



علی هاشمی

نام آزمون: معادله ها و نا معادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- اگر رأس سهمی  $y = 3x^2 + ax + b$  نقطه  $S(1, -4)$  باشد،  $a - b$  برابر با کدام گزینه است؟

- ۱) ۷
- ۲) ۵
- ۳) -۷
- ۴) -۵

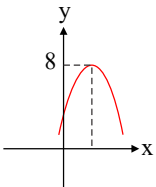
۲- اگر  $S(1, -2)$  رأس سهمی  $y = ax^2 + bx - \frac{3}{2}$  باشد، طول نقاط تلاقی این سهمی با محور  $x$  ها کدام است؟

- ۱) -۲, ۴
- ۲) -۱, ۳
- ۳) -۳, ۵
- ۴) -۲, ۳

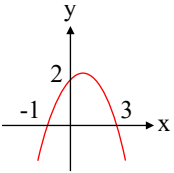
۳- اگر سهمی به معادله  $y = ax^2 - bx + c$  از مبدأ مختصات و نقطه  $A(-1, 3)$  بگذرد و محور تقارن آن  $x = 2$  باشد، مقدار  $15a + 5b + c$  کدام است؟

- ۱) ۹
- ۲) -۳
- ۳) ۲۱
- ۴) ۱۸

۴- نمودار سهمی به معادله  $y = -2x^2 + ax + a + 2$  به صورت زیر است. این سهمی قسمت مثبت محور  $x$  ها را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟



- ۱) ۵
- ۲) ۳
- ۳)  $\frac{3}{2}$
- ۴) ۴



۵- نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  به صورت زیر است. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

- ①  $\frac{5}{3}$
- ②  $-\frac{4}{3}$
- ③  $\frac{7}{3}$
- ④  $\frac{8}{3}$

۶- مجموعه جواب نامعادله  $\left| \frac{|x-1|}{3} + 1 \right| \leq 2$  کدام است؟

- ①  $[-4, 2]$
- ②  $(-\infty, 4]$
- ③  $[-2, 4]$
- ④  $[-10, 4]$

۷- اگر عرض بالاترین نقطه سهمی به معادله  $y = ax^2 + 4x + k$  برابر با  $-1$  و نمودار سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض  $-3$  قطع کند، معادله محور تقارن سهمی کدام است؟

- ①  $x = -\frac{1}{2}$
- ②  $x = \frac{1}{2}$
- ③  $x = 1$
- ④  $x = -1$

۸- یک جسم از بالای یک ساختمان با ارتفاع  $15$  متر به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در زمان  $t$  از رابطه  $h = -5t^2 + 18t + 15$  محاسبه شود، در چه فاصله زمانی ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از  $15$  متر خواهد بود؟

- ①  $(0, 18)$
- ②  $(\frac{18}{5}, \frac{156}{5})$
- ③  $(0, \frac{9}{2})$
- ④  $(0, \frac{18}{5})$



۹- مقادیر  $a$  کدام باشد تا نمودار سهمی  $y = (2a + 1)x^2 - 4x + 1$  پایین تر از محور  $x$  ها قرار نگیرد؟

①  $(-\infty, \frac{3}{2}]$

②  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

③  $[\frac{3}{2}, +\infty)$

④  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

۱۰- مجموع کوچکترین و بزرگترین عدد صحیحی که در نامعادله  $(|x + 2| + 1)(|x - 2| - 5) \leq 0$  صدق می‌کند، کدام است؟

① ۴

② -۴

③ ۱۰

④ -۱۰

۱۱- مجموعه جواب نامعادله  $|x - \frac{2}{3}| \leq 2$ ، کدام است؟

①  $[-2, 4]$

②  $[-2, 1]$

③  $[-3, -2] \cup [-1, 1]$

④  $[-4, 2]$

۱۲- اگر بزرگترین بازه‌ای که نامعادله  $(2x + 5)(x - 6) < 0$  در آن برقرار است، بازه  $(a, b)$  باشد، حاصل  $b - a$  برابر کدام است؟

①  $\frac{7}{2}$

②  $\frac{17}{2}$

③  $\frac{32}{5}$

④  $\frac{28}{5}$



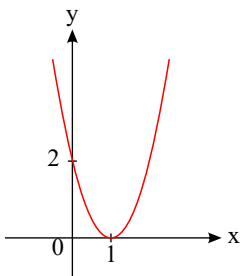
۱۳- به ازای کدام یک از مقادیر زیر، عبارت  $x^2 - 3x + 2$  مثبت می شود؟

- ①  $\sqrt{3}$
- ②  $\sqrt{5}$
- ③  $\sqrt{2}$
- ④  $\frac{3}{2}$

۱۴- طول یک مستطیل، ۳ سانتی متر بیش تر از ۲ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۲۰ سانتی متر مربع باشد، محیط این مستطیل چند سانتی متر است؟

- ① ۱۸
- ② ۲۴
- ③ ۲۱
- ④ ۲۷

۱۵- اگر منحنی سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  به شکل زیر باشد، حاصل  $abc$  کدام است؟



- ① ۸
- ② ۱۶
- ③ -۱۶
- ④ -۸

۱۶- اگر مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^2 + 4x - 21}{3x + 1} \leq 0$  به صورت  $(-\infty, a] \cup (b, c]$  باشد، حاصل  $a + b - c$  کدام است؟

- ①  $-\frac{13}{3}$
- ②  $\frac{13}{3}$
- ③  $-\frac{31}{3}$
- ④  $\frac{31}{3}$



۱۷- نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور  $x$ ها را در نقاطی به طول ۲- و ۴ قطع کرده است. معادله سهمی کدام است؟

①  $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$

②  $y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$

③  $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$

④  $y = \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$

۱۸- مجموعه جواب نامعادله  $\frac{(-x^2 + x - 1)|x + 2|}{x^2 + 2x} > 0$  کدام است؟

①  $-2 < x < 0$

②  $x < -2$  یا  $x > 0$

③  $x > -2$

④  $x < 0$

۱۹- اگر معادله درجه دوم  $bx^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$  ریشه مضاعف داشته باشد، حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $bx^2 + 2x - \frac{b^2}{2} = 0$  کدام است؟

① ۱۳٫۵

② -۱۳٫۵

③ ۱۵٫۵

④ -۱۵٫۵

۲۰- به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله  $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$  دارای ریشه مضاعف منفی است؟

①  $3 \pm \sqrt{12}$

② فقط  $3 + \sqrt{12}$

③ فقط  $3 + \sqrt{3}$

④ مقداری برای  $m$  وجود ندارد.



۲۱- اگر مجموعه جواب نامعادله  $x^2 + 4 \leq 4x^2 + x^2$  به صورت  $[a, b] \cup [c, d]$  باشد، آن گاه  $a + b + c + d$  کدام است؟

- ۱) -۲
- ۲) -۱
- ۳) صفر
- ۴) ۱

۲۲- اگر  $x + y = 6$  و  $xy = 4$  حاصل عبارت  $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$  کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{50}$
- ۲)  $\sqrt{40}$
- ۳)  $\sqrt{45}$
- ۴)  $\sqrt{35}$

۲۳- به ازای چه مقادیری از  $a$ ، سهمی به معادله  $y = (a - 1)x^2 + (2a - 1)x + a$  فقط از ناحیه اول محورهای مختصات عبور نمی کند؟

- ۱)  $[0, +\infty)$
- ۲)  $(-\infty, 0]$
- ۳)  $(-\infty, 1)$
- ۴)  $\emptyset$

۲۴- به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله  $2x^2 - mx + m - 1 = 0$  برابر ۴ است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۶
- ۳) -۲
- ۴) -۶

۲۵- وسط یک زمین مستطیل شکل، به مساحت ۳۸۴ متر مربع، زمین چمن مستطیل شکلی قرار دارد که طول آن ۲۰ متر و عرض آن ۱۲ متر است و فاصله همه لبه های زمین چمن تا اضلاع زمین یکسان است. در این صورت محیط زمین مستطیل شکل چند متر است؟

- ۱) ۳۲۰
- ۲) ۲۸۰
- ۳) ۸۰
- ۴) ۶۴



۲۶- در حل معادله  $x^2 + 3x - 2 = 0$  به روش مربع کامل، از چه عددی جذر گرفته می شود؟

- ①  $\frac{17}{4}$
- ② ۹
- ③ ۲
- ④ ۱۱

۲۷- رأس سهمی  $y = (mx - 4)(4 + 2x)$  بر محور  $x$  ها منطبق است، مقدار  $m$  چه عددی می باشد؟

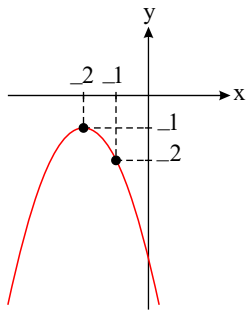
- ① -۴
- ② ۲
- ③ -۲
- ④ ۴

۲۸- نقطه  $A(-1, -4)$ ، رأس سهمی به معادله  $y = 3x^2 + ax + b + 8$  است، این سهمی محور  $y$  ها را با کدام عرض قطع می کند؟

- ① -۳
- ② -۲
- ③ -۱
- ④ ۲

۲۹- مجموعه جواب نامعادله  $1 \leq \left| \frac{1-x}{2} \right| < 2$  کدام است؟

- ①  $[-3, 3]$
- ②  $[-3, 1]$
- ③  $[-1, 3]$
- ④  $[-2, 1]$



۳۰- معادله سهمی شکل زیر کدام است؟

①  $y = -x^2 - 4x - 3$

②  $y = -x^2 + 4x - 5$

③  $y = -x^2 - 4x - 5$

④  $y = -4x^2 - 4x - 3$





## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ می دانیم: رأس سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  نقطه  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  است.  $S$

$$y = 3x^2 + ax + b$$

$$S \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{6} = 1 \Rightarrow a = -6 \\ f(1) = -4 \Rightarrow 3 - 6 + b = -4 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$a - b = -6 - (-1) = -6 + 1 = -5$$

۲ - گزینه ۲ می دانیم: رأس سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  نقطه  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  است.  $S$

$$S \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow -b = 2a \Rightarrow b = -2a \quad (I) \\ f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = -2 \Rightarrow a - 2a - \frac{3}{2} = -2 \Rightarrow -a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{(I)} b = -1 \end{cases}$$

در نتیجه معادله سهمی برابر است با:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

۳ - گزینه ۳ می دانیم: محور تقارن سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  خط  $x = \frac{-b}{2a}$  است.

$$\text{محور تقارن: } \frac{-(-b)}{2a} = 2 \Rightarrow b = 4a$$

نقطه  $(0,0)$  در معادله سهمی صدق می کند.  $b=4a$

$$y = ax^2 - bx + c \xrightarrow{b=4a} y = ax^2 - 4ax + c \xrightarrow{(0,0)} c = 0$$

نقطه  $(-1,3)$  در معادله سهمی صدق می کند.

$$y = ax^2 - 4ax \xrightarrow{(-1,3)} 3 = a + 4a \Rightarrow 3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

$$b = 4a = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow 15a + 5b + c = 15 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{12}{5} + 0 = 9 + 12 = 21$$

۴ - گزینه ۲ می دانیم: رأس سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  نقطه  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  است.  $S$

$$S \begin{cases} \frac{-b}{2(-2)} = \frac{a}{4} \\ f\left(\frac{a}{4}\right) = 8 \Rightarrow -2 \times \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4} + a + 2 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + a + 2 = 8 \xrightarrow{\times 8} -a^2 + 2a^2 + 8a + 16 = 64$$



$$\Rightarrow a^2 + 8a - 48 = 0 \Rightarrow (a + 12)(a - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ a = 4 \end{cases}$$

باتوجه به طول رأس سهمی  $\frac{a}{4} > 0$  بنابراین  $a = -12$  غیر قابل قبول است و فقط  $a = 4$  قابل قبول است.

$$a = 4 : y = -2x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

۵ - گزینه ۴

$$y = a(x + 1)(x - 3)$$

ریشه‌های سهمی ۳ و -۱ هستند بنابراین داریم:

$$2 = a(1)(-3) \Rightarrow 2 = -3a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

با جایگذاری نقطه (۰, ۲) داریم:

$$y = -\frac{2}{3}(x + 1)(x - 3) = -\frac{2}{3}(x^2 - 2x - 3) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

$$a + b + c = \frac{-2}{3} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

۶ - گزینه ۳

$$\left| \frac{|x - 1|}{3} + 1 \right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{|x - 1|}{3} + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq \frac{|x - 1|}{3} \leq 1 \Rightarrow -9 \leq |x - 1| \leq 3 \Rightarrow |x - 1| \leq 3$$

$$\Rightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [-2, 4]$$

۷ - گزینه ۳ می‌دانیم:

رأس سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  نقطه  $S \left( \frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$  است.

محور تقارن سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  خط  $x = \frac{-b}{2a}$  است.

$$y = ax^2 + 4x + k$$

$k = -3$  : نقطه (۰, -۳) در معادله سهمی صدق می‌کند.

در نتیجه معادله سهمی برابر است با:

$$y = ax^2 + 4x - 3$$

$$S: \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2a} \\ f\left(\frac{-b}{2a}\right) = -1 \Rightarrow a\left(\frac{-4}{2a}\right)^2 + 4\left(\frac{-4}{2a}\right) - 3 = -1 \Rightarrow \frac{4}{a} - \frac{8}{a} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{a} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{-4}{a} = 2 \Rightarrow a = -2$$

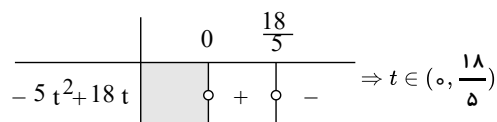
$$\text{معادله خط تقارن: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$$

۸ - گزینه ۴

$$h = -5t^2 + 18t + 15, t \geq 0$$

$$h > 15 \Rightarrow -5t^2 + 18t + 15 > 15 \Rightarrow -5t^2 + 18t > 0 \Rightarrow t(-5t + 18) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ -5t + 18 = 0 \Rightarrow -5t = -18 \Rightarrow t = \frac{18}{5} \end{cases}$$





اگر نمودار سهمی پایین تر از محور  $x$  نباشد، یعنی یا مماس یا بالاتر از محور  $x$  است؛ در نتیجه دهانه سهمی روبه بالا  $(2a > 1) > 0$  و  $\Delta \leq 0$  است. داریم:

$$\begin{cases} 2a + 1 > 0 \Rightarrow 2a > -1 \Rightarrow a > \frac{-1}{2} \quad (I) \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow 16 - 4(2a + 1)(1) \leq 0 \Rightarrow 16 - 8a - 4 \leq 0 \Rightarrow 12 - 8a \leq 0 \Rightarrow 12 \leq 8a \\ \Rightarrow a \geq \frac{3}{2} \quad (II) \end{cases}$$

$$(I) \wedge (II) \rightarrow a \in \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right)$$

۱۰ - گزینه ۱

می‌دانیم:  $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

$$\begin{aligned} (|x + 2| + 1)(|x - 2| - 5) \leq 0 &\xrightarrow[|x+2|+1 \geq 0]{|x+2| \geq 0 \Rightarrow |x+2|+1 \geq 0} (|x - 2| - 5) \leq 0 \\ \Rightarrow |x - 2| \leq 5 &\Rightarrow -5 \leq x - 2 \leq 5 \rightarrow -3 \leq x \leq 7 : 7 + (-3) = 7 - 3 = 4 \end{aligned}$$

۱۱ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-2}{3} - x \right| \leq 2 &\Rightarrow -2 \leq \frac{x-2}{3} - x \leq 2 \\ \Rightarrow -2 \leq \frac{x-2-3x}{3} \leq 2 &\Rightarrow -6 \leq -2x-2 \leq 6 \Rightarrow -3 \leq -x-1 \leq 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2 \leq -x \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in [-4, 2]$$

۱۲ - گزینه ۲

$$(2x + 5)(x - 6) < 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \\ x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

$$\frac{(x+5)(x-6)}{\quad} \quad \begin{array}{c} -\frac{5}{2} \quad 6 \\ | \quad | \\ + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}, 6\right) \Rightarrow 6 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{17}{2}$$

۱۳ - گزینه ۲

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2-3x+2} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

تنها گزینه موجود در این بازه گزینه ۲ است.

۱۴ - گزینه ۳

مساحت مستطیل:  $x(2x + 3) = 20$

اگر عرض مستطیل را  $x$  در نظر بگیریم طول مستطیل برابر  $2x + 3$  است؛ داریم:

$$2x^2 + 3x - 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(-20) = 9 + 160 = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$$

$$x = \frac{-3 \pm 13}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-16}{4} \quad (\text{غ.ق.ق}) \\ x = \frac{10}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 2x + 3 = \frac{32}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{محیط} : (x + 2x + 3) \times 2 = \frac{42}{2} = 21 \end{cases}$$

۱۵ - گزینه ۳ با توجه به ریشه مضاعف سهمی در نقطه  $x = 1$  نمودار سهمی به صورت  $y = k(x - 1)^2$  است؛ داریم:

$$y = k(x - 1)^2 = k(x^2 - 2x + 1) = kx^2 - 2kx + k$$

با قرار دادن عرض از مبدأ سهمی یعنی نقطه  $(0, 2)$  در معادله بالا داریم:



$$y = kx^2 - 2kx + k \xrightarrow{(0,2)} k = 2$$

$$y = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow abc = -16$$

۱۶ - گزینه ۳

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{3x + 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+7)(x-3)}{3x+1} \leq 0$$

	-7	$-\frac{1}{3}$	3	
x+7	-	o	+	+
x-3	-	-	-	o
3x+1	-	-	o	+
$\frac{(x+7)(x-3)}{3x+1}$	-	o	+	+

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup (-\frac{1}{3}, 3] \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b - c = \frac{-31}{3}$$

۱۷ - گزینه ۱

$$y = ax^2 + bx + c$$

۳ = c : نقطه (۰, ۳) در معادله صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} \text{نقطه } (-2, 0) \text{ در معادله صدق می‌کند.} & \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 3 = 0 \\ 4a + 4b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -3 \\ 16a + 4b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - 4b = -6 \quad (I) \\ 16a + 4b = -3 \end{cases} \\ \text{نقطه } (4, 0) \text{ در معادله صدق می‌کند.} & \end{aligned}$$

$$24a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{8}$$

$$(I) \quad a = -\frac{3}{8} \rightarrow 8a - 4b = -6 \rightarrow -3 + 6 = 4b \Rightarrow 3 = 4b \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

بنابراین معادله سهمی برابر است با:

$$y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 3$$

۱۸ - گزینه ۱

$$\frac{(-x^2 + x - 1)|x + 2|}{x^2 + 2x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{همواره منفی} & -x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-1) = -3 < 0 \\ \text{همواره مثبت} & |x + 2| : x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

	-2	0	
$-x^2 + x - 1$	-	-	-
$ x + 2 $	+	o	+
$x^2 + 2x$	+	o	+
$\frac{(-x^2 + x - 1) x + 2 }{x^2 + 2x}$	-	+	-

$\Rightarrow -2 < x < 0$

۱۹ - گزینه ۲ روش اول:

می‌دانیم: در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با  $\frac{c}{a}$



$$bx^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0 \quad (I) \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} (\sqrt{bx} - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow bx^2 - \sqrt{bx} + \frac{1}{4} = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9$$

$$3x^2 + 2x - \frac{81}{2} = 0 \xrightarrow{\text{حاصل ضرب ریشه ها}} x_1 x_2 = \frac{-81}{3} = \frac{-81}{6} = -13,5$$

روش دوم:

$$\text{ریشه مضاعف} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4 \times b \times \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow b = 9$$

$$b = 9 \Rightarrow 3x^2 + 2x - \frac{b^2}{2} = 3x^2 + 2x - \frac{81}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 + 486 = 490 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + \sqrt{490}}{6} \\ x_2 = \frac{-2 - \sqrt{490}}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{(-2 + \sqrt{490})(-2 - \sqrt{490})}{36} = \frac{4 - 490}{36} = -\frac{486}{36} = -13,5$$

۲۰ - گزینه ۲

$$\text{ریشه مضاعف} \Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(1)(m+1) = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 4m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 36 - 4(1)(-3) = 36 + 12 = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 2\sqrt{12} \\ m = \frac{6 \pm 2\sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{12} \quad (I) \end{cases}$$

$$\text{ریشه مضاعف منفی: } \frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{-(m-1)}{2(1)} < 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (II)$$

$$(I) \wedge (II) : m = 3 + \sqrt{12}$$

۲۱ - گزینه ۳

$$x^6 + 4 \leq 4x^3 + x^2 \Rightarrow x^6 - 4x^3 - x^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow x^3(x^3 - 4) - (x^2 - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x^3 - 4)(x^3 - 1) \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x^3-1)(x^3+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^3+1=0 \Rightarrow \text{(همواره مثبت است و ریشه ندارد.)} \end{cases}$$

	-2	-1	1	2	
x-2	-	-	-	-	○ +
x+2	-	○ +	+	+	+
x <sup>3</sup> -1	+	+	○ -	○ +	+
x <sup>3</sup> +1	+	+	+	+	+
A	+	○ -	○ +	○ -	○ +

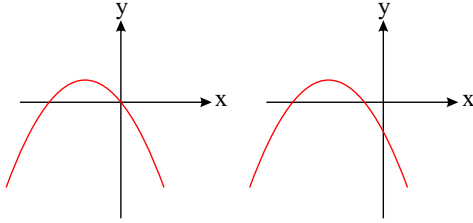
$\Rightarrow x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = 0$$



به توان ۲  $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = A \rightarrow x^2y + y^2x + 2xy\sqrt{xy} = A^2 \Rightarrow xy(x + y + 2\sqrt{xy}) = A^2$   
 $\Rightarrow 4(6 + 4) = A^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{40} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{40}$

نمودار سهمی مورد نظر باید به یکی از دو صورت مقابل باشد:



$a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1$  (۱)

پس اولاً ضریب  $x^2$  باید منفی باشد:

$y = (a - 1)x^2 + (2a - 1)x + a = 0$

طول محل برخورد نمودار با محور  $x$  ها را به دست می آوریم:

$\Delta = (2a - 1)^2 - 4(a - 1)a = 1$

$x = \frac{-(2a - 1) \pm 1}{2(a - 1)} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{a}{1 - a} \end{cases}$

$\frac{a}{1 - a} \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$  یا  $a > 1$  (۲)

طبق نمودار سهمی باید، نامثبت باشد پس داریم:  $\frac{a}{a - 1}$

$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a \leq 0$

۲۴ - گزینه ۳ می دانیم: در معادله  $y = ax^2 + bx + c$  مجموع ریشه ها  $-\frac{b}{a}$  و حاصل ضرب آن ها  $\frac{c}{a}$  است.

ریشه های معادله را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می گیریم و داریم:

$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4$  (I)

باتوجه به روابط ریشه ها داریم:

$\begin{cases} \text{جمع ریشه ها: } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m)}{2} = \frac{m}{2} \\ \text{ضرب ریشه ها: } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m - 1}{2} \end{cases}$  (II)

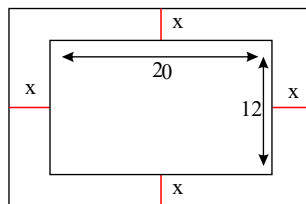
$(I), (II) : \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m - 1}{2}\right) = 4 \Rightarrow \frac{m^2}{4} - m + 1 = 4 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$

$\Rightarrow (m - 6)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}$

طبق صورت مسئله ریشه ها حقیقی هستند، پس  $\Delta > 0$  که به ازای  $m = -2$  برقرار است، پس  $m = -2$  قابل قبول است.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \Rightarrow \Delta = 28 > 0 \checkmark \\ m = 6 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \times \end{cases}$

با توجه به شکل مقابل داریم:



مساحت زمین:  $(20 + 2x)(12 + 2x) = 384 \rightarrow 4x^2 + 64x + 240 = 384 \rightarrow 4x^2 + 64x - 144 = 0$

$\rightarrow x^2 + 16x - 36 = 0 \rightarrow (x + 18)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -18 \text{ (غ ق)} \end{cases}$

در نتیجه محیط زمین برابر است با:

محیط زمین:  $2(24 + 16) = 2 \times 40 = 80$



$$y = 2mx^2 + (4m - 8)x - 16$$

$$\text{عرض رأس سهمی: } \frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$(4m - 8)^2 - 4(2m)(-16) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 64m + 64 + 128m = 0$$

$$\Rightarrow 16m^2 + 64m + 64 = 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

می‌دانیم:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  نقطه  $f(-\frac{b}{2a})$  رأس سهمی به معادله  $S$  است.

$$f(x) = y = 3x^2 + ax + b + 8$$

$$S \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = \frac{-a}{6} = -1 \Rightarrow a = 6 \\ f(-1) = 3 - 6 + b + 8 = -4 \Rightarrow b = -9 \end{array} \right.$$

در نقطه تقاطع سهمی با محور  $y$  ها،  $x$  برابر با صفر است، پس داریم:

$$y = 3x^2 + 6x - 1 \xrightarrow{x=0} y = -1$$

$$-2 < \left| \frac{1-x}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{1-x}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1-x}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1-x \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

۳۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: در سهمی به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  رأس سهمی نقطه  $f(\frac{-b}{2a})$  است.  $S$

سهمی را به معادله  $y = ax^2 + bx + c$  در نظر می‌گیریم.

$$\text{رأس سهمی } S \left| \begin{array}{l} -2 \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow -b = -4a \Rightarrow b = 4a \quad (I)$$

نقاط  $(-2, -1)$  و  $(-1, 2)$  در سهمی به معادله  $y = ax^2 + 4ax + c$  صدق می‌کند؛ داریم:

$$\begin{cases} (-2, -1): -1 = 4a - 8a + c \Rightarrow \begin{cases} -4a + c = -1 \quad (II) \\ -3a + c = -2 \end{cases} \\ (-1, 2): -2 = a - 4a + c \Rightarrow \begin{cases} -3a + c = -2 \\ -a = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(II) \xrightarrow{a=-1} -4a + c = -1 \xrightarrow{a=-1} 4 + c = -1 \Rightarrow c = -5$$

$$(I) \xrightarrow{a=-1} b = 4a \xrightarrow{a=-1} b = -4$$

$$y = -x^2 - 4x - 5$$

در نتیجه معادله سهمی برابر است با:

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۳	۱۱ - ۴	۱۶ - ۳	۲۱ - ۳	۲۶ - ۱
۲ - ۲	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۲	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۱	۲۳ - ۲	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۲	۲۴ - ۳	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۱	۱۵ - ۳	۲۰ - ۲	۲۵ - ۳	۳۰ - ۳