



علی هاشمی

نام آزمون: معادله ها و نامعادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۳۱۳ است. حاصل جمع این دو عدد کدام است؟

① ± 21

② ± 23

③ ± 25

④ ± 27

۲- عبارت درجه اول $27 - k^2 + 2kx = f(x)$ به ازای $x < k$ مثبت و به ازای $x > k$ منفی است. k کدام است؟

① $\{-3, 3\}$

② فقط ۳-

③ فقط ۳

④ ۲-

۳- اگر مجموعه جواب نامعادله $|ax + b| > 5$ به صورت $R - [-3, 2]$ باشد، $a + b$ کدام است؟

① ۲

② ۳

③ ۴

④ ۵

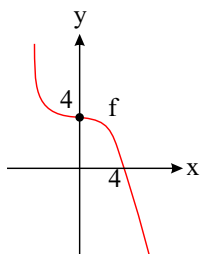
۴- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ می باشد، عبارت $A = \frac{xf(x)(2x^2 + 1)}{(3 - x)|x + 2|}$ در بازه $(0, a)$ همواره مثبت است. بیش ترین مقدار a کدام است؟

① ۲

② ۳

③ ۴

④ ۵





۵- اگر $f(x) = -x^2 + bx + c$ و ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ برابر با $x = -1$ و $x = 3$ باشند، عبارت $A = \frac{f(x)}{(x^2 - x + 1)(-x^2 + 4x - 3)}$

به ازای چند مقدار صحیح x ، منفی است؟

- ۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

۶- اگر $(4 و 3 و -1)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی کدام است؟

- ۱) $x = 1$
۲) $x = 2$
۳) $x = 4$
۴) $y = 4$

۷- مجموعه جواب نامعادله $\frac{(x^2 + 4)(|x| + 2)}{(x^2 - 4)(x^2 - x + 1)} < 0$ کدام است؟

- ۱) $(2, +\infty)$
۲) $(-2, 2)$
۳) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
۴) $(-\infty, -2)$

۸- اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = mx^2 + (m^2 + 2)x + 2m$ به صورت $\begin{array}{c|c|c} x & n & \\ \hline P(x) & - & \circ & - \end{array}$ باشد، مقدار عددی $m + n$ کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{2}$
۲) صفر
۳) -1
۴) $-\sqrt{2}$



۹- اگر S رأس سهمی $y = -\sqrt{3}x^2 + 4x - \sqrt{3}$ و دو نقطه‌ی A و B محل تلاقی این سهمی با محور طول‌ها باشد، مساحت مثلث ASB کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
 $\frac{1}{3}$ (۳)
 $\frac{2}{3}$ (۴)

۱۰- اگر مجموعه جواب نامعادله $y^2 + y - 2 > 0$ به صورت $A = (-\infty, a) \cup (b, c) \cup (d, +\infty)$ و $y = |7 - 2x| - 4$ باشد، حاصل عبارت $\frac{ad}{b+c}$ کدام است؟

- $\frac{7}{6}$ (۱)
 $\frac{7}{3}$ (۲)
 $\frac{3}{7}$ (۳)
 $\frac{6}{7}$ (۴)

۱۱- اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{2x^2 + x + 1} < \frac{1}{x^2 + 1}$ ، به صورت $R - [a, b]$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۱ (۲)
۲ (۳)
۳ (۴)

۱۲- اگر نامعادله $\frac{ax^2 - \frac{1}{2}ax - 3}{-x^2 - x - 1} \leq 3$ به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد a کدام است؟

- هر مقدار (۱)
-۶ (۲)
۶ (۳)
هیچ مقدار (۴)



۱۳- اگر رأس سهمی $y = ax^2 + 2ax - 3$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض b قطع کند، حاصل ab کدام است؟

- ① -۳
- ② -۲
- ③ -۶
- ④ ۶

۱۴- b در کدام بازه باشد، تا عبارت درجه دوم $ax^2 + bx - b$ همواره منفی شود؟

- ① $(-4a, 0)$
- ② $(0, 4a)$
- ③ $(0, -4a)$
- ④ $(4a, 0)$

۱۵- اگر در حل معادله $2x(4x - 3) = 13$ به روش مربع کامل، آن را به شکل $(x - a)^2 = b$ بازنویسی کنیم، حاصل $\frac{b}{a^2}$ کدام است؟

- ① ۱۲
- ② $\frac{113}{9}$
- ③ ۱۴
- ④ $\frac{130}{9}$

۱۶- سه مخزن کروی تو در تو را که هم‌مرکز هستند، در نظر بگیرید. حجم بزرگترین مخزن برابر با 36π و حجم کوچکترین مخزن برابر با $\frac{32}{3}\pi$ است، شعاع مخزن میانی، کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

- ① $\sqrt{2}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ $\sqrt{5}$
- ④ $\sqrt{10}$



۱۷- اگر رأس سهمی به معادله $y = -2x^2 + mx - 6$ روی نیمساز ربع دوم باشد، m کدام است؟

- ① -۶
- ② ۸
- ③ ۶
- ④ -۸

۱۸- اگر مقدار عبارت $\frac{ax+3}{2x-b}$ تنها در فاصله $2 > x > -\frac{1}{3}$ کمتر از صفر باشد، حاصل ab کدام است؟ ($a, b > 0$)

- ① ۱۸
- ② ۲۴
- ③ ۴۸
- ④ ۳۶

۱۹- اگر اشتراک مجموعه جواب دو نامعادله $3x - 1 < 8$ و $3x - 1 < -2$ را به صورت $|x - \alpha| < \beta$ بنویسیم، $\alpha + \beta$ کدام است؟

- ① -۳
- ② -۲
- ③ ۲
- ④ ۳

۲۰- اگر معادله سهمی $y = ax^2 - 8x + c$ بر خط $y = -4$ مماس باشد و محور x ها را در $x = 2$ قطع کند، $a + c$ کدام می تواند باشد؟

- ① ۱۰
- ② ۱۱
- ③ ۱۲
- ④ ۱۳



۲۱- اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ناحیه اول باشد و محور x ها را در نقطه‌هایی به طول ۱- و ۳ قطع کند، آنگاه این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{3}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) ۱

۲۲- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{\sqrt{x-|x|+2}} > 0$ کدام است؟ (کامل‌ترین گزینه را انتخاب نمایید.)

۱) $\mathbb{R}$

۲) $(-1, 0]$

۳) $[0, +\infty)$

۴) $(-1, +\infty)$

۲۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، نمودار سهمی $y = mx^2 - x^2 + m + 2\sqrt{2}x$ از نواحی اول و دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m < 1$

۲) $m \geq 2$

۳) $m \leq -1$

۴) $m \leq -1$ یا $m \geq 2$

۲۴- مجموعه جواب نامعادله $x - 3 \leq 2x^2 - x - 3 \leq 5x - 1$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) بی‌شمار



x	-2	1
y	-0	-0

۲۵- جدول تعیین علامت کدام یک از چندجمله‌ای‌های زیر به صورت زیر می‌باشد؟

① $y = x^2 + x - 2$

② $y = x^2 - x + 2$

③ $y = x^3 + 3x^2 - 4$

④ $y = x^3 - 3x^2 + 4$

۲۶- اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+a}{x}$ به صورت بازه $(0, +\infty) \cup (b, -\frac{1}{3}]$ باشد، کدام $a - b$ است؟

① ۱

② ۴

③ $\frac{1}{3}$

④ ۲

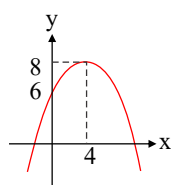
۲۷- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^3 + 2x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1} \geq 2$ کدام است؟

① $(0, +\infty)$

② $[2, +\infty)$

③ $[2, 5]$

④ $(-\infty, 2]$



۲۸- شکل زیر سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد، کدام گزینه تعیین علامت y را به درستی نمایش می‌دهد؟

x	-3	11
y	-0	+0

①

x	-2	10
y	-0	+0

②

x	-4	12
y	-0	+0

③

x	-2	10
y	+0	-0

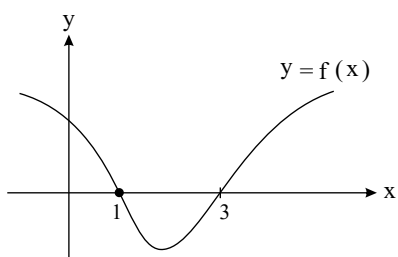
④



۲۹- اگر $a \leq m \leq b$ بزرگ‌ترین بازه برای m باشد که به ازای آن، عبارت $A = x^2 + 2mx + x + 1$ تغییر علامت ندهد، حاصل ab کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$
 ② $\frac{3}{4}$
 ③ $-\frac{3}{4}$
 ④ $-\frac{1}{2}$

۳۰- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. اگر عبارت $A = \frac{xf(x)}{|x^2 - 9|}$ در بازه $(-1, a)$ همواره منفی باشد، بیش‌ترین مقدار a کدام است؟



- ① صفر
 ② ۱
 ③ ۳
 ④ ۲



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ دو عدد صحیح متوالی را x و $x + 1$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{فرض } x^2 + (x+1)^2 &= 313 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 312 = 0 \\ \div 2 \Rightarrow x^2 + x - 156 &= 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-156)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-1 \pm 25}{2} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 12, x+1 = 13 \\ x = -13, x+1 = -12 \end{array} \right\} &= \text{مجموع } \pm 25 \end{aligned}$$

۲ - گزینه ۲ برای آنکه عبارت درجه اول $ax + b$ قبل از $x = k$ مثبت باشد و بعد از $x = k$ منفی باشد، باید اولاً k ریشه عبارت باشد و ثانیاً ضریب x منفی باشد در این صورت شیب خط منفی است و در نقطه $x = k$ محور طول‌ها را قطع می‌کند:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= 2kx + k^2 - 27 \Rightarrow f(k) = 2k^2 + k^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3k^2 - 27 = 0 \\ \Rightarrow 3k^2 &= 27 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3 \quad \text{اشتراک} \\ 2) \text{ضریب } x &= 2k \Rightarrow 2k < 0 \Rightarrow k < 0 \quad \longrightarrow k = -3 \end{aligned}$$

۳ - گزینه ۲

$$\boxed{\text{بازه } [\alpha, \beta] \text{ را می‌توان به صورت } \left| x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \leq \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ با قدر مطلق نوشت.}}$$

بازه $[-3, 2]$ با بیان قدرمطلق به صورت زیر است:

$$\left| x - \frac{-3+2}{2} \right| \leq \frac{2-(-3)}{2} \Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{5}{2}$$

پس بازه $[-3, 2] - \mathbb{R}$ عبارتست از:

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{5}{2}$$

برای آن که بتوانیم این رابطه را با $|ax + b| > 5$ مقایسه کنیم، طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times(+2)} 2 \left| x + \frac{1}{2} \right| > 5 \Rightarrow |2x + 1| > 5 \quad \left. \begin{array}{l} \text{مقایسه} \\ |ax + b| > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 + 1 = 3$$

۴ - گزینه ۲ طبق نمودار، تابع f در بازه $(-\infty, 4)$ مثبت و در بازه $(4, +\infty)$ منفی است. ریشه‌های سایر عوامل را به دست می‌آوریم و جدول را رسم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x &= 0 & 2x^2 + 1 &= 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \text{ ریشه ندارد.} \\ 3 - x &= 0 \Rightarrow x = 3 & |x + 2| &= 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

x	-2	0	3	4
x	-	-	+	+
f(x)	+	+	+	-
x+2	+	+	+	+
3-x	+	+	-	-
A	-	-	+	+

$$\left. \begin{array}{l} \text{پاسخ مسأله} \\ \text{فرض } (0, a) \end{array} \right\} \Rightarrow a = 3$$

۵ - گزینه ۱ $f(x)$ عبارتی درجه ۲ است و ضریب x^2 در آن منفی است؛ پس علامت آن در بین دو ریشه‌اش مثبت (مخالف علامت a) و در خارج از دو ریشه‌اش منفی (موافق علامت a) خواهد بود. عبارات درجه ۲ مخرج را نیز به همین ترتیب تعیین علامت می‌کنیم و جدول را تشکیل می‌دهیم:

همواره مثبت است. (موافق علامت a) $\Rightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow 5 = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 3 &= 0 \xrightarrow{x(-1)} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ \text{بین دو ریشه مثبت و خارج از دو ریشه منفی است.} \end{aligned}$$



x	-1	1	3
f(x)	-	+	-
$x^2 - x + 1$	+	+	+
$-x^2 + 4x - 3$	-	-	+
A	+	-	+

عبارت A در بازه $(-1, 1)$ منفی است و در این بازه تنها عدد صحیح موجود عبارتست از $x = 0$.

۶ - گزینه ۱ خط تقارن سهمی، خطی است که از رأس می‌گذرد.

نقاط هم عرض بر روی سهمی، نسبت به خط تقارن، قرینه‌ی یکدیگرند.

دو نقطه‌ی (۴ و -۱) و (۳ و ۴) هم عرض هستند. پس خط تقارن از وسط این دو نقطه عبور می‌کند. و معادله‌ی آن به صورت «میانگین طول‌ها = x» خواهد بود:

$$x = \frac{3 + (-1)}{2} \Rightarrow x = 1$$

۷ - گزینه ۲

نکته: اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای $\Delta < 0$ باشد (دارای ریشه حقیقی نباشد)، آنگاه این عبارت در کل اعداد حقیقی، هم علامت a است.

با تعیین ریشه‌های معادله، عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$|x| + 2 = 0 \Rightarrow |x| = -2 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	-2	2
$x^2 + 4$	+	+
$ x + 2$	+	+
$x^2 - x + 1$	+	+
$x^2 - 4$	+	-
عبارت	+	-

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $(-2, 2)$

۸ - گزینه ۲ جدول تعیین علامت $P(x)$ نشان می‌دهد که $x = n$ ریشه مضاعف عبارت $P(x)$ است؛ پس $\Delta = 0$ است و داریم:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (x^2 + 2)^2 - 4(m)(2m) = 0 \Rightarrow m^4 + 4m^2 + 4 - 8m^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^4 - 4m^2 + 4 = 0 \Rightarrow (m^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

از طرفی (باز هم بر طبق جدول) عبارت $P(x)$ همواره منفی است. پس ضریب x^2 در آن منفی است؛ یعنی:

$$m < 0 \Rightarrow m = -\sqrt{2}$$

حال $P(x)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$P(x) = -\sqrt{2}x^2 + 4x - 2\sqrt{2}$$

ریشه مضاعف این عبارت از رابطه $n = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید، یعنی:

$$n = -\frac{4}{-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow m + n = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

۹ - گزینه ۳ محل تلاقی سهمی با محور طول‌ها نقاطی است که عرض آن‌ها برابر صفر است، پس در سهمی داده شده مقدار y را برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقاط تلاقی را پیدا کنیم:

$$-\sqrt{3}x^2 + 4x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})}}{2(-\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2\sqrt{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

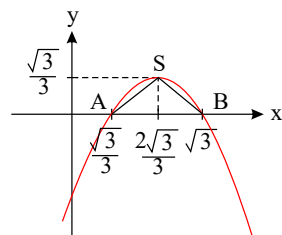
همچنین رأس سهمی عبارت است از:

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad y_{\text{رأس}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-4}{-4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

حال با داشتن مختصات نقاط A, B, S و به کمک شکل مقابل، مساحت مثلث ASB برابر است با:



$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times (\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$$



۱۰ - گزینه ۴

$$y^2 + y - 2 > 0 \Rightarrow (y+2)(y-1) > 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها} \begin{cases} y = -2 \\ y = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} y & -2 & 1 \\ \hline y^2+y-2 & + & - \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y > 1 \Rightarrow |y-2x| - 4 > 1 \Rightarrow |y-2x| > 5 \Rightarrow \begin{cases} y-2x > 5 \Rightarrow 2x < y-5 \Rightarrow x < 1 \\ y-2x < -5 \Rightarrow 2x > y+5 \Rightarrow x > 6 \end{cases} \\ y < -2 \Rightarrow |y-2x| - 4 < -2 \Rightarrow |y-2x| < 2 \Rightarrow -2 < y-2x < 2 \\ \xrightarrow{-y} -9 < -2x < -5 \xrightarrow{\div(-2)} \frac{9}{2} > x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, \frac{9}{2}) \cup (6, +\infty)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{5}{2} \\ c = \frac{9}{2} \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{ad}{b+c} = \frac{6}{7}$$

۱۱ - گزینه ۲

$$\frac{1}{2x^2+x+1} < \frac{1}{x^2+1}$$

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ چون در آن عدد ۱ با یک عبارت نامنفی جمع شده است.

در عبارت $2x^2 + x + 1$ هم $a > 0$ و $\Delta < 0$ است؛ پس همواره نامنفی است. پس می‌توانیم طرفین نامعادله را معکوس کنیم و جهت نامساوی را تغییر دهیم:

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} 2x^2 + x + 1 > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها: } \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline x(x+1) & + & - \end{array}$$

$$\text{مجموعه جواب} = R - [-1, 0] \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 0 - (-1) = 1$$

۱۲ - گزینه ۳

عبارت درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $a < 0$, $\Delta < 0$ همواره منفی است.

عبارت $-x^2 - x - 1$ همواره منفی است؛ چون در آن $a < 0$, $\Delta < 0$ است؛ پس می‌توان طرفین نامعادله را در آن ضرب کرد؛ در این صورت جهت نامعادله عوض می‌شود:

$$\xrightarrow{\times(-x^2-x-1)} ax^2 - \frac{1}{2}ax - 3 \geq -3x^2 - 3x - 3 \rightarrow (a+3)x^2 + (3-\frac{1}{2}a)x \geq 0$$

برای آنکه نامعادله فوق همواره برقرار باشد باید $\Delta \leq 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد:

$$\Delta \leq 0 \rightarrow (3 - \frac{1}{2}a)^2 - 4(a+3) \times 0 \leq 0 \rightarrow (3 - \frac{1}{2}a)^2 \leq 0$$

از آنجا که عبارت $(3 - \frac{1}{2}a)^2$ نامنفی است، فقط حالت تساوی در نامساوی فوق برقرار است:

$$(3 - \frac{1}{2}a)^2 = 0 \rightarrow 3 - \frac{1}{2}a = 0 \rightarrow 3 = \frac{1}{2}a \rightarrow a = 6 \quad (1)$$

از طرفی ضریب x^2 باید مثبت باشد:

$$a + 3 > 0 \rightarrow a > -3 \quad (2)$$

و اشتراک ۱ و ۲ عبارتست از: $a = 6$



۱۳ - گزینه ۴

می‌دانیم:	$\begin{array}{ l} \frac{-b}{2a} \\ f(-\frac{b}{2a}) \end{array}$
رأس سهمی به معادله $ax^2 + bx + c$ نقطه	

$$S \left\{ \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = \frac{-(2a)}{2(a)} = -1 \\ f(-1) \xrightarrow{x=y} -1 \\ \text{نیمساز ربع اول و سوم} \end{array} \right\} \Rightarrow -a - 3 = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$f(-1) = a(-1)^2 + 2a(-1) - 3 = a - 2a - 3 = -a - 3$$

$$\xrightarrow{a=-2} y = -2x^2 - 4x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -3 \Rightarrow b = -3$$

$$ab = -2 \times -3 = 6$$

۱۴ - گزینه ۳

می‌دانیم:	$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$
عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه	
می‌دانیم:	$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$
عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه	

$$ax^2 + bx - b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4a(-b) < 0 \Rightarrow b^2 + 4ab < 0 \Rightarrow b(b + 4a) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -4a \Rightarrow \xrightarrow{a < 0} -4a > 0 \end{cases}$$

	0	-4a	
$b^2 + 4ab$	+	-	+

$$\Rightarrow 0 < b < -4a \Rightarrow b \in (0, -4a)$$

۱۵ - گزینه ۲

$$2x(4x - 3) = 13 \Rightarrow 8x^2 - 6x - 13 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{13}{8}$$

$$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{13}{8} + \frac{9}{64} \Rightarrow (x - \frac{3}{8})^2 = \frac{104 + 9}{64} = \frac{113}{64}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{113}{64} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a^2} = \frac{113}{\cancel{64}} \times \frac{\cancel{64}}{9} = \frac{113}{9}$$

۱۶ - گزینه ۳

می‌دانیم:	حجم کره به شعاع r از رابطه $\frac{4}{3}\pi r^3$ به دست می‌آید.
-----------	--

حجم بزرگ‌ترین مخزن < حجم مخزن میانی < حجم کوچک‌ترین مخزن

$$\frac{32}{3}\pi < \frac{4}{3}\pi r^3 < 36\pi \xrightarrow{\times \frac{3}{4}\pi} 8 < r^3 < 27 \Rightarrow 2 < r^3 < 3^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} 2 < r < 3$$

تنها گزینه بین ۲ و ۳، گزینه ۳ است یعنی $\sqrt{5}$

۱۷ - گزینه ۴

از آن جایی که رأس سهمی $(x_S = \frac{-b}{2a}, y_S = \frac{\Delta}{4a})$ روی نیم‌ساز ربع دوم $(y = -x)$ قرار دارد بنابراین $x_S = -y_S$ است؛ داریم:

$$\frac{-b}{2a} = -(-\frac{\Delta}{4a})$$

$$\frac{-m}{-4} = \frac{m^2 - 4(-2)(-6)}{-8} \rightarrow m^2 + 2m - 48 = 0$$

$$(m + 8)(m - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = 6 \end{cases} \quad (1)$$

از طرفی در ربع دوم $x < 0$ و $y > 0$ است، بنابراین:

$$x_S < 0 \rightarrow \frac{-m}{-4} < 0 \rightarrow \frac{m}{4} < 0 \rightarrow m < 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \quad (2)} m = -8$$



$$ax + 3 = 0 \Rightarrow ax = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{a} \xrightarrow{a > 0} x = -\frac{3}{a} < 0$$

$$2x - b = 0 \Rightarrow 2x = b \Rightarrow x = \frac{b}{2} \xrightarrow{b > 0} x = \frac{b}{2} > 0$$

با رسم جدول علامت داریم:

	$-\frac{3}{a}$	$\frac{b}{2}$	
$ax + 3$	-	+	+
$2x - b$	-	-	+
$\frac{ax + 3}{2x - b}$	+	-	تن

با توجه به جدول بالا مقدار عبارت موردنظر تنها در بازه $-\frac{3}{a} < x < \frac{b}{2}$ کمتر از صفر است، پس داریم:

$$\begin{cases} -\frac{3}{a} < x < \frac{b}{2} \\ -\frac{1}{3} < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 9 \\ \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow ab = 36$$

$$3x - 1 < 8 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3 \quad (I)$$

$$-2 < 3x - 1 \Rightarrow 3x + 1 > 0 \Rightarrow 3x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{3} \quad (II)$$

$$(I) \wedge (II) : \frac{-1}{3} < x < 3 \xrightarrow{\text{طرفین} \cdot \frac{4}{3}} \frac{-5}{3} < x - \frac{4}{3} < \frac{4}{3} \Rightarrow |x - \frac{4}{3}| < \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

می‌دانیم: در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی نقطه $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است.

باتوجه به اینکه خط $y = -4$ بر سهمی مماس است، پس از رأس سهمی عبور می‌کند.

$$\text{عرض رأس سهمی} : \frac{-\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \Delta = 16a \Rightarrow b^2 - 4ac = 16a \Rightarrow 64 - 4ac = 4a$$

$$\Rightarrow 16 - ac = 4a \Rightarrow 16 = 4a + ac \Rightarrow 16 = a(4 + c) \quad (I)$$

سهمی محور x ها را در $x = 2$ قطع می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$(2, 0) : 4a - 16 + c = 0 \Rightarrow 4a + c = 16 \Rightarrow c = 16 - 4a \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} 16 = a(4 + 16 - 4a) \Rightarrow 20a - 4a^2 = 16 \Rightarrow 4a^2 - 20a + 16 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 16 - 4a = 12 \\ c = 16 - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 13 \\ a + c = 4 \end{cases}$$

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی نقطه $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است.

اگر x_1, x_2 نقاط برخورد سهمی با محور x ها باشند، محور تقارن سهمی برابر است با: $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$

رأس سهمی روی نیمساز ناحیه اول است؛ بنابراین داریم: $S(x, x)$

سهمی محور x ها را در نقاط ۳ و ۱ قطع کرده؛ بنابراین داریم:

$$x_S = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{رأس سهمی} : S(1, 1) \Rightarrow \text{معادله سهمی} : y = a(x - 1)^2 + 1$$



می‌دانیم: زیر رادیکال به فرجه زوج، فقط اعداد نامنفی تعریف شده هستند.

$$y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 1 \xrightarrow{x=0} y = \frac{-1}{4}(-1)^2 + 1 = \frac{-1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

۲۲ - گزینه ۴

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

عدد
تعریف نشده: $\frac{\text{عدد}}{0}$

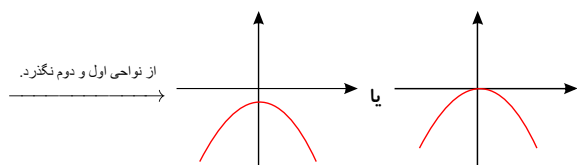
$$\frac{1}{\sqrt{x-|x|+2}} > 0 \Rightarrow \sqrt{x-|x|+2} > 0 \Rightarrow x-|x|+2 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow x-|x|+2 > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x \geq 0} x \in [0, +\infty) & (I) \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow x-(-x)+2 > 0 \Rightarrow 2x+2 > 0 \Rightarrow 2x > -2 \\ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \in (-1, +\infty) \xrightarrow{x < 0} x \in (-1, 0) & (II) \end{cases}$$

$$I \cup II = (-1, +\infty)$$

۲۳ - گزینه ۳

$$y = mx^2 - x^2 + m + 2\sqrt{2}x \rightarrow y = \underbrace{(m-1)}_a x^2 + \underbrace{2\sqrt{2}}_b x + \underbrace{m}_c$$



$$\rightarrow a < 0, \Delta \leq 0$$

بنابراین نمودار زیر محور x ها یا بر آن مماس است:

$$a < 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (1)$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4(m-1)(m) \leq 0 \Rightarrow 8 - 4m^2 + 4m \leq 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m-2) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} m & & -1 & 2 \\ \hline \text{عبارت} & + & \circ & - \circ + \end{array} \Rightarrow m \leq -1 \text{ یا } m \geq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} m \leq -1$$

۲۴ - گزینه ۲

$$x-3 \leq 2x^2 - x - 3 \leq 5x-1$$

$$(I) : x-3 \leq 2x^2 - x - 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 - x + 3 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x \geq 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & \\ \hline 2x^2-2x & + \circ & - \circ & + \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \quad (I)$$

$$(II) : 2x^2 - x - 3 \leq 5x-1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 - 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 2 \leq 0$$



$$\Rightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 + 4 = 13 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{13} \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

	$\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$			
$x^2 - 3x - 1$	+	○	-	○	+

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right] \quad (II)$$

$$(I) \wedge (II) : \left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, 0 \right] \cup \left[1, \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right] : \text{۴ عدد صحیح } ۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ در این مجموعه جواب قرار دارد.}$$

۲۵ - گزینه ۳

می‌دانیم: تابع در اطراف ریشه‌های ساده و مکرر مرتبه فرد، تغییر علامت می‌دهد. و در اطراف ریشه‌های مضاعف و مکرر مرتبه زوج، تغییر علامت نمی‌دهد.

بنابراین $x = -2$ ریشه مضاعف و $x = 1$ ریشه ساده است و داریم:

$$y = (x + 2)^2(x - 1) = (x^2 + 4x + 4)(x - 1) = x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$$

$$\Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4$$

۲۶ - گزینه ۴

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+a}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+a}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x(x-1) - (x+1)(x+a)}{x(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - x^2 - (a+1)x - a}{x(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{-(a+2)x - a}{x(x+1)} < 0$$

x	$-\infty$	b	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$-\frac{(a+2)x - a}{x(x+1)}$	+	○	-	○	+

$$x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -1$$

$$-(a+2)x - a = 0 \xrightarrow{x = -\frac{1}{3}} \frac{(a+2)}{3} - a = 0 \Rightarrow a + 2 - 3a = 0 \Rightarrow -2a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

در نتیجه داریم:

$$a - b = 1 - (-1) = 2$$

۲۷ - گزینه ۱

می‌دانیم: عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$
عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

$$\frac{x^2 + 2x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1} - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x^2 - x + 2 - 2x^2 + 2x - 2}{x^2 - x + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x+1)}{x^2 - x + 1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ جواب ندارد} \\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0 \end{cases}$$



	0	
x	-	+
x^2+1	+	+
x^2-x+1	+	+
$\frac{x(x^2+1)}{x^2-x+1}$	-	+

$\Rightarrow x \in [0, +\infty)$

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: معادله سهمی به رأس $S(b, h)$ به صورت $y = a(x - b)^2 + h$ است.

$$S(4, 8) : y = a(x - 4)^2 + 8$$

نقطه $(0, 6)$ در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$6 = a(0 - 4)^2 + 8 \Rightarrow 6 = 16a + 8 \Rightarrow 16a = -2 \Rightarrow a = \frac{-1}{8}$$

$$y = \frac{-1}{8}(x - 4)^2 + 8 \rightarrow y = 0 \xrightarrow{\times 8} -(x - 4)^2 + 64 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 64$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 8 \Rightarrow x = 12 \\ x - 4 = -8 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

پس ریشه‌های معادله $y = 0$ برابر با $x = -4$ و $x = 12$ است. باتوجه به نمودار واضح است گزینه ۳ پاسخ است.

۲۹ - گزینه ۳

$$A = x^2 + 2mx + x + 1 = x^2 + (2m + 1)x + 1$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4(1)(1) \leq 0 \Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4 \leq 0 \Rightarrow 4m^2 + 4m - 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow m^2 + m - \frac{3}{4} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1^2 - 4(1)(-\frac{3}{4}) = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 \\ m = \frac{-1 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2} \\ m = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$m^2 + m - \frac{3}{4}$	+	-

$$\Rightarrow \frac{-3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{-3}{4}$$

۳۰ - گزینه ۱

$$\frac{xf(x)}{|x^2 - 9|} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 1, 3 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

	$-\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$
x	-	-	+	+	+	+
f(x)	+	+	+	-	-	+
$ x^2-9 $	+	+	+	+	+	+
A	-	-	+	-	-	+

$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, 3)$

$$(-1, a) \in (-\infty, 0) \cup (1, 3) \Rightarrow a = 0$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۳	۲۱ - ۱	۲۶ - ۴
۲ - ۲	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۴	۲۲ - ۴	۲۷ - ۱
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۴	۱۸ - ۴	۲۳ - ۳	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۱	۱۰ - ۴	۱۵ - ۲	۲۰ - ۴	۲۵ - ۳	۳۰ - ۱