نام آزمون: معادله ها و نامعادله ها

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- اگر نامساوی $(x^۲ - x - ۶)(۲x^۲ + ax + b) \geq ۰$ همواره برقرار باشد، حاصل $a - b$ کدام است ؟

① ۱۰

② -۱۰

③ -۱۴

④ نشدنی

۲- اگر بازهٔ $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که عبارت $D = (ax + b)(cx + d)$ در آن بازه مثبت است، حاصل $\frac{ad}{bc}$ کدام می‌تواند باشد؟ $(ac < ۰)$

① $\frac{۶}{۵}$

② $-\frac{۳}{۱۰}$

③ $\frac{۳}{۱۰}$

④ $-\frac{۶}{۵}$

۳- به ازای چه مقادیر طبیعی از k، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $kx^۲ + (۲k - ۱)x + k - ۲ = ۰$ ، اعدادی گویا هستند؟

① $\{۲, ۴, ۶, ۸, \cdots\}$

② $\{۳, ۶, ۹, ۱۲, \cdots\}$

③ $\{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, \cdots\}$

④ $\{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \cdots\}$

۴- اگر هر دو عبارت $A=(2x+1)(x-4)$ و $B=\frac{(b^2-x)(2x+1)}{ax+b}$ جدول تعیین علامت کاملاً یکسانی داشته باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲

۲) -2

۳) ۴

۴) -4

۵- اگر بالاترین نقطهٔ سهمی $y=mx^2+2\sqrt{3}x+m+2$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<-3$

۲) $-3<m<1$

۳) $-3<m<-1$

۴) $-1<m<0$

۶- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|2x+1|<x-1$ کدام است؟

۱) $(-2,0)$

۲) $(1,+\infty)$

۳) $\varnothing$

۴) $(-\infty,1)$

۷- به‌ازای چند عدد طبیعی نامعادلهٔ $\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2-5x+6}\leq 0$ برقرار است؟

۱) هیچ

۲) یک

۳) دو

۴) بی‌شمار

۸- اگر جدول تعیین علامت عبارت $A=(x-۱)((۴-a)x+b)$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه حاصل $a+b$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{Z})$

x		1		a-1	
A	+	۰	−	۰	+

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۷

۹- در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، $b^۲=۴a(a+c)$ برقرار است. قدر مطلق تفاضل ریشه‌های این معادله کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) به مقدار a، b و c بستگی دارد.

۱۰- اگر برای تعیین علامت $p(x)$ و $q(x)$ به‌ترتیب از راست به چپ جداول زیر رسم شده باشد، آنگاه $m\times n$ کدام است؟ $(a,c>۰\ ,\ q(x)=cx^۲+bx+a\ ,\ p(x)=ax^۲+bx+c)$

x		$\frac{1}{3}$		m	
P(x)	+	۰	−	۰	+

x		2		n	
q(x)	+	۰	−	۰	+

(۱) $\frac{۲}{۳}$

(۲) $\frac{۳}{۲}$

(۳) ۶

(۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۱- در چند جمله‌ای $p(x)=ax^۲+bx+c$ اگر $\frac{\Delta}{۴a}$ منفی باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

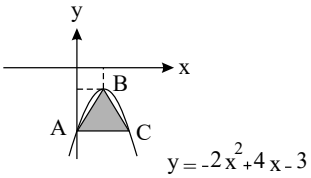
(۱) معادلهٔ $p(x)=۰$ همواره ریشه‌ی حقیقی ندارد.

(۲) چندجمله‌ای $P(x)$ همواره مثبت است.

(۳) چند جمله‌ای $P(x)$ همواره منفی است.

(۴) علامت $P(x)$ به علامت a وابسته است.

۱۲ - در شکل مقابل، اگر معادله‌ی سهمی $y = -۲x^۲ + ۴x - ۳$ و AC موازی محور طول‌ها باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



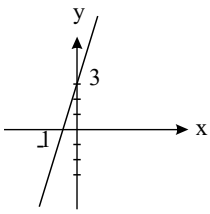
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۳ - با توجه به نمودار $y = ax - b$ که در زیر رسم شده است، عبارت $P(x) = \frac{(ax+b)(۲x+۳)}{(-x+۲)}$ در کدام بازه قطعاً مثبت است؟



(۱) $(۰, ۲)$

(۲) $(-\frac{۳}{۲}, ۱)$

(۳) $(۴, \frac{۱۱}{۲})$

(۴) $(-۲, -\frac{۳}{۲})$

۱۴ - اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۲x-۳)(x^۲+mx+m) < ۰$ به‌صورت بازهٔ $(-\infty, \frac{۳}{۲})$ باشد، m چه مقادیری می‌تواند باشد؟

(۱) $۰ \le m \le ۴$

(۲) $۰ < m < ۴$

(۳) $-۴ < m < ۴$

(۴) $-۴ \le m \le ۴$

۱۵ - اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $ax^۲ + ax + ۳ < ۰$ به‌صورت $\mathbb{R} - [b, ۱]$ باشد، $a + b$ کدام است؟

(۱) $-\frac{۷}{۲}$

(۲) $\frac{۱}{۲}$

(۳) $-\frac{۴۵}{۲}$

(۴) -۱

۱۶ - عبارت $A = \frac{x^{۳}(x-۷)}{۳x-۸۷}$ به‌ازای چه تعداد از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۱، مثبت است؟

(۱) ۷۶

(۲) ۷۷

(۳) ۷۸

(۴) ۷۹

۱۷ - معادله‌ی درجه دوم $۲x^{۲}-۸x-۱=۰$، پس از مربع کامل کردن به صورت $a(x-x_{۰})^{۲}+y_{۰}=۰$ درآمده است. حاصل $x_{۰}+y_{۰}$ چقدر است؟

(۱) ۷

(۲) -۱۱

(۳) ۱۱

(۴) -۷

۱۸ - به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=(a-۱)x^{۲}+۲\sqrt{۲x}+a$ بالای محور xهاست؟

(۱) $a<-۱$

(۲) $a>۱$

(۳) $a>۲$

(۴) $۱<a<۲$

۱۹ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^{۲}+ax+b\geq ۰$ به صورت $|x-۲|\geq ۳$ می‌باشد حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) -۹

(۲) -۸

(۳) -۱۰

(۴) -۱۱

۲۰ - به ازای کدام مقدار x، نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۲}}{x^{۲}-۴}-۳$ بالای محور x هاست؟

① $(۲,+\infty)$

② $(-\infty,-\sqrt{۶})$

③ $(-\sqrt{۶},-۲)\cup(۲,\sqrt{۶})$

④ $(-\infty,۲)$

۲۱ - مجموعه مقادیر x به‌طوری که دو عبارت $A=\frac{x^{۳}(۲x-۱)}{۳-x}$ و $B=(۷x+۲)(x-۳)$، هم‌علامت باشند، کدام است؟ (بزرگ‌ترین بازه را انتخاب کنید.)

① $(-\infty,-\frac{۲}{۷})$

② $(-\infty,-\frac{۲}{۷})\cup(۰,\frac{۱}{۲})$

③ $(-\infty,۰)$

④ $(-\infty,\frac{۱}{۲})$

۲۲ - یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، محیط این قاب عکس چقدر است؟

① ۷۰

② ۳۵

③ ۱۴۰

④ ۹۰

۲۳ - مجموع جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۳x-۱}{۲}-۱\right|\leq ۲$ شامل چند عدد طبیعی است؟

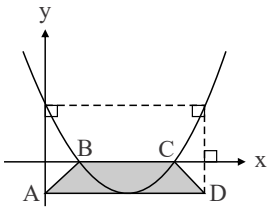
① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۲۴ - در شکل زیر، سهمی رسم شده مربوط به نمودار تابع به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۶$ است. اگر پاره‌خط افقی AD بر رأس سهمی مماس باشد، مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ کدام است؟



(۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۱۶
(۴) ۲۴

۲۵ - به‌ازای کدام مقادیر m، $-۳mx^۲ + ۲mx + ۱$ همواره پایین محور xها قرار می‌گیرد؟

(۱) $m > ۰$
(۲) $-۳ < m < ۰$
(۳) هر مقدار m
(۴) هیچ مقدار m

۲۶ - مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x(x-۳)^۲ + ۴}{x^۲ - ۶x + ۱۱} < ۲$ کدام است؟ (کامل‌ترین گزینه را انتخاب نمایید.)

(۱) $(-\infty, ۲)$
(۲) $(-\infty, ۳) \cup (۴, +\infty)$
(۳) $(-\infty, ۲) \cup (۴, +\infty)$
(۴) $(-\infty, ۱)$

۲۷ - اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۲x + ۶}{x^۲ + ax + b} \leq ۰$ به‌صورت $(-\infty, -۵) \cup [-۳, ۲)$ باشد، حاصل ab کدام است؟

(۱) -۲۰
(۲) ۲۰
(۳) -۳۰
(۴) ۳۰

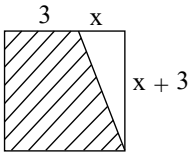
۲۸ - اندازه‌ی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۲ می‌دهند. مساحت مثلث کدام است؟

(۱) ۲۴
(۲) ۴۸
(۳) ۳۶
(۴) ۱۲

۲۹ - اگر معادلهٔ درجه دوم $(۲m+۱)x^۲+(m+۲)x+۱=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، این ریشه کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $-\frac{۱}{۳}$
(۲) $\frac{۱}{۳}$
(۳) $-\frac{۲}{۳}$
(۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۰ - در مربع زیر، اگر مساحت قسمت هاشورخورده ۲۰ باشد، x کدام است؟



(۱) ۲
(۲) ۵
(۳) ۳
(۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $ab > ۰ \Rightarrow \begin{cases} a, b > ۰ \\ \text{یا} \\ a, b < ۰ \end{cases}$

$(x^۲ - x - ۶)(۲x^۲ + ax + b) \geq ۰$

عبارت $x^۲ - x - ۶$ **را تعیین علامت می‌کنیم:**

$$x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۲ \end{cases}$$

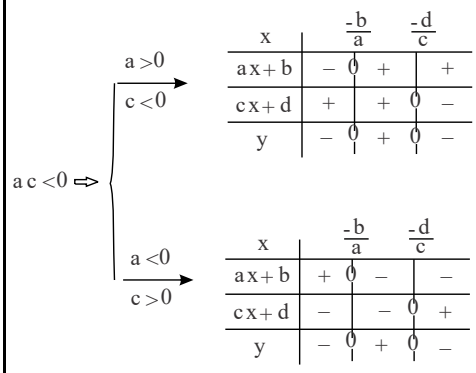
x		-۲		۳	
$x^2 - x - 6$	+	۰	−	۰	+

برای اینکه عبارت مورد نظر همواره مثبت باشد باید تعیین علامتی عیناً مشابه تعیین علامت $x^۲ - x - ۶$ **داشته باشد بنابراین باید ریشه‌های دو عبارت مشابه باشند و به بیان دیگر عبارت** $۲x^۲ + ax + b$ **باید ضریبی از** $x^۲ - x - ۶$ **باشد.**

$$x^۲ - x - ۶ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۲x - ۱۲ = ۲x^۲ + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = -۱۲ \end{cases} \Rightarrow a - b = -۲ - (-۱۲) = ۱۰$$

۲ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: **تعیین علامت چندجمله‌ای** $y = (ax + b)(cx + d)$ **به‌صورت زیر است:**



می‌دانیم: تعیین علامت چندجمله‌ای $y = (ax + b)(cx + d)$ **به‌صورت زیر است:**

با توجه به کادر بالا داریم:

$$\begin{cases} \frac{-b}{a} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow ۲b = a \\ \frac{-d}{c} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow -۵d = ۳c \end{cases} \Rightarrow \frac{ad}{bc} = \frac{۲b \times d}{b \times \frac{-۵d}{۳}} = \frac{-۶}{۵}$$

۳ ـ گزینه ۴

در یک معادلهٔ درجهٔ ۲ با ضرایب گویا، ریشه‌ها زمانی گویا هستند که Δ مربع کامل باشد.

$$\Delta = (۲k - ۱)^۲ - ۴k(k - ۲) = ۴k^۲ - ۴k + ۱ - ۴k^۲ + ۸k = ۴k + ۱$$

برای آنکه $۴k + ۱$ **مربع کامل باشد،** k **عضو مجموعه** $\{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \cdots\}$

راهنمایی: با توجه به عبارت $۴k + ۱$ **، گزینه‌ها را آزمایش می‌کنیم تا معلوم شود کدام مجموعه مقادیر مربع کامل را تولید می‌کند.**

۴ ـ گزینه ۲

$$A = (۲x + ۱)(x - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$$

		$-\frac{1}{2}$		۴	
A	+	۰	−	۰	+

$$B=\frac{(b^{۲}-x)(۲x+۱)}{(ax+b)}\Rightarrow\begin{cases}b^{۲}-x=۰\xrightarrow{x=۴}b^{۲}-۴=۰\Rightarrow b=\pm ۲\\ a=۰\end{cases}$$

دقت کنید اگر مخرج ریشه داشته باشد، عبارت در آن تعریف نشده خواهد بود، بنابراین لازم است مخرج کسر فاقد ریشه باشد تا جدول تعیین علامت یکسان با عبارت A داشته باشد.

با توجه به مخرج (b)؛ علامت b باید منفی باشد تا به‌ازای $x>۴$ عبارت مثبت باشد.

$$b=-۲\rightarrow a+b=-۲$$

۵ - گزینه ۱ رأس سهمی در ربع چهارم واقع شده است. بنابراین:

$$S\text{ :رأس سهمی}\begin{cases}x_S>۰\Rightarrow\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۲m}=\frac{-\sqrt{۳}}{m}>۰\Rightarrow m<۰\\ y_S<۰\Rightarrow f(\frac{-b}{۲a})=f(\frac{-\sqrt{۳}}{m})=m(\frac{-\sqrt{۳}}{m})^{۲}+۲\sqrt{۳}(\frac{-\sqrt{۳}}{m})+(m+۲)<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{m}-\frac{۶}{m}+m+۲=\frac{-۳}{m}+m+۲=\frac{m^{۲}+۲m-۳}{m}<۰$$

$$\xrightarrow{m<۰}m^{۲}+۲m-۳>۰\Rightarrow(m+۳)(m-۱)>۰\Rightarrow\begin{cases}m+۳=۰\Rightarrow m=-۳\\ m-۱=۰\Rightarrow m=۱\end{cases}$$

		−3		1	
m^2+2m-3	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow m<-۳\text{ یا }m>۱\xrightarrow{m<۰}m<-۳$$

۶ - گزینه ۳

$$|۲x+۱|<x-۱\Rightarrow\begin{cases}-x+۱<۲x+۱\Rightarrow ۳x>۰\Rightarrow x>۰\ (I)\\ ۲x+۱<x-۱\Rightarrow x<-۲\ (II)\\ x\text{ شرط نهان : }x-۱\geq۰\Rightarrow x\geq۱\ (III)\quad(\text{باتوجه به }|۲x-۱|<x-۱)\end{cases}$$

$$(I)\cap(II)\cap(III)=\varnothing$$

۷ - گزینه ۲

$$\frac{x^{۴}-۲x^{۳}+x^{۲}}{x^{۲}-۵x+۶}\leq۰\Rightarrow\frac{x^{۲}(x^{۲}-۲x+۱)}{(x-۳)(x-۲)}\leq۰\Rightarrow\frac{x^{۲}(x-۱)^{۲}}{(x-۳)(x-۲)}\leq۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}=۰\Rightarrow x=۰\\ (x-۱)^{۲}=۰\Rightarrow x=۱\\ (x-۳)=۰\Rightarrow x=۳\\ (x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\end{cases}\Rightarrow$$

		0		1		2		3	
x^2	+	0	+		+		+		+
$(x-1)^2$	+		+	0	+		+		+
$(x-3)$	−		−		−		−	0	+
$(x-2)$	−		−		−	0	+		+
$\frac{x^2(x-1)^2}{(x-3)(x-2)}$	+	0	+	0	+	ن‌ت	−	ن‌ت	+

$x\in\{۰,۱\}\cup(۲,۳)$: ۱ عدد طبیعی

۸ - گزینه ۱ با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

۱) $(a-۱)$ ریشهٔ عبارت است و از $x=۱$ بزرگ‌تر است، بنابراین:

$$(I)=a-۱>۱\Rightarrow a>۲$$

۲) ضریب $x^{۲}$: $(x-۱)((۴-a)x+b)=(۴-a)x^{۲}+bx-(۴-a)x-b\Rightarrow ۴-a$

با توجه به جدول و اینکه عبارت بین دو ریشه تغییر علامت می‌دهد و علامتش مخالف ضریب $x^{۲}$ است. بنابراین ضریب $x^{۲}$ مثبت است یعنی ۴

$$(II)=۴-a>۰\Rightarrow a<۴$$

$$I\cap II=۲<a<۴\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a=۳$$

$$\Rightarrow A=(x-۱)(x+b)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x+b=۰\Rightarrow x=-b\end{cases}$$

با توجه به جدول تعیین علامت، ریشه‌های معادله $a-۱,۱$ است، بنابراین:

$$-b=a-۱=۳-۱=۲\Rightarrow b=-۲$$

$$a+b=۳-۲=۱$$

گزینه ۲ - ۹

$$b^۲ = ۴a(a+c) \Rightarrow b^۲ = ۴a^۲ + ۴ac \Rightarrow \underbrace{b^۲ - ۴ac}_{\Delta} = ۴a^۲ \Rightarrow \Delta = ۴a^۲$$

$$|x_۱ - x_۲| = |\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}| = |\frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{۲a}| = |\frac{۲\sqrt{\Delta}}{۲a}| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$= \frac{\sqrt{۴a^۲}}{|a|} = \frac{۲|a|}{|a|} = ۲$$

۱۰ - گزینه ۲ در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر جای a و c باهم عوض شود، ریشه‌ها معکوس می‌شوند.

در نتیجه ریشه‌های دو معادله $p(x) = ۰$, $q(x) = ۰$ **معکوس یکدیگرند. یعنی:**

$$\left\{\begin{array}{l} ۲ = \frac{۱}{m} \Rightarrow m = \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{n} \Rightarrow n = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow m \times n = \frac{۱}{۲} \times ۳ = \frac{۳}{۲}$$

۱۱ - گزینه ۴ اگر $\frac{\Delta}{۴a}$ باشد، Δ و a هم علامت نیستند:

۱) $\left\{\begin{array}{l} a > ۰ \\ \Delta < ۰ \end{array}\right. \Rightarrow$ **چند جمله‌ای همواره مثبت است.**

۲) $\left\{\begin{array}{l} a < ۰ \\ \Delta > ۰ \end{array}\right.$

در این حالت $P(x)$ **دو ریشه دارد؛ یعنی** $P(x)$ **تغییر علامت می‌دهد؛**

پس علامت $P(x)$ **به علامت** a **بستگی دارد.**

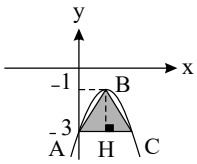
۱۲ - گزینه ۲ ابتدا مختصات نقاط A، B و C را مشخص می‌کنیم.

A محل برخورد نمودار با محور عرض ها است، پس مختصات آن به‌صورت $(۰, -۳)$ است.

B رأس سهمی است. با استفاده از رابطه‌ی $(\frac{-b}{۲a}, \frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ مختصات این نقطه به‌صورت $(۱, -۱)$ است.

چون AC موازی محور طول‌هاست، پس نقاط A و C دارای عرض برابر -۳ هستند.

$$y = -۳ \Rightarrow -۲x^۲ + ۴x - ۳ = -۳ \Rightarrow -۲x^۲ + ۴x = ۰$$
$$\Rightarrow -۲x(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = ۲$$



پس مختصات نقطه‌ی C هم به‌صورت $(۲, -۳)$ است.

حال با محاسبه‌ی طول BH و AC (ارتفاع و قاعده‌ی مثلث)، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$BH = -۱ - (-۳) = ۲ \ , \ AC = ۲ - ۰ = ۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۲ \times ۲}{۲} = ۲$$

۱۳ - گزینه ۴

$$y = ax - b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{(۰,۳)} ۳ = ۰ \times x - b \Rightarrow b = -۳ \\ \xrightarrow{(-۱,۰)} ۰ = -a - b \xrightarrow{b=-۳} a = ۳ \end{array}\right.$$

$$P(x) = \frac{(ax+b)(۲x+۳)}{(-x+۲)} = \frac{(۳x-۳)(۲x+۳)}{(-x+۲)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۳x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳}{۲} \\ -x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{array}\right.$$

	$\frac{-3}{2}$		۱		۲	
3x-3	−		−	۰	+	+
2x+3	−	۰	+		+	+
-x+2	+		+		+	۰ −
P(x)	+	۰	−	۰	+	−

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{۳}{۲}) \cup (۱, ۲)$$

تنها گزینه‌ای که در بازهٔ بالا قرار دارد گزینهٔ ۴ است.

۱۴ - گزینه ۲

می‌دانیم:

عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a>۰\end{cases}$

عبارت درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a<۰\end{cases}$

جدول تعیین علامت را با اطلاعات مسئله رسم می‌کنیم:

x		$\frac{3}{2}$	
$2x-3$	−	۰	+
x^2+mx+m	?		?
y	−	۰	+

با توجه به جدول تعیین علامت، عبارت $x^۲+mx+m$ همواره باید مثبت باشد، بنابراین:

$$\begin{cases}a>۰\Rightarrow ۱>۰\\ \Delta<۰\Rightarrow m^۲-۴m<۰\Rightarrow m(m-۴)<۰\end{cases}$$

$$m(m-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\ m-۴=۰\Rightarrow m=۴\end{cases}$$

		0		4	
m^2-4m	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow ۰\le m\le ۴$$

دقت کنید جواب $m=۰$، معادلهٔ اصلی را تبدیل به $y=(۲x-۳)\times x^۲$ می‌کند که $x=۰$ یک جواب این معادله است و جدول تعیین علامت متفاوت می‌گردد.

همچنین اگر $m=۴$ باشد، معادلهٔ اصلی تبدیل به $y=(۲x-۳)(x^۲+۴x+۴)$ می‌شود که $x=-۲$ یک جواب این معادله است و جدول تعیین علامت متفاوت می‌گردد.

بنابراین بازهٔ جواب مورد قبول برای m، بازهٔ $۰<m<۴$ است.

۱۵ - گزینه ۱

میدانیم: ریشهٔ هر معادله در خود آن صدق می‌کند

اگر $a<۰$ باشد تعیین علامت عبارت درجه دوم $y=ax^۲+bx+c<۰$ به شکل زیر است:

x		x_1		x_2	
y	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow x\in\mathbb{R}-[x_۱,x_۲]$$

با توجه به کادر و اینکه بازهٔ $\mathbb{R}-[b,۱]$ جواب معادلهٔ $ax^۲+ax+۳<۰$ است داریم:

$$ax^۲+ax+۳=۰\Rightarrow x_۱=۱\ ,\ x_۲=b$$

$$\xrightarrow{x_۱=۱} a(۱)^۲+a(۱)+۳=۰\Rightarrow a+a+۳=۰\Rightarrow ۲a=-۳\Rightarrow a=\frac{-۳}{۲}$$

$$-\frac{۳}{۲}x^۲-\frac{۳}{۲}x+۳=۰\Rightarrow -۳x^۲-۳x+۶=۰\Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}\xrightarrow[x_۲=b]{x_۱=۱} b=-۲$$

$$\Rightarrow a+b=\frac{-۳}{۲}-۲=\frac{-۳-۴}{۲}=\frac{-۷}{۲}$$

۱۶ - گزینه ۲ عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$A=\frac{x^۳(x-۷)}{۳x-۸۷}$$

$$A=۰\Rightarrow\begin{cases}x^۳=۰\Rightarrow x=۰\\ x-۷=۰\Rightarrow x=۷\\ ۳x-۸۷=۰\Rightarrow ۳x=۸۷\Rightarrow x=۲۹\end{cases}$$

x		0		7		29	
x^3	−	۰	+		+		+
$x-7$	−		−	۰	+		+
$3x-87$	−		−		−	۰	+
A	−	۰	+	۰	−	ت‌ن	+

$$\Rightarrow x\in(۰,۷)\cup(۲۹,+\infty)$$

اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۱ که A را مثبت می‌کنند:

$\underbrace{\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}}_{\text{۶ تا}} \cup \underbrace{\{۳۰,۳۱,\cdots,۱۰۰\}}_{۱۰۰-۳۰+۱=۷۱}$: ۷۷ تا

۱۷ - گزینه ۴

می‌دانیم: **معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ پس از مربع کامل شدن به فرم $a(x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{\Delta}{۴a}=۰$ درمی‌آید.**

بنابراین:

$$۲x^۲-۸x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=-۸ \\ c=-۱ \end{cases}$$

$$a(x-x_۰)^۲+y_۰=a(x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{\Delta}{۴a} \Rightarrow \begin{cases} x_۰=\frac{-b}{۲a} \\ y_۰=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-b^۲+۴ac}{۴a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۰=\frac{-(-۸)}{۲(۲)}=\frac{۸}{۴}=۲ \\ y_۰=\frac{-(-۸)^۲+۴(۲)(-۱)}{۴(۲)}=\frac{-۶۴-۸}{۸}=\frac{-۷۲}{۸}=-۹ \end{cases}$$

$$x_۰+y_۰=۲-۹=-۷$$

۱۸ - گزینه ۳

میدانیم: **سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a>۰\end{cases}$**

سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases}\Delta<۰\\ a<۰\end{cases}$

$$\begin{cases} a-۱>۰ \Rightarrow a>۱ \qquad (I) \\ \Delta<۰ \Rightarrow b^۲-۴ac<۰ \Rightarrow (۲\sqrt{۲})^۲-۴(a-۱)(a)<۰ \Rightarrow ۸+۴a-۴a^۲<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۲-a-۲>۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱)>۰ \Rightarrow \begin{cases} a-۲=۰ \Rightarrow a=۲ \\ a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱ \end{cases}$$

a		-1		2	
a -2	−		−	۰	+
a +1	−	۰	+		+
(a -2)(a+1)	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow a \in (-\infty,-۱) \cup (۲,+\infty) \qquad (II)$

$I \cap II$: a >2

۱۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: **$|x|>a \Rightarrow x>a$ یا $x<-a$ ، $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$**

$$|x-۲| \geq ۳ \Rightarrow \begin{cases} x-۲ \geq ۳ \Rightarrow x \geq ۵ \\ \text{یا} \\ x-۲ \leq -۳ \Rightarrow x \leq -۱ \end{cases}$$

با توجه به حدود به‌دست آمده، جدول تعیین علامت به‌صورت زیر خواهد بود:

x		-1		۵	
$ax^۲+bx+c$	+	۰	−	۰	+

با توجه به جدول، $x=۵$ و $x=-۱$ دو ریشهٔ معادله هستند بنابراین معادله به‌صورت $(x-۵)(x+۱)=۰$ است. بنابراین:

$$(x-۵)(x+۱)=۰ \Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۴ \\ b=-۵ \end{cases} \Rightarrow a+b=-۹$$

۲۰ - گزینه ۳

می‌دانیم: **هرگاه نمودار تابع درجه دومی بالای محور x ها باشد آن تابع مثبت است.**

$$\frac{x^۲}{x^۲-۴}-۳>۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۳x^۲+۱۲}{x^۲-۴}>۰ \Rightarrow \frac{-۲x^۲+۱۲}{x^۲-۴}>۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲x^۲+۱۲=۰ \Rightarrow x^۲=۶ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۶} \\ x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲ \end{cases}$$

x	$-\sqrt{6}$		-2		2		$\sqrt{6}$	
$-2x^2+12$	$-$	۰	$+$	$+$	$+$	۰	$-$	
x^2-4	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$\frac{-2x^2+12}{x^2-4}$	$-$	۰	$+$	تن	$-$	تن	$+$	۰ $-$

$$\Rightarrow x \in (-\sqrt{۶}, -۲) \cup (۲, \sqrt{۶})$$

۲۱ - گزینه ۲

میدانیم: هرگاه دو عبارت A و B هم‌علامت باشند، حاصل AB مثبت است.

$$AB > ۰ \Rightarrow \frac{x^۳(۲x-۱)}{(۳-x)} \times (۷x+۲)(x-۳) > ۰$$

$$\Rightarrow -x^۳(۲x-۱)(۷x+۲) > ۰ \Rightarrow x^۳(۲x-۱)(۷x+۲) < ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۳ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ ۲x-۱ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \\ ۷x+۲ = ۰ \Rightarrow ۷x = -۲ \Rightarrow x = \frac{-۲}{۷} \end{cases}$$

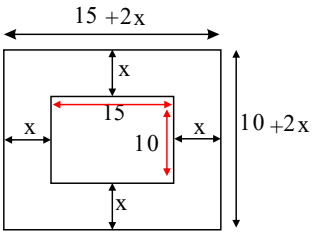
x		$-\frac{2}{7}$		0		$\frac{1}{2}$	
x^3	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$
$7x+2$	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$x^3(2x-1)(7x+2)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, \frac{-۲}{۷}) \cup (۰, \frac{۱}{۲})$$

۲۲ - گزینه ۱

می‌دانیم: $(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$

فاصلهٔ هر لبهٔ عکس تا قاب را x فرض می‌کنیم و با توجه به شکل داریم:



مساحت قاب : $(۱۵+۲x)(۱۰+۲x) = (۲x)^۲ + (۱۰+۱۵)۲x + ۱۰ \times ۱۵ = ۴x^۲ + ۵۰x + ۱۵۰ = ۳۰۰$

$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x - ۱۵۰ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۲٫۵x - ۳۷٫۵ = ۰ \Rightarrow (x+۱۵)(x-۲٫۵) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱۵ = ۰ \Rightarrow x = -۱۵ \quad \text{غ ق ق} \\ x-۲٫۵ = ۰ \Rightarrow x = ۲٫۵ \end{cases}$$

محیط قاب : $[(۱۵+۲x)+(۱۰+۲x)] \times ۲ = [۲۰+۱۵] \times ۲ = ۳۵ \times ۲ = ۷۰$

۲۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: $|x| > a \Rightarrow x > a$ یا $x < -a \quad , \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$

$$\left|\frac{۳x-۱}{۲} - ۱\right| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le \frac{۳x-۱}{۲} - ۱ \le ۲ \Rightarrow -۱ \le \frac{۳x-۱}{۲} \le ۳$$

$$\Rightarrow -۲ \le ۳x-۱ \le ۶ \Rightarrow -۱ \le ۳x \le ۷ \Rightarrow \frac{-۱}{۳} \le x \le \frac{۷}{۳}$$

اعداد طبیعی این بازه برابرند با $\{۱, ۲\}$ بنابراین مجموعه جواب شامل ۲ عدد طبیعی است.

۲۴ - گزینه ۲

می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$، رأس سهمی نقطه‌ای $S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{۲a} \\ f(\frac{-b}{۲a})\end{matrix}\right.$ است.

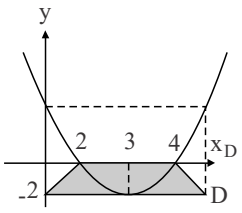
مساحت ذوزنقه برابر است با: $S = \frac{\text{مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$

$$y = ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۶ \Rightarrow S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{۲a} = \frac{۱۲}{۴} = ۳ \\ f(۳) = ۲ \times ۹ - ۱۲ \times ۳ + ۱۶ = ۱۸ - ۳۶ + ۱۶ = -۲\end{matrix}\right.$$

$y = ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = ۲ \end{cases}$

نقاط هم‌ارز روی سهمی نسبت به خط تقارن قرینه‌اند: $y(D) = y(۰)$

بنابراین:



$۳ - ۰ = x_D - ۳ \Rightarrow x_D = ۶$

مساحت ذوزنقه:

$S = \frac{(۶+۲)\times ۲}{۲} = ۸$

۲۵ - گزینه ۴

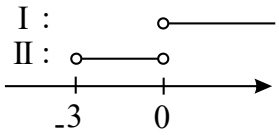
می‌دانیم: عبارت درجه دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره پایین محور x است (منفی است) هرگاه: $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases}$

$-۳mx^۲ + ۲mx + ۱ < ۰$

$$\begin{cases} a < ۰ \Rightarrow -۳m < ۰ \Rightarrow m > ۰ \quad (I) \\ \Delta < ۰ \Rightarrow (۲m)^۲ - ۴(-۳m)(۱) < ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۱۲m < ۰ \Rightarrow m(۴m+۱۲) < ۰ \\ \Rightarrow m(۴m+۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ ۴m + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۴m = -۱۲ \Rightarrow m = -۳ \end{cases} \end{cases}$$

	-3		0	
$4m^2+12m$	+	0	-	0 +

$\Rightarrow -۳ < m < ۰ \quad (II)$



$\Rightarrow I \cap II = \varnothing$

۲۶ - گزینه ۱

$$\frac{x(x-۳)^۲ + ۴}{x^۲ - ۶x + ۱۱} < ۲ \Rightarrow \frac{x(x-۳)^۲ + ۴}{x^۲ - ۶x + ۱۱} - ۲ < ۰ \Rightarrow \frac{x(x-۳)^۲ + ۴ - ۲x^۲ + ۱۲x - ۲۲}{x^۲ - ۶x + ۱۱} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-۳)^۲ - (۲x^۲ - ۱۲x - ۱۸)}{x^۲ + ۶x + ۱۱} < ۰ \Rightarrow \frac{x(x-۳)^۲ - ۲(x^۲ + ۶x - ۹)}{x^۲ - ۶x + ۱۱} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-۳)^۲ - ۲(x-۳)^۲}{x^۲ - ۶x + ۱۱} < ۰ \Rightarrow \frac{(x-۳)^۲(x-۲)}{x^۲ - ۶x + ۱۱} < ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ (x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x^۲ - ۶x + ۱۱ = ۰ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta = ۳۶ - ۴(۱)(۱۱) = ۳۶ - ۴۴ = -۸ < ۰ \\ a = ۱ > ۰ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{همواره مثبت} \end{cases}$$

	2		3	
$(x-3)^2$	+	+	0	+
$x-2$	-	0	+	+
$x^2-6x+11$	+	+	+	+
$\frac{(x-3)^2(x-2)}{x^2-6x+11}$	-	0	+	0 +

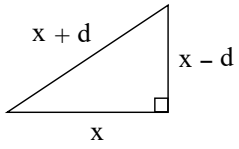
$\Rightarrow x < ۲$

۲۷ - گزینه ۳ با توجه به مجموعهٔ جواب، ریشهٔ معادله صورت $x = -۳$ و ریشه‌های مخرج $۲, -۵$ است. بنابراین معادلهٔ مخرج به صورت $(x+۵)(x-۲)$ است. بنابراین:

$(x+۵)(x-۲) = x^۲ + ۳x - ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = -۱۰ \end{cases} \Rightarrow ab = -۳۰$

۲۸ - گزینه ۱ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه را به صورت $x-d$ و x و $x+d$ در نظر می‌گیریم تا تشکیل دنباله حسابی بدهند:

فیثاغورث: $(x+d)^۲ = x^۲ + (x-d)^۲$

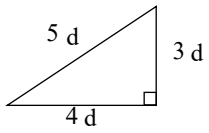


$\Rightarrow x^۲ + ۲xd + d^۲ = x^۲ + x^۲ - ۲xd + d^۲$

$\Rightarrow x^۲ - ۴xd = ۰ \Rightarrow x(x-۴d) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴d \end{cases}$

چون x طول ضلع مثلث است، $x = ۰$ غیر قابل قبول است و $x = ۴d$ را می‌پذیریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۴d\times ۳d=۶d^{۲}\xrightarrow{d=۲}S=۶\times ۲^{۲}=۲۴$$



۲۹ - گزینه ۱

معادلهٔ درجهٔ ۲ ریشهٔ مضاعف دارد، هرگاه $\Delta=۰$ باشد.

$$\Delta=۰\to b^{۲}-۴ac=۰\to (m+۲)^{۲}-۴(۲m+۱)\times ۱=۰$$

$$\Rightarrow m^{۲}+۴m+۴-۸m-۴=۰\Rightarrow m(m-۴)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m=۰\Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=۰\Rightarrow (x+۱)^{۲}=۰\Rightarrow x=-۱\\ m=۴\Rightarrow ۹x^{۲}+۶x+۱=۰\Rightarrow (۳x+۱)^{۲}=۰\Rightarrow ۳x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۳۰ - گزینه ۱

$$S_{\text{هاشور}}=S_{\text{کل}}-S_{\text{مثلث}}=۲۰\Rightarrow (x+۳)(x+۳)-\frac{۱}{۲}\times x\times (x+۳)=۲۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۶x+۹-\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۳}{۲}x=۲۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲}۲x^{۲}+۱۲x+۱۸-x^{۲}-۳x=۴۰\Rightarrow x^{۲}+۹x+۱۸-۴۰=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۹x-۲۲=۰\Rightarrow (x+۱۱)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases} x=-۱۱\\ x=۲\end{cases}$$

چون x برابر با طول ضلع مثلث است، نمی‌تواند منفی باشد؛ پس $x=۲$ را می‌پذیریم.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۳	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۲	۲۶ - ۱
۲ - ۴	۷ - ۲	۱۲ - ۲	۱۷ - ۴	۲۲ - ۱	۲۷ - ۳
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۲	۲۸ - ۱
۴ - ۲	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱
۵ - ۱	۱۰ - ۲	۱۵ - ۱	۲۰ - ۳	۲۵ - ۴	۳۰ - ۱