خون فرد و s سن آن فرد است. سن فرد چقدر باشد تا فشار خون او برابر با 134 میلی متر جیوه باشد؟

- ① 40
 ② 50
 ③ 60
 ④ 55



۸- اگر معادله درجه دوم $x(x + 3) = -3a$ ، جواب حقیقی نداشته باشد، حدود a کدام است؟

① $a > \frac{3}{4}$

② $a < \frac{3}{4}$

③ $a > -\frac{3}{4}$

④ $a < -\frac{3}{4}$

۹- یک سهمی محور x ها را در نقطه‌های $x = 5$ و $x = -2$ قطع می‌کند و عرض رأس این سهمی $-\frac{49}{2}$ است. اگر سهمی محور y ها را در نقطه y قطع کند، y کدام است؟

① -40

② -10

③ -20

④ -5

۱۰- اگر عرض پایین‌ترین نقطه سهمی $y = (2k + 2)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

① 2

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ $-\frac{1}{2}$

۱۱- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x+2}{3} - 4 \right| \geq 3$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

① 16

② 17

③ 18

④ 19



۱۲- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} \geq 2$ برابر با بازه $(a, b]$ است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) ۱٫۵

۴) ۳

x	-2	1
A	-	+

۱۳- اگر جدول تعیین علامت عبارت $A = 2x^3 - ax^2 + b$ به شکل زیر باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۱۴

۳) -۱۰

۴) -۱۴

۱۴- خط تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = 1$ است و نمودار سهمی از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد. مقدار $c - a$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۵- اگر جدول تعیین علامت $y = ax + b$ به شکل مقابل باشد، جدول تعیین علامت $y = bx - a$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

x	2
ax + b	+ -

x	$-\frac{1}{2}$
bx - a	- +

۱)

x	$\frac{1}{2}$
bx - a	- +

۲)

x	$\frac{1}{2}$
bx - a	+ -

۳)

x	$-\frac{1}{2}$
bx - a	+ -

۴)



۱۶- نمودار یک سهمی محور طول‌ها را در نقاطی به طول‌های ۱- و ۳ قطع می‌کند و بیش‌ترین مقدار عرض نقاط روی سهمی برابر ۴ است. در این صورت عرض نقطه‌ای به طول ۵ روی این سهمی کدام است؟

① صفر

② -۲۴

③ ۲

④ -۱۲

۱۷- به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

① $-3 < m < 5$

② $-4 < m < 4$

③ $-2 < m < 6$

④ $-1 < m < 6$

۱۸- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} < x$ کدام است؟

① $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

② $(-3, 2)$

③ $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

④ $[-3, 2]$

۱۹- به‌ازای چه مقادیری از k ، سهمی $y = (k-1)x^2 - x + k$ همواره بالای خط $y = x - 1$ قرار می‌گیرد؟

① $k > 1$

② $k > \sqrt{2}$ یا $k < -\sqrt{2}$

③ $k > \sqrt{2}$

④ $k > 2$



۲۰- چند مثلث قائم الزاویه وجود دارد که اضلاع آن سه عدد زوج متوالی باشند؟

- ① صفر
 ② ۱
 ③ ۲
 ④ بی شمار

۲۱- اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۵ سال است. اگر ۵ سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۳۰۰ شود، ۱ سال بعد مجموع سن دو برادر کدام است؟

- ① ۴۵
 ② ۴۰
 ③ ۵۵
 ④ ۵۰

۲۲- معادله $(x + 2)(-x^2 + x - 1) = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ① صفر
 ② ۱
 ③ ۲
 ④ ۳

۲۳- علامت عبارت $A = (2x + 1)(3 - 2x)$ در کدام بازه مثبت است؟

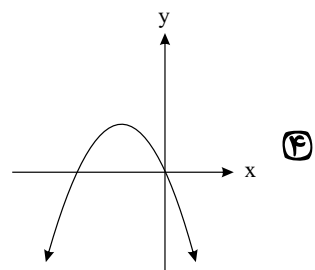
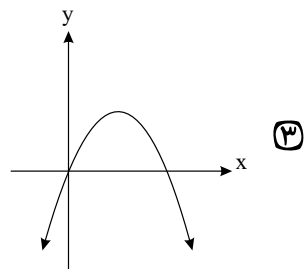
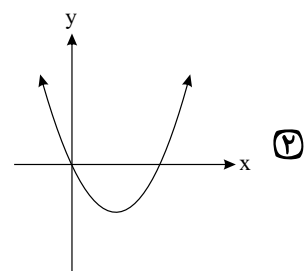
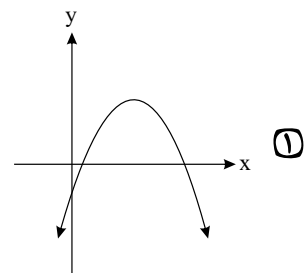
- ① $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$
 ② $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
 ③ $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
 ④ $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$



۲۴- اگر معادله درجه دوم $mx^2 - mx + 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد، m در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

- ① $(-8, 8)$
- ② $(-8, 0)$
- ③ $(-4, 4)$
- ④ $(0, 8)$

۲۵- در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a < 0$ و $b > 0$ و $c = 0$ باشد، آن گاه شکل کلی سهمی کدام یک از گزینه‌های زیر است؟





۲۶- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاطی به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. $ac - b$ کدام است؟

- ۱) -۲
- ۲) ۱
- ۳) ۳
- ۴) -۳

۲۷- مجموع مربعات سه عدد فرد متوالی مثبت ۸۳ است. مجموع این سه عدد کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۹
- ۲) ۱۵
- ۳) ۱۷
- ۴) ۱۳

۲۸- اگر معادله $x^2 - mx + m - 1 = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ کدام است؟

- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۳

۲۹- در یک لیگ فوتبال که بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌گیرد، در کل ۳۰ بازی انجام شده است. چند تیم در این لیگ حضور دارند؟

- ۱) ۴
- ۲) ۵
- ۳) ۶
- ۴) ۷

۳۰- اختلاف سنی دو برادر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن کنونی برادر کوچک‌تر کدام است؟

- ۱) ۸
- ۲) ۶
- ۳) ۴
- ۴) ۲



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

$$P < 0 \Rightarrow \frac{3x}{3x+1} - \frac{x+2}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{3x(x-1) - (x+2)(3x+1)}{(3x+1)(x-1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 3x - (3x^2 + x + 6x + 2)}{(3x+1)(x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 3x - 3x^2 - 7x - 2}{(3x+1)(x-1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-10x - 2}{(3x+1)(x-1)} < 0 \Rightarrow \begin{cases} -10x - 2 = 0 \Rightarrow 10x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5} \\ 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$	1	
$-10x-2$	+	+	○	-
$3x+1$	-	○	+	+
$x-1$	-	-	-	○
P	+	ت	-	○

$\Rightarrow x \in (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}) \cup (1, +\infty)$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow b - a = -\frac{1}{5} - (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{-3+5}{15} = \frac{2}{15}$$

۲ - گزینه ۴

$$2x^2 = 3x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\frac{-3}{2} = -2a \Rightarrow \frac{-3}{4} = -a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$(x - \frac{3}{4})^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

با اضافه کردن $\frac{9}{16}$ به طرفین، مربع کامل ساخته می‌شود.

۳ - گزینه ۲

$$(x-2)^2 = (k-1)^2 \Rightarrow x-2 = \pm(k-1)^2 \Rightarrow x = \pm(k-1)^2 + 2$$

$$\text{قدر مطلق تفاضل جواب‌ها} = |((k-1)^2 + 2) - (-(k-1)^2 + 2)| = |2(k-1)^2| = 8$$

$$\Rightarrow (k-1)^2 = 4 \Rightarrow k-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} k-1 = 2 \Rightarrow k = 3 \\ k-1 = -2 \Rightarrow k = -1 \end{cases}$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن k برابر با -3 است.

۴ - گزینه ۳

از آن جایی که عبارت درجه دوم $mx^2 + 2x - 1$ همواره نامثبت است؛ داریم:

$$mx^2 + 2x - 1 \leq 0$$

$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \Rightarrow 4 - 4(m)(-1) \leq 0 \Rightarrow 4 + 4m \leq 0 \Rightarrow 4m \leq -4 \Rightarrow m \leq -1 \quad (I) \\ a < 0 \Rightarrow m < 0 \quad (II) \end{cases}$$



$(I) \wedge (II) \rightarrow m \leq -1$

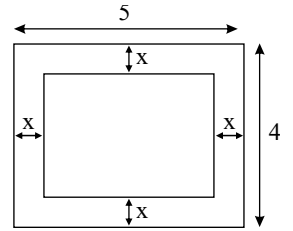
۵ - گزینه ۲

باتوجه به شکل داریم:

$$(\Delta - 2x)(4 - 2x) = 12 \Rightarrow 4x^2 - 18x + 20 = 12$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 18x + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Delta = 81 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$



$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{4} = 4 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(باتوجه به اینکه ابعاد قالی $(4 - 2x)$ و $(5 - 2x)$ منفی نمی‌شود) غ.ق.ق ۴

۶ - گزینه ۱ می‌دانیم: تعداد بازی‌های رفت و برگشتی بین n تیم برابر است با: $n(n - 1)$

$$n(n - 1) = 56 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow (n - 8)(n + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \text{ (ق.ق)} \\ n = -7 \text{ (غ.ق.ق)} \end{cases}$$

۷ - گزینه ۲

$$134 = 0,006s^2 - 0,02s + 120$$

$$0,006s^2 - 0,02s - 14 = 0$$

$$\Delta = (-0,02)^2 - 4(0,006)(-14) = 0,0004 + 0,336 = 0,3364 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 0,58$$

$$S = \frac{-(-0,02) \pm 0,58}{2(0,006)} = \begin{cases} \frac{0,60}{0,012} = 50 \\ \frac{-0,56}{0,012} \text{ (غ.ق.ق)} \end{cases}$$

۸ - گزینه ۱

$$x(x + 3) = -3a \Rightarrow x^2 + 3x + 3a = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4(1)(3a) < 0 \Rightarrow 9 - 12a < 0 \Rightarrow 12a > 9 \Rightarrow a > \frac{9}{12} \Rightarrow a > \frac{3}{4}$$

۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: معادله سهمی با ریشه‌های x_1 و x_2 که محور x ها را در این نقاط قطع می‌کند برابر است با

$$y = k(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{رأس سهمی به معادله } y = ax^2 + bx + c \text{ نقطه } S \left(\begin{array}{l} -\frac{b}{2a} \\ \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{array} \right) \text{ است.}$$

$$y = k(x + 2)(x - 5) = k(x^2 - 3x - 10) = kx^2 - 3kx - 10k$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = \frac{-(-3k)^2 + 4(k)(-10k)}{4(k)} = \frac{-49}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{-9k^2 - 40k^2}{4k} = \frac{-49k^2}{4k} = \frac{-49}{4}k = \frac{-49}{4} \Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 6k - 20 \Rightarrow y_0 = y(0) = -20$$

۱۰ - گزینه ۳

می‌دانیم: سهمی دارای مینیمم است هرگاه رو به بالا باشد و نقطه رأس سهمی پایین‌ترین نقطه سهمی است

$$\text{رأس سهمی به معادله } ax^2 + bx + c \text{ نقطه } S \left(\begin{array}{l} -\frac{b}{2a} \\ \frac{-\Delta}{4a} \end{array} \right)$$

سهمی $ax^2 + bx + c$ رو به بالاست هرگاه $a > 0$ باشد.

$$y = (2k + 2)x^2 - 4x + k$$

$$a > 0 \Rightarrow 2k + 2 > 0 \Rightarrow 2k > -2 \Rightarrow k > -1$$



$$\frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac \Rightarrow 16 = 4(2k+2)(k)$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k - 16 = 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow (k+2)(k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases} \xrightarrow{k>-1} k=1$$

۱۱ - گزینه ۲

$$\left| \frac{x+2}{3} - 4 \right| \geq 3 \Rightarrow \frac{x+2}{3} - 4 \geq 3 \text{ یا } \frac{x+2}{3} - 4 \leq -3$$

$$\frac{x+2}{3} - 4 \geq 3 \Rightarrow \frac{x+2}{3} \geq 7 \Rightarrow x+2 \geq 21 \Rightarrow x \geq 19 \quad (I)$$

$$\frac{x+2}{3} - 4 \leq -3 \Rightarrow \frac{x+2}{3} \leq 1 \Rightarrow x+2 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1 \quad (II)$$

$$I \cup II = x \in (-\infty, 1] \cup [19, +\infty)$$

اعداد صحیحی که در این بازه نیستند عبارتند از ۱۸، ...، ۲ که تعداد آن‌ها ۱۷ تا است.

۱۲ - گزینه ۱

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 4 - 2x^2 + 10x + 12}{x^2 - 5x - 6} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 7x + 8}{x^2 - 5x - 6} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 7x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-1)(8)}}{2(-1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-7+9}{-2} = -1 \\ x = \frac{-7-9}{-2} = 8 \end{cases} \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

	1	6	8
$-x^2+7x+8$	-	+	-
x^2-5x-6	+	-	+
$-x^2+7x+8$	-	-	-
x^2-5x-6	+	-	+

$$x \in (6, 8] = (a, b)$$

$$\Rightarrow b = 8, a = 6 \Rightarrow b - a = 8 - 6 = 2$$

۱۳ - گزینه ۴ می‌دانیم: ریشه‌های هر معادله در خود معادله صدق می‌کند

با توجه به جدول تعیین علامت، ریشه‌های معادله $x = 1$ و $x = -2$ هستند. با جایگذاری ریشه‌ها در معادله داریم:

$$\begin{cases} -16 - 4a + b = 0 \\ 2 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a + b = 16 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$-3a = 18 \Rightarrow a = -6$$

$$a - b = 2 \xrightarrow{a=-6} -6 - b = 2 \Rightarrow b = -6 - 2 = -8$$

$$a + b = -14$$

۱۴ - گزینه ۱ می‌دانیم: در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ خط به معادله $x = \frac{-b}{2a}$ خط تقارن سهمی است.

$$x = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{b=-2a} y = ax^2 - 2ax + c \xrightarrow{(1,1)} 1 = a - 2a + c \Rightarrow c - a = 1$$

۱۵ - گزینه ۱ با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

	x	$-\frac{1}{2}$
$-a(2x+b)$	-	+

$$\begin{cases} a < 0 \\ x = 2 \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow b = -2a \end{cases}$$

$$y = bx - a \xrightarrow{-2a=b} y = -2ax - a = -a(2x+1)$$

$$-a(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غ ق ق} \\ 2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۶ - گزینه ۴

رأس سهمی روی محور تقارن سهمی قرار دارد.
میدانیم: اگر سهمی محور x ها را در دو نقطه b و a قطع کند معادله سهمی $y = k(x-a)(x-b)$ است.



$$\begin{cases} (-1, 0) \\ (3, 0) \end{cases} \Rightarrow y = k(x - 3)(x + 1)$$

چون سهمی محور x ها را در دو نقطه 3 و -1 قطع کرده بنابراین خط تقارن سهمی خط $x = \frac{3 - 1}{2} = 1$ است که نقطه رأس سهمی روی آن قرار دارد. با توجه به ماکسیمم سهمی که 4 است، نقطه $(1, 4)$ روی سهمی قرار دارد.

$$y = k(x - 3)(x + 1) \xrightarrow{(1,4)} 4 = k(1 - 3)(1 + 1) \Rightarrow 4 = k(-2) \Rightarrow k = -1$$

$$y = -(x - 3)(x + 1) \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 3 \xrightarrow{x=5} y = -25 + 10 + 3 = -12$$

۱۷ - گزینه ۱

می‌دانیم: معادله $ax^2 + bx + c$ فاقد ریشه است هرگاه $\Delta < 0$ باشد

$$2x^2 + (m + 1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m + 2) < 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m - 5)(m + 3) < 0$$

m	-3	5	+	-	+	+
(m-5)(m+3)	+	0	-	0	+	+

$$\Rightarrow -3 < m < 5$$

۱۸ - گزینه ۱

$$\frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} < x \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 3}{x - 2} - x < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 3 - x^2 + 2x}{x - 2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x - 3}{x - 2} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ -x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

	-3	2	+	-	+
(-x-3)	+	0	-	-	-
x-2	-	-	0	+	+
-x-3	-	0	+	-	-

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

۱۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه
 $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه

$$(k - 1)x^2 - x + k > x - 1 \Rightarrow (k - 1)x^2 - 2x + k + 1 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow k - 1 > 0 \Rightarrow k > 1 \quad (I) \\ \Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4(k - 1)(k + 1) < 0 \Rightarrow 4 - 4k^2 + 4 < 0 \Rightarrow -4k^2 + 8 < 0 \Rightarrow -4k^2 + 8 = 0 \Rightarrow 4k^2 = 8 \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

k	-√2	√2	-	+	-
8 - 4k^2	-	0	+	0	-

$$\Rightarrow k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \quad (II)$$

$$I \cap II : k > \sqrt{2}$$

۲۰ - گزینه ۲ می‌دانیم: در مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه قائمه B بنابر رابطه فیثاغورث داریم: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

اگر اضلاع مثلث را $x + 2$ و x و $x - 2$ فرض کنیم با نوشتن رابطه فیثاغورث داریم:

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} = \cancel{x^2} + x^2 - 4x + \cancel{4} \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{اضلاع} \\ \text{غ.ق.ق.} : x = 0 \rightarrow -2, 0, 2 \\ \text{اضلاع} \\ \text{قابل قبول} : x = 4 \rightarrow 6, 4, 2 \end{cases}$$



اگر سن برادر کوچک تر را x در نظر بگیریم؛ داریم:

$$\begin{cases} x \\ x + 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{۵ سال دیگر}} \begin{cases} x + 5 \\ x + 10 \end{cases}$$

$$(x + 5)(x + 10) = 300 \Rightarrow x^2 + 15x + 50 = 300 \Rightarrow x^2 + 15x - 250 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 25)(x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -25 \text{ (غ.ق.ق.)} \end{cases}$$

$$x = 10 \Rightarrow \begin{cases} 10 \\ 15 \end{cases} \xrightarrow{\text{۱۰ سال بعد}} \begin{cases} 20 \\ 25 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع سن دو برادر} : 20 + 25 = 45$$

۲۲ - گزینه ۲ می‌دانیم: تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با توجه به رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \Delta > 0 : \text{۲ ریشه حقیقی} \\ \Delta = 0 : \text{اریشه مضاعف} \\ \Delta < 0 : \text{فاقد ریشه} \end{cases}$$

$$(x + 2)(-x^2 + x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ \text{یا} \\ -x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0 \end{cases}$$

ریشه ندارد. $\Delta = 1 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$

$$(2x + 1)(3 - 2x) > 0 \Rightarrow (2x + 1)(3 - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
$2x+1$	-	+	+
$3-2x$	+	+	-
$(2x+1)(3-2x)$	-	+	-

$\Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

۲۴ - گزینه ۴ می‌دانیم: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $\Delta < 0$ ، آنگاه معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$mx^2 - mx + 2 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(m)(2) < 0 \Rightarrow m^2 - 8m < 0 \Rightarrow m(m - 8) < 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 8 \end{cases}$$

$$\frac{m^2 - 8m}{m^2 - 8m} \begin{matrix} | \\ + & \circ & - & \circ & + \\ + & \circ & - & \circ & + \end{matrix} \Rightarrow m \in (0, 8)$$

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ داریم:

c : عرض از مبدأ

a : ثقل سهمی

$-\frac{b}{2a}$: طول رأس سهمی

می‌دانیم:

باتوجه به $c = 0$ سهمی باید از مبدأ مختصات بگذرد پس گزینه ۱ حذف می‌شود.

باتوجه به منفی بودن a دست‌های سهمی رو به پایین است پس گزینه ۲ حذف می‌شود.

$$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0$$

باتوجه به مثبت بودن $-\frac{b}{2a}$ ، طول رأس سهمی مثبت است و تنها گزینه ۳ قابل قبول می‌باشد.

نقاط $(0, 2)$ ، $(-1, 0)$ و $(2, 0)$ در نمودار سهمی صدق می‌کند، در نتیجه داریم:

$$y = ax^2 + bx + c$$



$$\begin{matrix} (0, 2) \\ \longrightarrow \end{matrix} c = 2$$

$$\begin{matrix} (-1, 0) \\ \longrightarrow \end{matrix} a - b + 2 = 0$$

$$\begin{matrix} (2, 0) \\ \longrightarrow \end{matrix} 4a + 2b + 2 = 0$$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} +$$

$$3a = -3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow ac - b = (-1)(2) - (1) = -2 - 1 = -3$$

۲۷ - گزینه ۲ اگر اعداد را $x + 2, x, x - 2$ در نظر بگیریم؛ داریم:

$$(x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 8 = 83$$

$$\rightarrow 3x^2 + 8 = 83 \Rightarrow 3x^2 = 75 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5 \xrightarrow{x > 0} x = 5$$

اعداد: ۳، ۵، ۷

مجموع اعداد عبارت است از: $3 + 5 + 7 = 15$

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $ax^2 + bx + c = 0$ معادله درجه دوم $a \neq 0$ ریشه مضاعف دارد، هرگاه $\Delta = 0$

$$x^2 - mx + m - 1 = 0$$

$$\Delta = (-m)^2 - 4(1)(m - 1) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m - 2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$x^2 - 2mx + m + 1 = 0 \xrightarrow{m=2} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله} : |3 - 1| = |2| = 2$$

۲۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: در یک لیگ بین n تیم، $\frac{n(n-1)}{2}$ بازی انجام می‌شود.

باتوجه به رفت و برگشتی بودن بازی‌ها، تعداد بازی‌ها بین n تیم از رابطه $n(n-1)$ به دست می‌آید.

$$n(n - 1) = 30 \Rightarrow n = 6$$

۳۰ - گزینه ۴ اگر سن کنونی برادر کوچک‌تر را x در نظر بگیریم؛ داریم:

$$\begin{cases} x \\ x + 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{۴ سال دیگر}} \begin{cases} x + 4 \\ x + 8 \end{cases}$$

$$(x + 4)(x + 8) = 60 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 60 \Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 14)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -14 \text{ (غ‌ق‌ق)} \\ x = 2 \end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۴	۲۱ - ۱	۲۶ - ۴
۲ - ۴	۷ - ۲	۱۲ - ۱	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۱	۲۳ - ۲	۲۸ - ۳
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۱	۱۹ - ۳	۲۴ - ۴	۲۹ - ۳
۵ - ۲	۱۰ - ۳	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۳	۳۰ - ۴