نام آزمون: معادله ها و نامعادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - چه عددی را به طرفین معادلهٔ زیر اضافه کنیم تا بتوانیم با استفاده از روش مربع کامل آن را حل کنیم؟

$$x^{۲} + \sqrt{\frac{۵ - ۲\sqrt{۶}}{۲}}x = ۰$$

① $\frac{۵ + ۲\sqrt{۶}}{۸}$

② $\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۲})^{۲}$

③ $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$

④ $(\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۲})$

۲ - معادلهٔ $|x^{۲} - ۱| + |x^{۲} + ۲x + ۱| = ۰$، چند جواب دارد؟

① ۲

② ۳

③ صفر

④ ۱

۳ - محور تقارن سهمی $y = -۲x^{۲} + ۵x - ۱$ خط به معادلهٔ $ax - ۲y = ۱$ را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۱۱}{۸}$ قطع می‌کند. a کدام است؟

① ۲

② ۳

③ -۲

④ -۳

۴ - به‌ازای چند مقدار صحیح x، اعداد $x^۲$، $۳x$ و ۴ می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند؟

(۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) بی‌شمار

۵ - اگر یک سهمی از نقاط $A(۱,۳)$ و $B(۳,۳)$ بگذرد و رأس آن روی خط $y=-x$ قرار داشته باشد، رأس این سهمی با رأس کدام یک از سهمی‌های زیر یکسان است؟

(۱) $y=x^۲+۴x+۶$
(۲) $y=\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۴}{۳}x-\frac{۲}{۳}$
(۳) $y=\frac{۳}{۲}x^۲-۶x+۴$
(۴) $y=\frac{۱}{۴}x^۲-x+۳$

۶ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x(x^۲+۴)<۰$ کدام است؟

(۱) $x<۰$
(۲) $x>۰$
(۳) $۰<x<۲$
(۴) $-۲<x<۰$

۷ - اگر معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

(۱) $-\frac{۳}{۴}$
(۲) $-\frac{۱}{۴}$
(۳) $\frac{۱}{۴}$
(۴) $\frac{۳}{۴}$

۸ - مجموع مربعات سه عدد طبیعی متوالی برابر با ۷۷ است. مجموع این سه عدد کدام است؟

(۱) ۱۲
(۲) ۱۵
(۳) ۱۸
(۴) ۲۱

۹ - عبارت $P(x) = x^۲ + ax + b$ به‌ازای $۲ < x < ۳$ منفی و به‌ازای بقیهٔ مقادیر نامنفی است. مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۱۱
(۴) -۱۱

۱۰ - اگر خط $x = ۲$ خط تقارن سهمی $y = (m - ۱)x^۲ + x + ۳$ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) $\frac{۴}{۳}$
(۲) $\frac{۳}{۴}$
(۳) $\frac{۴}{۵}$
(۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۱ - اگر معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، کدام‌یک از معادلات زیر ریشهٔ حقیقی ندارد؟

(۱) $-ax^۲ + bx + c = ۰$
(۲) $ax^۲ - bx + c = ۰$
(۳) $ax^۲ + bx - c = ۰$
(۴) $ax^۲ - bx - c = ۰$

۱۲ - عبارت گویای $\frac{۳x+۱}{ax^۲+۳x+۹}$ به‌ازای تمامی مقادیر حقیقی x تعریف شده است. حدود a کدام است؟

۱) $a > -\frac{۱}{۴}$

۲) $a < \frac{۱}{۴}$

۳) $a > \frac{۱}{۴}$

۴) $a < -\frac{۱}{۴}$

۱۳ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\left|x^۲+x\right| \leq ۲$ به‌صورت $[a,b]$ است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۴ - در سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$، اگر $f(۱)=-۲$ و $f(۳)=۱$، کدام گزینه در مورد معادلهٔ $f(x)=۰$ درست است؟

۱) قطعاً دو ریشهٔ متمایز دارد.

۲) ممکن است ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

۳) می‌تواند ریشه نداشته باشد.

۴) قطعاً ریشه ندارد.

۱۵ - اگر $(۲,۵)$ و $(-۱,۲۰)$ دو نقطه از یک سهمی و $x=۱$ خط تقارن آن باشد، این سهمی در نقطه‌ای با کدام عرض محور yها را قطع می‌کند؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

۱۶ - نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ محور xها را در نقاطی با طول‌های $۱-$ و ۳ و محور yها را در نقطه‌ای با عرض ۶ قطع می‌کند. فاصلهٔ رأس سهمی از محور xها کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۴

۱۷ - اگر $a < ۰$ و بازهٔ (a, b) بزرگترین بازه‌ای باشد که عبارت $P(x) = \frac{x^۳ - ۱۲x^۲ + ۳۶x}{x^۲ + x - ۲}$ در آن بازه مثبت است، در این صورت $a + b$ کدام است؟

(۱) -۳

(۲) -۱

(۳) ۴

(۴) -۲

۱۸ - اگر نتیجهٔ جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{-۲(x^۲ - a^۲)(x + b)}{(۳x - c)^۲}$ به‌صورت زیر باشد، $a^۲b - c$ کدام است؟

x	$-\infty$	-3	-2	3	5	$+\infty$
p(x)	+	−	+	−	تن	−

(۱) ۳

(۲) -۳۳

(۳) -۳

(۴) ۳۳

۱۹ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{(x + ۲)(-x^۲ + x - ۱)}{x^۲ + x + ۳} > ۰$، شامل چند عدد صحیح منفی نیست؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

۲۰ - چند عدد صحیح در مجموعه جواب نامعادلهٔ زیر قرار دارد؟

$||x| - ۲| < ۳$

(۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

۲۱ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $| \frac{x-۱}{۲} - ۱ | \leq ۱$ به‌صورت بازهٔ (a, b) است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۶
(۴) ۱۲

۲۲ - مجموعه مقادیر m کدام باشد تا عبارت $\frac{(m-۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱}{-x^۲ - x - ۲}$ برای هر مقدار دلخواه x منفی باشد؟

(۱) $m < -۲$
(۲) $m > ۲/۵$
(۳) $۱ < m < ۲$
(۴) $۱ < m < ۲/۵$

۲۳ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|۲x + ۱| < ۳x - ۴$ کدام است؟

(۱) $(\frac{۳}{۵}, +\infty)$
(۲) $(\frac{۴}{۳}, +\infty)$
(۳) $(۵, +\infty)$
(۴) $(۷, +\infty)$

۲۴- حدود x برای آن که نمودار تابع $y=-۲x^۲+۳x$، پایین نمودار تابع $y=-۳x^۲+۷x-۳$ قرار گیرد، کدام است؟

(۱) $x<۱$

(۲) $x>۳$

(۳) $x<۱$ یا $x>۳$

(۴) $۱<x<۳$

۲۵- به ازای چند مقدار صحیح و نامنفی برای x ممکن است هر دو نامساوی $۲x+y<۷$ و $۲x+۱<-۳y-۴$ برقرار شوند؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۳

۲۶- اگر سهمی $y=ax^۲-bx+c$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۴}{b}$ و محور طول‌ها را فقط در نقطه‌ای به طول -۲ قطع کند، a کدام است؟ (سهمی پایین محور xها قرار دارد).

(۱) $-\frac{۱}{۲}$

(۲) $\frac{۱}{۲}$

(۳) -۲

(۴) $-\frac{۱}{۴}$

۲۷- به ازای چند مقدار صحیح برای m، نامساوی $\frac{x^۲-۶x+۱۰}{-۲x^۲+(m-۲)x-۲}<۰$ همواره برقرار است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

۲۸- اگر $x = ۲$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a^۲x^۲ - ۲ax + ۱ = ۰$ باشد، تعداد ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲ - ۳x + ۵a = ۰$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) نمی‌توان مشخص کرد.

۲۹- اگر رأس سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ روی محورyها و $ac < ۰$ باشد، مجموع طول نقاط برخورد سهمی و محور xها کدام است؟

(۱) $\sqrt{-\frac{c}{a}}$

(۲) صفر

(۳) $\sqrt[۲]{-\frac{c}{a}}$

(۴) $-\frac{c}{a}$

۳۰- اگر کمترین مقدار تابع $y = ۲x^۲ + ۱۲x + m - ۱$ برابر با (-۱) باشد، سهمی مذکور محور عرض‌ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(۱) ۱۷

(۲) ۱۸

(۳) ۱۹

(۴) ۲۰

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: $(x+a)^۲ = x^۲ + ۲ax + a^۲$

با توجه به کادر داریم:

$$x^۲ + \sqrt{\frac{۵-۲\sqrt{۶}}{۲}}x = ۰ \Rightarrow ۲a = \sqrt{\frac{۵-۲\sqrt{۶}}{۲}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{\frac{۵-۲\sqrt{۶}}{۲}}}{۲}$$

برای مربع کامل شدن عبارت فوق باید $a^۲$ را به طرفین معادله بیفزاییم. بنابراین:

$$a = \frac{\sqrt{\frac{۵-۲\sqrt{۶}}{۲}}}{۲} \Rightarrow a^۲ = \frac{\frac{۵-۲\sqrt{۶}}{۲}}{۴} = \frac{۵-۲\sqrt{۶}}{۸} = \frac{(\sqrt{۳})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ - ۲\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}}{۸}$$

$$= \frac{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲}{۸} = \frac{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲}{۲\times۴} = \frac{۱}{۲}(\frac{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲}{۴}) = \frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}^۲}{۲})$$

۲ - گزینه ۴

می‌دانیم: مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر می‌شود که هر دو عبارت همزمان صفر شوند.

$$\left.\begin{array}{l} x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x = -۱$$

۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: محور تقارن سهمی خط $ax^۲ + bx + c$ است. $x = \frac{-b}{۲a}$

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۵}{۲(-۲)} = \frac{۵}{۴} \quad \text{محور تقارن}$$

$$ax - ۲y = ۱ \xrightarrow[y=\frac{۱۱}{۸}]{x=\frac{۵}{۴}} a\times\frac{۵}{۴} - ۲\times\frac{۱۱}{۸} = ۱ \Rightarrow \frac{۵a}{۴} - \frac{۲۲}{۸} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۵a}{۴} = \frac{۳۰}{۸} \Rightarrow ۵a = ۱۵ \Rightarrow a = ۳$$

۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: مجموع هر دو ضلع مثلث، همواره از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

$$\begin{cases} x^۲ + ۳x > ۴ & (I) \\ x^۲ + ۴ > ۳x & (II) \\ ۳x + ۴ > x^۲ & (III) \end{cases}$$

$$I: x^۲ + ۳x - ۴ > ۰ \Rightarrow (x+۴)(x-۱) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۴ = ۰ \Rightarrow x = -۴ \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

x		-4		1	
x^2+3x-4	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow x < -۴ \text{ یا } x > ۱ \xrightarrow{\text{طول ضلع مثبت}} x > ۱$$

$$II: x^۲ - ۳x + ۴ > ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۱)(۴) = ۹ - ۱۶ = -۱۷ < ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{طول ضلع مثبت}} x > ۰$$

$$III: x^۲ - ۳x - ۴ < ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱) < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

x		-1		4	
x^2-3x-4	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow -۱ < x < ۴ \xrightarrow{\text{طول ضلع مثبت}} ۰ < x < ۴$$

$$I \cap II \cap III: ۱ < x < ۴ \xrightarrow{\text{مقادیر صحیح}} x = ۲, ۳$$

۵ - گزینه ۳

می‌دانیم: نقاط هم‌ارز روی سهمی نسبت به خط تقارن، یک فاصله‌اند و رأس سهمی مختصات $S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{۲a}\\ \frac{-\Delta}{۴a}\end{matrix}\right.$ است.

$A(۱,۳), B(۳,۳) \Rightarrow$ محور تقارن : $x=\frac{۱+۳}{۲}=۲ \Rightarrow$ طول رأس سهمی $=۲$

$y=-x \xrightarrow{x=۲} y=-۲$

$S(۲,-۲)$

گزینهٔ «۱»:
$$x_S=\frac{-b}{۲a}=-\frac{۴}{۲}=-۲$$

گزینهٔ «۲»:
$$x_S=\frac{-b}{۲a}=-\frac{-\frac{۴}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=-۲$$

گزینهٔ «۳»:
$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{۲\times\frac{۳}{۲}}=۲$$

$$y_S=\frac{۳}{۲}(۲)^۲-۶(۲)+۴=۶-۱۲+۴=-۲ \Rightarrow S(۲,-۲)$$

گزینهٔ «۴»:
$$x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲\times\frac{۱}{۴}}=۲$$

$$y_S=\frac{۱}{۴}(۲)^۲-۲+۳=۲ \Rightarrow S(۲,۲)$$

۶ - گزینه ۱

$x(x^۲+۴)<۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲+۴=۰ \Rightarrow x^۲=-۴ \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$

x	−	۰	+
x^2+4	+		+
$x(x^2+4)$	−	۰	+

۷ - گزینه ۱

می‌دانیم: معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=\frac{-b}{۲a}$ است هرگاه $\Delta=۰$ باشد.

$x^۲+ax+b=۰$

$\frac{-a}{۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲a=۲ \Rightarrow a=-۱$

$\Delta=۰ \Rightarrow a^۲-۴(۱)(b)=۰ \xrightarrow{a=-۱} ۱-۴b=۰ \Rightarrow ۱=۴b \Rightarrow b=\frac{۱}{۴}$

$a+b=-۱+\frac{۱}{۴}=-\frac{۳}{۴}$

۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: $AB=۰ \Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$

$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

اگر اعداد را $x, x+۱, x+۲$ فرض کنیم داریم:

$x^۲+(x+۱)^۲+(x+۲)^۲=۷۷$

$x^۲+x^۲+۲x+۱+x^۲+۴x+۴=۷۷$

$۳x^۲+۶x+۵=۷۷ \Rightarrow ۳x^۲+۶x-۷۲=۰ \Rightarrow x^۲+۲x-۲۴=۰ \Rightarrow (x+۶)(x-۴)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \\ x+۶=۰ \Rightarrow x=-۶ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

$x=۴ \Rightarrow x+x+۱+x+۲=۳x+۳=۱۲+۳=۱۵$

۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ که در آن $\Delta>۰$ باشد دارای دو ریشه است که علامت عبارت بین آن دو ریشه مخالف علامت a و در خارج آن دو ریشه هم علامت با a است.

ریشه‌های هر معادله در خودش صدق میکند.

x		2		3	
x^2+ax+b	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow x=۲, x=۳$

$(x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۵ \\ b=۶ \end{cases} \Rightarrow a+b=۱$

۱۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $ax^۲+bx+c$، معادلهٔ خط تقارن $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

$x=۲\ ,\ x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۲(m-۱)} \Rightarrow \frac{-۱}{۲(m-۱)}=۲ \Rightarrow ۴m-۴=-۱ \Rightarrow ۴m=۳ \Rightarrow m=\frac{۳}{۴}$

۱۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c$ ریشهٔ حقیقی ندارد هرگاه $\Delta<۰$

$ax^۲+bx+c : \Delta<۰ \Rightarrow b^۲-۴ac<۰ \Rightarrow b^۲<۴ac \xrightarrow{b^۲>۰} ۴ac>۰$

بررسی گزینه‌ها:

$۱)\Delta=b^۲+۴ac \xrightarrow[۴ac>۰]{b^۲>۰} \Delta>۰$

$۲)\Delta=b^۲-۴ac \xrightarrow{b^۲-۴ac<۰} \Delta<۰$

$۳)\Delta=b^۲+۴ac \xrightarrow[۴ac>۰]{b^۲>۰} \Delta>۰$

$۴)\Delta=b^۲+۴ac \xrightarrow[۴ac>۰]{b^۲>۰} \Delta>۰$

۱۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: ت.ن $=\frac{A}{۰}\ ,\ \frac{۰}{A}=۰$

معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c$ ریشهٔ حقیقی ندارد هرگاه $\Delta<۰$

$ax^۲+۳x+۹ : \Delta<۰ \Rightarrow b^۲-۴ac<۰ \Rightarrow ۹-۴(a)(۹)<۰$

$\Rightarrow ۹-۳۶a<۰ \Rightarrow ۳۶a>۹ \Rightarrow ۴a>۱ \Rightarrow a>\frac{۱}{۴}$

۱۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$

معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c$ ریشهٔ حقیقی ندارد هرگاه $\Delta<۰$

$|x^۲+x| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x^۲+x \le ۲$

$I : x^۲+x \le ۲ \Rightarrow x^۲+x-۲ \le ۰ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \end{cases}$

x		-2		1	
x^2+x-2	+	۰	−	۰	+

$II : x^۲+x \ge -۲ \Rightarrow x^۲+x+۲ \ge ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta<۰ \\ a>۰ \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$I \cap II : x \in [-۲, ۱] \Rightarrow b-a=۱-(-۲)=۳$

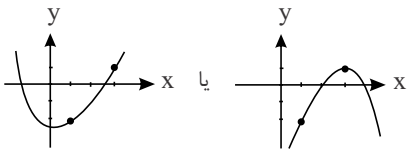
۱۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: محل برخورد نمودار با محور xها، ریشه‌های معادله است.

$f(a)=b \Leftrightarrow (a,b)$

$f(۱)=-۲ \Rightarrow (۱,-۲)$

$f(۳)=۱ \Rightarrow (۳,۱)$



۱۵ - گزینه ۱

می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، معادلهٔ خط تقارن سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

$$x=\frac{-b}{۲a}=۱\Rightarrow -b=۲a \qquad (I)$$

$$y=ax^۲+bx+c \xrightarrow{I} y=ax^۲-۲ax+c \xrightarrow{(۲,۵)} ۵=۴a-۴a+c\Rightarrow c=۵$$

۱۶ - گزینه ۱

می‌دانیم: **رأس سهمی تا محور طول‌ها همان عرض رأس سهمی است.**

در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ مختصات رأس سهمی $S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{۲a}\\ f(\frac{-b}{۲a})\end{matrix}\right.$ **است.**

$$y=ax^۲+bx+c \xrightarrow{(۰,۶)} ۶=c$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{(۳,۰)} ۰=۹a+۳b+۶\\ \xrightarrow{(-۱,۰)} ۰=a-b+۶\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}۳a+b+۲=۰\\ a-b+۶=۰\end{cases}$$

$$۴a+۸=۰ \Rightarrow \quad a=-۲\Rightarrow -۲-b+۶=۰\Rightarrow b=۴$$

$$y=-۲x^۲+۴x+۶\Rightarrow S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۲)}=۱\\ f(۱)=-۲+۴+۶=۸\end{matrix}\right.$$

۱۷ - گزینه ۴

$$P(x)=\frac{x^۳-۱۲x^۲+۳۶x}{x^۲+x-۲}>۰\Rightarrow \frac{x(x^۲-۱۲x+۳۶)}{(x+۲)(x-۱)}>۰\Rightarrow \frac{x(x-۶)^۲}{(x+۲)(x-۱)}>۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ (x-۶)^۲=۰\Rightarrow x=۶\\ (x+۲)=۰\Rightarrow x=-۲\\ (x-۱)=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

	-2	0	1	6	
x	−	− ○	+	+	+
$(x-6)^2$	+	+	+	+ ○	+
(x+2)(x-1)	+ ○	−	− ○	+	+
p(x)	−	+ ○ تن	−	+ ○ تن	+

$$\Rightarrow x\in(-۲,۰)\cup(۱,۶)\xrightarrow{a<۰}\begin{cases}a=-۲\\ b=۰\end{cases}\Rightarrow a+b=-۲$$

۱۸ - گزینه ۱ با توجه به جدول تعیین علامت به‌ازای $x=۵$ عبارت تعریف نشده می‌شود بنابراین $x=۵$ ریشهٔ مخرج است.

بنابراین:

$$(۳x-c)^۲=۰\Rightarrow ۳x-c=۰\xrightarrow{x=۵}۱۵-c=۰\Rightarrow c=۱۵$$

با توجه به جدول تعیین علامت و اتحاد مزدوج داریم:

$$(x^۲-a^۲)=۰\Rightarrow (x-a)(x+a)=۰\Rightarrow \begin{cases}x-a=۰\Rightarrow x=a\\ x+a=۰\Rightarrow x=-a\end{cases}$$

بنابراین $(x^۲-a^۲)$ **دو ریشهٔ برابر و قرینه دارد که با توجه به جدول این دو ریشه ۳ و -۳ هستند پس:** $a=\pm ۳$

تنها ریشهٔ باقی‌مانده $x=-۲$ **است که ریشهٔ عبارت** $x+b$ **است. بنابراین:**

$$x+b=۰\Rightarrow x=-b\Rightarrow -۲=-b\Rightarrow b=۲$$

$$a^۲b-c=۹\times ۲-۱۵=۱۸-۱۵=۳$$

۱۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: **در عبارت** $ax^۲+bx+c$ **هرگاه** $\Delta<۰$ **باشد، علامت عبارت موافق علامت** a **است.**

برای تعیین کل عبارت، ابتدا هر یک از پرانتزها را تعیین علامت می‌کنیم.

$-x^۲+x-۱=۰\Rightarrow \Delta=-۳<۰\Rightarrow$ **همواره منفی**

$x^۲+x+۳=۰\Rightarrow \Delta=-۱۱<۰\Rightarrow$ **همواره مثبت**

$$\frac{(x+۲)\overbrace{(-x^۲+x-۱)}^{\text{منفی}}}{\underbrace{x^۲+x+۳}_{\text{مثبت}}}>۰\Rightarrow (x+۲)<۰\Rightarrow x<-۲\Rightarrow x\in(-\infty,-۲)$$

بازهٔ $(-\infty,-۲)$ **تنها شامل دو عدد منفی** $\{-۲,-۱\}$ **نیست.**

۲۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: $|x| > a \Rightarrow x > a$ یا $x < -a \quad , \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$

$||x| - ۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < |x| - ۲ < ۳$

$I = |x| - ۲ < ۳ \Rightarrow |x| < ۵ \Rightarrow -۵ < x < ۵$

$II : -۳ < |x| - ۲ \Rightarrow |x| > -۱ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$I \cap II : -۵ < x < ۵ : \quad x \in \{-۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \rightarrow$ **۹ عدد صحیح**

۲۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: $|x| > a \Rightarrow x > a$ یا $x < -a \quad , \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$

$$\underbrace{-۱ \leq \overbrace{|\frac{x-۱}{۲} - ۱|}^{(II)} < ۳}_{(I)}$$

$I = -۱ \leq |\frac{x-۱}{۲} - ۱| \xrightarrow{\text{قدرمطلق همواره مثبت}} x \in \mathbb{R}$

$II : |\frac{x-۱}{۲} - ۱| < ۳ \Rightarrow -۳ < \frac{x-۱}{۲} - ۱ < ۳ \Rightarrow -۲ < \frac{x-۱}{۲} < ۴$

$\Rightarrow -۴ < x - ۱ < ۸ \Rightarrow -۳ < x < ۹ \Rightarrow x \in (-۳, ۹)$

$I \cap II : \mathbb{R} \cap (-۳, ۹) = (-۳, ۹) \Rightarrow (a, b) = (-۳, ۹) \Rightarrow \max(b - a) = ۹ - (-۳) = ۱۲$

۲۲ - گزینه ۲

می‌دانیم:

سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$

سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases}$

$-x^۲ - x - ۲ : \Delta = (-۱)^۲ - ۴(-۱)(-۲) = ۱ - ۸ = -۷ < ۰$

$-x^۲ - x - ۲ : \begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases} \Rightarrow$ **همواره منفی**

$$\frac{(m-۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱}{\underbrace{-x^۲ - x - ۲}_{\text{همواره منفی}}} < ۰ \Rightarrow (m-۱)x^۲ + ۶x + ۲m + ۱ > ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ & (I) \\ \Delta < ۰ \Rightarrow ۳۶ - ۴(m-۱)(۲m+۱) < ۰ \Rightarrow ۳۶ - ۸m^۲ + ۴m + ۴ < ۰ \end{cases}$$

$-۸m^۲ + ۴m + ۴۰ < ۰ \Rightarrow -۲m^۲ + m + ۱۰ < ۰ \Rightarrow -۲m^۲ + m + ۱۰ = ۰$

$$\Rightarrow m = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴(-۲)(۱۰)}}{۲(-۲)} = \frac{-۱ \pm ۹}{-۴} \Rightarrow \begin{cases} m = -۲ \\ m = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

m		-2		$\frac{5}{2}$	
$-2m^2+m+b$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow m < -۲$ یا $m > \frac{۵}{۲} \qquad (II)$

$I \cap II : \quad m > \frac{۵}{۲} \Rightarrow m > ۲/۵$

۲۳ - گزینه ۳

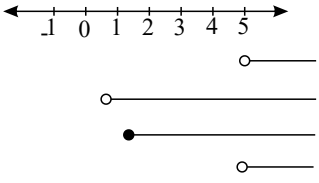
می‌دانیم: $|x| > a \Rightarrow x > a$ یا $x < -a \quad , \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$

$$|۲x + ۱| < ۳x - ۴ \Rightarrow \overbrace{-۳x + ۴ < ۲x + ۱}^{(II)} < \underbrace{۳x - ۴}_{I}$$

$I : ۲x + ۱ < ۳x - ۴ \Rightarrow \quad x > ۵$

$II : -۳x + ۴ < ۲x + ۱ \Rightarrow ۵x > ۳ \Rightarrow x > \frac{۳}{۵}$

$III : |۲x + ۱| < ۳x - ۴ \Rightarrow ۳x - ۴ \geq ۰ \Rightarrow ۳x \geq ۴ \Rightarrow x \geq \frac{۴}{۳}$



$I \cap II \cap III : x > ۵ \Rightarrow x \in (۵, +\infty)$

۲۴ - گزینه ۴

$-۲x^۲ + ۳x < -۳x^۲ + ۷x - ۳ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۳ < ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۱) < ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$

x		1		3	
x^2-4x+3	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow ۱ < x < ۳$

۲۵ - گزینه ۲

$۲x + y < ۷ \xrightarrow{\times ۳} ۶x + ۳y < ۲۱$

$$+ \begin{cases} ۶x + ۳y < ۲۱ \\ ۴ - ۳y < ۲x + ۱ \end{cases}$$

$۶x + ۴ < ۲x + ۲۲ \Rightarrow ۴x < ۱۸ \Rightarrow x < \frac{۱۸}{۴} \Rightarrow x \leq ۴$

مقادیر صحیح و نامنفی برای x عبارتند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ که ۵ تا هستند.

۲۶ - گزینه ۱

می‌دانیم: هرگاه در سهمی به معادلهٔ $ax^۲ + bx + c$، $\Delta = ۰$ شود، سهمی محور xها را فقط در یک نقطه به طول $x = \frac{-b}{۲a}$ قطع می‌کند. (یک ریشهٔ مضاعف دارد)

$y = ax^۲ + bx + c \xrightarrow[y=\frac{-۴}{b}]{x=۰} c = \frac{-۴}{b}$

$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴(a)(\frac{-۴}{b}) = ۰ \Rightarrow b^۲ + \frac{۱۶a}{b} = ۰ \Rightarrow b^۳ + ۱۶a = ۰$

$x = \frac{-(-b)}{۲a} = -۲ \Rightarrow b = -۴a$

$b^۳ + ۱۶a = ۰ \xrightarrow{b=-۴a} -۶۴a^۳ + ۱۶a = ۰ \Rightarrow ۱۶a(-۴a^۲ + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ -۴a^۲ = -۱ \end{cases}$

$\Rightarrow ۴a^۲ = ۱ \Rightarrow a^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow[a<۰]{\text{سهمی پایین محور}} a = \frac{-۱}{۲}$

۲۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: عبارت درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ باشد.
عبارت درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره منفی است هرگاه $\Delta < ۰$ و $a < ۰$ باشد.

$x^۲ - ۶x + ۱۰ \rightarrow \Delta = ۳۶ - ۴(۱)(۱۰) = -۴ < ۰ \Rightarrow$ همواره مثبت

صورت عبارت $\frac{x^۲ - ۶x + ۱۰}{-۲x^۲ + (m-۲)x - ۲}$ همواره مثبت است. بنابراین برای اینکه عبارت همواره منفی باشد باید مخرج آن همواره منفی باشد. بنابراین داریم:

$-۲x^۲ + (m-۲)x - ۲ < ۰$

$\begin{cases} a < ۰ \Rightarrow -۲ < ۰ \\ \Delta < ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ - ۴(-۲)(-۲) < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ - ۱۶ < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m - ۱۲ < ۰ \end{cases}$

$\Rightarrow (m-۶)(m+۲) < ۰ \Rightarrow \begin{cases} m - ۶ = ۰ \Rightarrow m = ۶ \\ m + ۲ = ۰ \Rightarrow m = -۲ \end{cases}$

x		-2		6	
$m^2-4m-12$	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow -۲ < m < ۶ \Rightarrow m$ مقادیر قابل قبول برای $= \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

به‌ازای ۷ مقدار صحیح برای m، نامساوی برقرار است.

۲۸ - گزینه ۳

می‌دانیم: ریشه‌های هر معادله در خود آن صدق می‌کنند.
معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ ریشه ندارد هرگاه $\Delta < ۰$

$a^۲x^۲ - ۲ax + ۱ = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۴a^۲ - ۴a + ۱ = ۰ \Rightarrow (۲a - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow ۲a - ۱ = ۰$

$\Rightarrow ۲a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$

$۴x^۲ - ۳x + ۵a = ۰ \xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}} ۴x^۲ - ۲x + \frac{۵}{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۴)(\frac{۵}{۲}) = -۳۱ < ۰$

معادله ریشه ندارد.

۲۹ - گزینه ۲

می‌دانیم:

در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ مختصات رأس سهمی نقطهٔ S است.	$\frac{-b}{۲a}$ $\frac{-\Delta}{۴a}$

$\frac{-b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$

$y = ax^۲ + bx + c \xrightarrow{b=۰} y = ax^۲ + c$

$ax^۲ + c = ۰ \Rightarrow ax^۲ = -c \Rightarrow x^۲ = \frac{-c}{a} \xrightarrow{ac<۰} x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۰$

۳۰ - گزینه ۱

می‌دانیم:

در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ مختصات رأس سهمی نقطهٔ S است. اگر $a > ۰$ باشد، تقعر سهمی رو به بالاست و سهمی دارای min است که مینیمم سهمی همان نقطهٔ رأس آن است. اگر $a < ۰$ باشد، تقعر سهمی رو به پایین است و سهمی دارای max است که ماکسیمم سهمی همان نقطهٔ رأس آن است.	$\frac{-b}{۲a}$ $\frac{-\Delta}{۴a}$

$y = ۲x^۲ + ۱۲x + m - ۱$

$y_{\min} = -\frac{\Delta}{۴a} = -۱ \Rightarrow -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a} = -۱ \Rightarrow \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a} = ۱$

$\Rightarrow \frac{(۱۲)^۲ - ۴(۲)(m-۱)}{۴(۲)} = ۱ \Rightarrow ۱۴۴ - ۸m + ۸ = ۸ \Rightarrow ۱۴۴ - ۸m = ۰ \Rightarrow m = ۱۸$

$y = ۲x^۲ + ۱۲x + m - ۱ \xrightarrow{m=۱۸} y = ۲x^۲ + ۱۲x + ۱۸ - ۱$

$\Rightarrow y = ۲x^۲ + ۱۲x + ۱۷ \xrightarrow{x=۰} y = ۱۷$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۴	۲۶ - ۱
۲ - ۴	۷ - ۱	۱۲ - ۳	۱۷ - ۴	۲۲ - ۲	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۳	۱۸ - ۱	۲۳ - ۳	۲۸ - ۳
۴ - ۱	۹ - ۱	۱۴ - ۱	۱۹ - ۳	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۱