نام آزمون: معادله ها و نا معادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - به‌ازای چند عدد صحیح m، سهمی $y = mx^۲ + mx + ۱$ همواره بالای محور xها است؟

① ۳

② بی‌شمار

③ ۴

④ ۵

۲ - به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر برای m، منحنی $y = ۲x - x^۲$ با خط $y = mx$ نقطهٔ مشترک ندارد؟

① $(۰, +\infty)$

② $(-\infty, ۰) \cup (۰, +\infty)$

③ هر مقدار m

④ هیچ مقدار m

۳ - مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x^۲ + ۹)(|x| + ۴)(|x| - ۴) \leq ۰$ کدام است؟

① $[-۴, ۴]$

② $[-۲, ۵]$

③ $[-۳, ۹]$

④ $[۱, +\infty)$

۴ - معادلهٔ درجه دوم $mx^۲ + (m - ۱)x + ۳ = ۰$ دارای یک ریشهٔ مضاعف است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

① ۱۲

② ۱۳

③ ۱۴

④ ۱۶

۵ - سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+۳x+b$، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. بیش‌ترین مقدار عرض سهمی کدام است؟

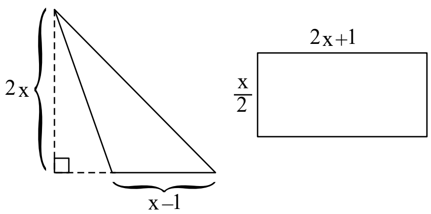
① $\frac{۸}{۷}$

② $\frac{۶}{۷}$

③ $\frac{۱۶}{۷}$

④ $\frac{۱۵}{۸}$

۶ - در شکل‌های زیر، اگر مساحت مستطیل از مساحت مثلث حداقل ۵ واحد بزرگ‌تر باشد، مجموعهٔ مقادیر x کدام است؟



① $[۴,+\infty)$

② $(\frac{۵}{۳},\frac{۱۰}{۳}]$

③ $[\frac{۵}{۳},+\infty)$

④ $[\frac{۱۰}{۳},+\infty)$

۷ - عددی مثبت از مربع خود، ۲ واحد کم‌تر است، چند مقدار برای این عدد یافت می‌شود؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ صفر

۸ - یک سهمی در نقاطی به طول ۱ و ۳ محور xها را قطع می‌کند و بر خط $y=۴$ مماس است. عرض از مبدأ این سهمی کدام است؟

① -۳

② -۶

③ -۸

④ -۱۲

۹- حدود m کدام باشد تا $\dfrac{mx^۲ - x + ۱}{-۱ + ۳x - ۴x^۲} < ۰$ به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار باشد؟ $(m \neq ۰)$

① $m > ۰$

② $۰ < m < \frac{۱}{۴}$

③ $m > \frac{۱}{۴}$

④ $m < -\frac{۱}{۴}$

۱۰- اگر تابع ثابت g و سهمی به معادلهٔ $f(x) = ۲(x+۱)^۲ - ۴$ فقط در یک نقطه تماس داشته باشند (مماس باشند)، $g(\sqrt{۳} - ۱)$ کدام است؟

① -۱

② $\sqrt{۳} - ۱$

③ -۴

④ $-\sqrt{۳} + ۱$

۱۱- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۲ \geq \left| \dfrac{x-۱}{۲} - \dfrac{۲x+۱}{۳} \right|$ کدام است؟

① $-۱۷ \leq x \leq ۷$

② $۷ \leq x \leq ۱۷$

③ $x \leq -۱۷$ یا $x \geq ۷$

④ $x \leq ۷$ یا $x \geq ۱۷$

۱۲- به‌ازای کدام مقدار m، سهمی $y = mx^۲ + mx + ۱$ همواره بالای محور xهاست؟ $(m \neq ۰)$

① $m > ۴$

② $۰ < m < ۴$

③ $m < -۴$

④ $m > -۴$

۱۳ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{x-۱}{۲}-\frac{۲x+۱}{۳}\right| \geq \frac{۱}{۳}$ کدام است؟

① $-۷ \leq x \leq -۳$

② $x \geq -۳$ یا $x \leq -۷$

③ $x \leq ۳$ یا $x \geq ۷$

④ $۳ \leq x \leq ۷$

۱۴ - مختصات رأس سهمی $y=-۲x^۲+۴x+۱$ کدام است؟

① $(۲,۱)$

② $(۱,۳)$

③ $(-۱,-۵)$

④ $(-۲,۳)$

۱۵ - معادلهٔ سهمی‌ای که نسبت به خط $x=۲$ متقارن است و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به‌عرض -۴ قطع می‌کند، کدام می‌تواند باشد؟ $(a \neq ۰)$

① $y=ax^۲-۲ax+۴$

② $y=ax^۲-۴ax-۴$

③ $y=ax^۲-۲ax-۴$

④ $y=ax^۲+۴ax-۴$

۱۶ - اگر جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $p(x)=(a^۲-۹)x^۲+mx+b^۲-۴$ به‌صورت زیر باشد و a و b اعداد طبیعی و $a<b$ باشد، در این صورت $۲a+b$ کدام است؟

x		0		3	
P	−	0	+	0	−

① ۴

② ۳

③ -۵

④ ۵

۱۷ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $(|۳-x|+۲)(|۲-x|-۳)<۰$ کدام است؟

① $(-۲,۳)$

② $(-\infty,-۱)\cup(۵,+\infty)$

③ $(-۱,۵)$

④ $(۲,۳)$

۱۸- اگر خط $x = ۴$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ + kx - k$ باشد، این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

(۱) ۱۶

(۲) ۱۶-

(۳) ۸

(۴) ۸-

۱۹- عبارت $P = \dfrac{x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲}{x^۲ + x - ۲}$، در چند نقطه تغییر علامت می‌دهد؟

(۱) ۵

(۲) ۱

(۳) ۴

(۴) ۲

۲۰- اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادلهٔ $\left|\dfrac{۲ - x}{x + ۱}\right| < ۱$ و $۲ < \dfrac{x + ۱}{-۲} < -۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۱- کدام بازه زیرمجموعه‌ای از مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\dfrac{۵ - |x|}{۲}\right| < ۴$ نیست؟

(۱) $(-۱۳, -۱۲)$

(۲) $(-۱۴, -۱۳)$

(۳) $(۱۰, ۱۱)$

(۴) $(۱۱, ۱۲)$

۲۲- عبارت $P = (x^۴ - x^۳ + x^۲ - x)(x^۴ + ۳)$ در بازهٔ (a, b) منفی است، حداکثر مقدار $(b - a)$ کدام است؟

(۱) ۰٫۵

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۲۳ - برای چه مقادیری از m، سهمی $y = x^۲ + mx + ۱$ با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم محورهای مختصات برخورد ندارد؟

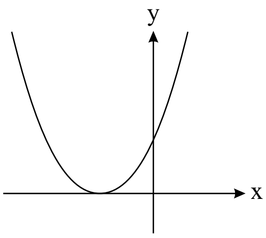
① $-۲ < m < ۲$

② $-۱ < m < ۳$

③ $-۲ \leq m < ۳$

④ $-۱ < m < ۴$

۲۴ - اگر نمودار سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ + ۴ax + ۱$ به‌صورت زیر باشد، مقدار a کدام است؟



① -۱

② $\frac{۱}{۲}$

③ ۲

④ $-\frac{۲}{۳}$

۲۵ - رأس سهمی به معادلهٔ $y = -x^۲ - ۲a^۲x + b$ روی خط $y = ۲x$ قرار داد. این سهمی از کدام نواحی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

① اول و دوم

② سوم و چهارم

③ فقط اول

④ فقط چهارم

۲۶ - حدود a کدام باشد تا به‌ازای مقادیر مختلف x، عبارت $A = \dfrac{x^۲ + ax + ۱}{-x^۲ - x - ۱}$ بتواند مقادیر مثبت، منفی و صفر را اختیار کند؟

① $-۲ < a < ۲$

② $|a| > ۲$

③ هر مقدار حقیقی a

④ $|a| > ۱$

۲۷ - x در کدام بازه باشد تا عبارت $A = (۲ - |x|)(۲x - ۶)$ منفی باشد؟

① $(۲, +\infty)$

② $(-۲, ۳)$

③ $(-۲, ۲) \cup (۳, +\infty)$

④ $(-\infty, ۲)$

۲۸ - اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \dfrac{bx(x-a)^۲}{ax^۲+bx+c}$ به صورت زیر باشد، آنگاه مجموعهٔ مقادیر ممکن برای b کدام است؟

x		-1		0		2	
p(x)	+	ت ن	+	0	−	0	−

① $\{\ \}$

② $\{۴\}$

③ $\{-۴\}$

④ $\{۴, -۴\}$

۲۹ - اگر بازهٔ $(-۱, ۲)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که در آن علامت عبارت $y = ax^۲ + x + ۲a^۲$ مثبت باشد، a کدام است؟

① $-\dfrac{۱}{۲}$

② $\dfrac{۱}{۲}$

③ ۱

④ -۱

۳۰ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۲ \geq \dfrac{x^۲-x}{x+۲}$ کدام است؟

① $\mathbb{R} - [-۱, ۴]$

② $\mathbb{R} - (-۱, ۴)$

③ $(-۲, -۱) \cup (۴, +\infty)$

④ $(-۲, -۱] \cup [۴, +\infty)$

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

$mx^2 + mx + 1 > 0$

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4(m)(1) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m < 0 \Rightarrow m(m-4) < 0 \Rightarrow 0 < m < 4 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \cap (2) = (0, 4)$

اعداد صحیح موجود در بازه: $\{1, 2, 3\}$

۲ ـ گزینه ۴

$2x - x^2 = mx \Rightarrow x^2 - 2x + mx = 0 \Rightarrow x^2 - (2-m)x = 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow (2-m)^2 - 4(1)(0) < 0 \Rightarrow (2-m)^2 < 0$ **جواب ندارد.**

۳ ـ گزینه ۱

فرض $x > 0 \;:\; (x^2+9)(x+4)(x-4) < 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

فرض $x < 0 \;:\; (x^2+9)(-x+4)(-x-4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

۴ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: اگر دلتای $(\Delta = b^2 - 4ac)$ معادلهٔ درجه دوم $(ax^2 + bx + c = 0)$ صفر باشد، معادله ریشهٔ مضاعف دارد.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4m \times 3 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 12m = 0 \Rightarrow m^2 - 14m + 1 = 0$

$$\Rightarrow \Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 196 - 4 = 192 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{14 + \sqrt{192}}{2} \\ m_2 = \dfrac{14 - \sqrt{192}}{2} \end{cases} \Rightarrow m_1 + m_2 = 14$$

۵ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: بیش‌ترین مقدار سهمی رو به پایین، مقدار عرض رأس آن است.

نقاط $A \left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right.$ **و** $B \left|\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}\right.$ **روی سهمی قرار دارند:**

$$\left.\begin{matrix} 1 = a \times 0^2 + 3 \times 0 + b \Rightarrow b = 1 \\ 0 = a \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 \Rightarrow 4a = -7 \Rightarrow a = -\dfrac{7}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -\frac{7}{4}x^2 + 3x + 1$$

طول رأس $= x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2 \times (-\frac{7}{4})} = \dfrac{6}{7}$

عرض رأس $= y_S = -\dfrac{7}{4} \times (\dfrac{6}{7})^2 + 3 \times \dfrac{6}{7} + 1 = \dfrac{16}{7}$

۶ ـ گزینه ۴

$$S_{\square} - S_{\triangle} \geq 5 \Rightarrow \frac{x}{2}(2x+1) - \frac{2x(x-1)}{2} \geq 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 2x^2 + 2x \geq 10$$

$$\Rightarrow 3x \geq 10 \Rightarrow x \geq \frac{10}{3}$$

۷ ـ گزینه ۱ عدد موردنظر را x می‌نامیم:

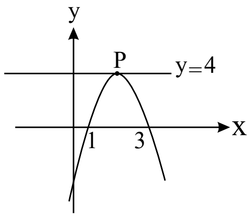
$$x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x باید مثبت باشد. پس فقط $x = ۲$ را می‌پذیریم بنابراین یک مقدار برای x به‌دست می‌آید.

۸ - گزینه ۴

سهمی مورد نظر به صورت مقابل است:

معادلهٔ این سهمی به‌صورت $y = k(x-۱)(x-۳)$ است.



ازطرفی طول نقطهٔ P، طول رأس سهمی است و از آنجاکه وسط دو ریشه است، برابر با ۲ است. عرض P هم (چون روی خط $y=۴$ است) برابر با ۴ است؛ حال مختصات $P\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.$ را در سهمی قرار می دهیم:

$$۴ = k(۲-۱)(۲-۳) \Rightarrow ۴ = -k \Rightarrow k = -۴$$

پس معادلهٔ سهمی عبارت است از:

$$y = -۴(x-۱)\,(x-۳) \xrightarrow{x=۰} y = -۴(-۱)(-۳) = -۱۲ = \text{عرض‌ازمبدأ}$$

۹ - گزینه ۳

$$\text{مخرج کسر:} \begin{cases}\Delta = -۷ < ۰\\ a < ۰\end{cases} \Rightarrow \text{مخرج همواره منفی است.}$$

پس برای منفی شدن کسر، صورت آن باید همواره مثبت باشد:

$$mx^۲ - x + ۱ > ۰ \Rightarrow \begin{cases}\Delta < ۰ \Rightarrow ۱ - ۴m < ۰ \Rightarrow m > \dfrac{۱}{۴}\\ a > ۰ \Rightarrow m > ۰\end{cases} \xrightarrow{\cap} m > \frac{۱}{۴}$$

۱۰ - گزینه ۳ $g(x)$ تابعی ثابت است، یعنی خطی افقی است و خط افقی فقط می‌تواند در محل رأس بر سهمی مماس باشد پس باید عرض رأس سهمی را محاسبه کنیم:

$$f(x) = ۲(x+۱)^۲ - ۴ \Rightarrow \text{عرض رأس} = -۴ \Rightarrow g(x) = -۴ \Rightarrow g(\sqrt{۳}-۱) = -۴$$

۱۱ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{|u| \geq a \Rightarrow \begin{cases}u \geq a\\ \text{یا}\\ u \leq -a\end{cases}}$

$$\left|\frac{x-۱}{۲} - \frac{۲x+۱}{۳}\right| \geq ۲ \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x-۱}{۲} - \dfrac{۲x+۱}{۳} \geq ۲ \Rightarrow \dfrac{-x-۵}{۶} \geq ۲ \Rightarrow -x-۵ \geq ۱۲ \Rightarrow x \leq -۱۷\\ \text{یا}\\ \dfrac{x-۱}{۲} - \dfrac{۲x+۱}{۳} \leq -۲ \Rightarrow \dfrac{-x-۵}{۶} \leq -۲ \Rightarrow -x-۵ \leq -۱۲ \Rightarrow ۷ \leq x\end{cases}$$

۱۲ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\text{اگر } \Delta < ۰ \text{ و } ۰ < x^۲ \text{ ضریب آنگاه سهمی همواره بالای محور } x \text{ هاست.}}$

$$\left.\begin{matrix}\text{ضریب } x^۲ > ۰ \Rightarrow m > ۰\\ \Delta < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m < ۰ \Rightarrow m(m-۴) < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۴\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} ۰ < m < ۴$$

۱۳ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{|u| \geq a \xrightarrow{a>۰} \begin{cases}u \geq a\\ u \leq -a\end{cases}}$

$$\left|\frac{۳x-۳-۴x-۲}{۶}\right| \geq \frac{۱}{۳} \Rightarrow \left|\frac{-x-۵}{۶}\right| \geq \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{-x-۵}{۶} \geq \dfrac{۱}{۳} \xrightarrow{\times ۶} -x-۵ \geq ۲ \Rightarrow -x \geq ۷ \Rightarrow x \leq -۷\\ \text{یا}\\ \dfrac{-x-۵}{۶} \leq -\dfrac{۱}{۳} \xrightarrow{\times ۶} -x-۵ \leq -۲ \Rightarrow -x \leq ۳ \Rightarrow x \geq -۳\end{cases}$$

۱۴ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\text{مختصات رأس سهمی } y = a(x-h)^۲ + k \text{ به‌صورت } (h,k) \text{ است.}}$

معادلهٔ سهمی را به‌فرم $y = a(x-h)^۲ + k$ می‌نویسیم:

$$y = -۲x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow y = -۲(x^۲ - ۲x - \frac{۱}{۲}) = -۲\left((x-۱)^۲ - ۱ - \frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow y = -۲\left((x-۱)^۲ - \frac{۳}{۲}\right) = -۲(x-۱)^۲ + ۳ \Rightarrow \text{مختصات رأس سهمی}:\ (۱,۳)$$

۱۵ - گزینه ۲ می‌دانیم:

۱ - محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$، محور تقارنی به معادلهٔ $y=\frac{-b}{2a}$ دارد.
۲ - عرض از مبدأ آن c است.

با شرایط فوق، گزینهٔ «۲» صحیح است:

$$y=ax^2-4ax-4 \Rightarrow \begin{cases} \text{محور تقارن}: x=-\frac{-4a}{2a}=2 \\ \text{عرض از مبدأ}=c=-4 \end{cases}$$

۱۶ - گزینه ۱ اگر عبارت درجه دوم، دو ریشه داشته باشد، جدول تعیین علامت آن به‌صورت زیر است:

ریشه ها

x		x_1		x_2	
P(x)	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

علامت عبارت در بین دو ریشه مثبت است؛ پس ضریب x^2 باید منفی باشد:

$$a^2-9<0 \Rightarrow a^2<9 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |a|<3 \Rightarrow -3<a<3$$

$x=0$ یک ریشهٔ عبارت درجه دوم است:

$$x=0 \Rightarrow (a^2-9)(0)^2+m\times 0+b^2-4=0 \Rightarrow b^2-4 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

از طرفی b باید عددی طبیعی باشد، پس $b=2$ قابل‌قبول است و چون باید $a<b$ باشد و a هم طبیعی باشد، $a=1$ به‌دست می‌آید و داریم:

$$2a+b=2\times 1+2=4$$

۱۷ - گزینه ۳

$$(|3-x|+2)(|2-x|-3)<0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{(|3-x|+2)} |2-x|-3<0$$

$$\Rightarrow |2-x|<3 \Rightarrow -3<2-x<3 \Rightarrow -5<-x<1 \Rightarrow -1<x<5$$

۱۸ - گزینه ۱ می‌دانیم:

معادلهٔ خط تقارن سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$، خط $x=\frac{-b}{2a}$ است.

$$x=-\frac{k}{4}=4 \Rightarrow k=-16$$

$$y=2x^2-16x+16 \to f(0)=16$$

۱۹ - گزینه ۲

$$P=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}=\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\frac{(x+2)(x^2-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\overset{x\neq -2}{\underset{x\neq 1}{=\!=}} x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

		-2		-1		1	
P	−	ن ت	−	0	+	ن ت	+

۲۰ - گزینه ۱

$$\left|\frac{2-x}{x+1}\right|<1 \Rightarrow -1<\frac{2-x}{x+1}<1$$

$$I: \frac{2-x}{x+1}-1<0 \Rightarrow \frac{2-x-x-1}{x+1}<0 \Rightarrow \frac{-2x+1}{x+1}<0 \to \begin{cases} -2x+1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

		-1		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	$+$		$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-2x+1}{x+1}$	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

$\Rightarrow x < -1$ یا $x > \frac{1}{2}$

$$II:\ \frac{2-x}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2-x}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2-x+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{x+1} > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$III:\ -1 < \frac{x+1}{-2} < 2 \Rightarrow -4 < x+1 < 2 \Rightarrow -5 < x < 1$$

$$I \wedge II \wedge III:\ \frac{1}{2} < x < 1$$

پس این اشتراک شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۲۱ - گزینه ۲

$$\left|\frac{5-|x|}{2}\right| < 4 \Rightarrow -4 < \frac{5-|x|}{2} < 4 \Rightarrow -8 < 5-|x| < 8$$

$$\Rightarrow -8 < |x|-5 < 8 \Rightarrow -3 < |x| < 13 \Rightarrow |x| < 13 \Rightarrow -13 < x < 13$$

۲۲ - گزینه ۲

$$(x^4 - x^3 + x^2 - x)(x^4+3) < 0 \Rightarrow \left(x^2(x^2-x) + (x^2-x)\right)\left(x^4+3\right) < 0$$

$$\Rightarrow (x^2-x)(x^2+1)(x^4+3) < 0 \Rightarrow x(x-1)(x^2+1)(x^4+3) < 0$$

		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2+1	$+$		$+$		$+$
x^4+3	$+$		$+$		$+$
P	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow x \in (0,1) \Rightarrow 1 - 0 = 1$

۲۳ - گزینه ۲ می‌دانیم: برای اینکه سهمی y با خط L تقاطع نداشته باشد معادلهٔ تلاقی آنها باید $\Delta < 0$ باشد.

$$\begin{cases} y = x^2 + mx + 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow\ x^2 + mx + 1 = x \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(1)(1) < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 4 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 < 0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 3$$

۲۴ - گزینه ۲ می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی نقطهٔ $S\left|\begin{matrix} \frac{-b}{2a} \\ f(\frac{-b}{2a}) \end{matrix}\right.$ است.

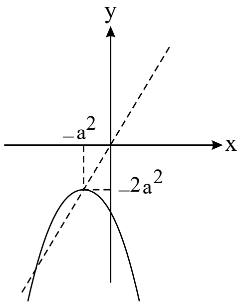
$$S\left|\begin{matrix} -\frac{4a}{2(1)} = -2a \\ f(-2a) = 0 \Rightarrow (-2a)^2 + 4a(-2a) + 1 = 0 \Rightarrow 4a^2 - 8a^2 + 1 = 0 \Rightarrow -4a^2 + 1 = 0 \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow{-2a<0} a = \frac{1}{2}$$

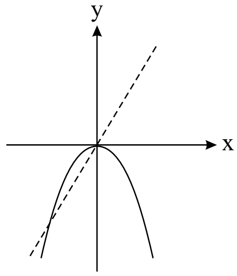
۲۵ - گزینه ۱ چون ضریب x^2 منفی است، پس سهمی از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند و گزینه‌های «۲» و «۴» رد می‌شوند. می‌دانیم سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ دارای رأس به طول

$-\frac{b}{2a}$ است. پس سهمی با معادلهٔ $y=-x^2-2a^2x+b$ دارای رأس به طول $-a^2$ است. از آن‌جا که این رأس روی خط $y=2x$ نیز قرار دارد، پس مختصات آن $(-a^2,-2a^2)$ است.

بنابراین نمودار سهمی به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:



$(a \neq 0)$



$(a = 0)$

بنابراین سهمی از ناحیه‌های اول و دوم عبور نمی‌کند.

۲۶ - گزینه ۲

$$-x^2-x-1:\begin{cases}\Delta=1-4(-1)(-1)=-3<0\\ a=-1<0\end{cases}\Rightarrow \text{همواره منفی}$$

با توجه به مخرج برای مثبت، منفی و صفر بودن عبارت A، باید عبارت صورت $\Delta>0$ باشد، بنابراین:

$$x^2+ax+1:\Delta>0\Rightarrow a^2-4(1)(1)>0\Rightarrow a^2-4>0\Rightarrow a^2>4\Rightarrow |a|>2$$

۲۷ - گزینه ۳

$$A=(2-|x|)(2x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}2-|x|=0\Rightarrow |x|=2\Rightarrow x=\pm 2\\ 2x-6=0\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3\end{cases}$$

x		-2		2		3	
2-|x|	−	0	+	0	−		−
2x-6	−		−		−	0	+
A	+	0	−	0	+	0	−

$\Rightarrow x\in(-2,2)\cup(3,+\infty)$

۲۸ - گزینه ۱ می‌دانیم:

تابع در اطراف ریشه‌های ساده و مکرّر مرتبهٔ فرد، تغییر علامت می‌دهد.
و در اطراف ریشه‌های مضاعف و مکرّر مرتبهٔ زوج، تغییر علامت نمی‌دهد.

x		-1		0		2	
p(x)	+	ت	+	0	−	0	−

از جدول تعیین علامت چنین برداشت می‌شود که ۰ و ۲ ریشه‌های صورت کسر و ۱− ریشهٔ مضاعف مخرج کسر $P(x)$ باشد، درنتیجه Δ در مخرج کسر صفر است، پس:

$$\begin{cases}a=2\\ a-b+c=0\\ \Delta=b^2-4ac=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=b-2\ (I)\\ b^2-8c=0\end{cases}\Rightarrow b^2-8b+16=0\Rightarrow (b-4)^2=0$$

$$\Rightarrow b=4\xrightarrow{(I)}c=2$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{4x(x-2)^2}{2(x+1)^2}$$

درنتیجه به‌ازای $x>0$، حاصل عبارت مثبت و به‌ازای $x<0$، حاصل عبارت منفی است، پس علامت $P(x)$ به‌دست آمده مغایر با علامت‌های مندرج در جدول تعیین علامت است. پس مقداری برای b وجود ندارد.

۲۹ - گزینه ۴ باتوجه به صورت سؤال، ۲ و ۱− ریشه‌های عبارت هستند و a عددی منفی است. با جایگذاری ریشه‌ها در معادله داریم:

$$y=ax^2+x+2a^2$$

$$\begin{array}{l}x=-1:\ 0=a-1+2a^2\ \Rightarrow\\ x=2:\ 0=4a+2+2a^2\ \Rightarrow\end{array}\begin{cases}2a^2+a-1=0 & (I)\\ 2a^2+4a+2=0 & (II)\end{cases}$$
$$-3a-3=0\Rightarrow a=-1$$

۳۰ - گزینه ۴

$$\frac{x^2-x}{x+2}\geq 2\Rightarrow\frac{x^2-x}{x+2}-2\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 2x - 4}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

		-2		-1		4	
(x+1) (x-4)	+		+	0	–	0	+
x+2	–	0	+		+		+
$\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)}$	–	ت ن	+	0	–	0	+

$$\Rightarrow x \in (-2, -1] \cup [4, +\infty)$$

پاسخنامه کلیدی

(۱) - ۱	(۶) - ۴	(۱۱) - ۳	(۱۶) - ۱	(۲۱) - ۲	(۲۶) - ۲
(۲) - ۴	(۷) - ۱	(۱۲) - ۲	(۱۷) - ۳	(۲۲) - ۲	(۲۷) - ۳
(۳) - ۱	(۸) - ۴	(۱۳) - ۲	(۱۸) - ۱	(۲۳) - ۲	(۲۸) - ۱
(۴) - ۳	(۹) - ۳	(۱۴) - ۲	(۱۹) - ۲	(۲۴) - ۲	(۲۹) - ۴
(۵) - ۳	(۱۰) - ۳	(۱۵) - ۲	(۲۰) - ۱	(۲۵) - ۱	(۳۰) - ۴