



علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت ها جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- چه تعداد از عبارات زیر نادرست است؟

(الف) هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه چهارم است که با هم قرینه اند.

(ب) ریشه سوم هر عدد از خود آن عدد کم تر است.

(پ) ریشه چهارم اعداد مثبت از ریشه سوم شان کم تر است.

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) صفر

۲- اگر  $0 < a < 1$  باشد، حاصل  $|a - \sqrt[3]{a}| - |a - a^3| - |a - \sqrt[3]{a}|$  کدام است؟

۱)  $2a$

۲) صفر

۳)  $-2\sqrt[3]{a}$

۴)  $-2a^3$

۳- در دنباله با جمله عمومی  $a_n = 2^{an+b}$ ، اگر جمله سوم  $1024$  و قدر نسبت ۸ باشد، جمله بیستم دنباله  $b_n = bn + a$  کدام است؟

۱)  $13$

۲)  $23$

۳)  $63$

۴)  $36$

۴- حاصل عبارت  $A = \sqrt[3]{-0.008} + 3 \times \sqrt[4]{\frac{1}{625}} - \sqrt[5]{\frac{-1}{32}}$  کدام است؟

۱)  $0.9$

۲)  $-0.1$

۳)  $0.5$

۴)  $-0.5$



۵- کدام گزینه نادرست است؟

①  $(-0,01)^5 > (-0,1)^9$

②  $(-2)^6 > (\frac{1}{4})^3$

③  $(-0,1)^3 > -\sqrt[5]{0,00001}$

④  $(0,4)^7 > (\frac{3}{5})^7$

۶- در نامعادله  $-3 \leq \sqrt[3]{x} \leq 5$  به جای  $x$  چند مقدار صحیح متمایز می توان قرار داد؟

① ۱۵۱

② ۱۵۴

③ ۱۵۲

④ ۱۵۳

۷- اگر  $k + 1 < \sqrt[3]{-53} < k$  و  $k \in \mathbb{Z}$  باشد،  $k$  کدام است؟

① -۴

② -۳

③ -۲

④ -۵

۸- ریشه سوم ۶۴ چند برابر ریشه دوم ۳۲ است؟

① فقط  $\sqrt{2}$

② فقط  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③  $\pm\sqrt{2}$

④  $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



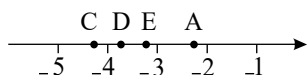
۹- اگر  $0 < a < -1$ ، کدام عدد زیر از بقیه بزرگ تر است؟

- ①  $\sqrt[3]{a}$
- ②  $a$
- ③  $a^3$
- ④  $-a^4$

۱۰- کدام یک از گزینه‌های زیر ریشه‌ی دوم عدد  $11 - 4\sqrt{7}$  است؟

- ①  $4 - 2\sqrt{7}$
- ②  $1 - \sqrt{7}$
- ③  $\sqrt{7} - 4$
- ④  $2 - \sqrt{7}$

۱۱- با توجه به محور زیر، کدام گزینه نمی‌تواند صحیح باشد؟



- ①  $A = -\sqrt[3]{9}$
- ②  $C = -3\sqrt{2}$
- ③  $E = -\sqrt[3]{17}$
- ④  $D = -\sqrt{15}$

۱۲- اگر  $x < 0$ ، آنگاه حاصل  $\sqrt[3]{3x} \times \sqrt{\frac{1}{9x^2}}$  همواره کدام است؟

- ① ۱
- ② -۱
- ③  $\frac{1}{x}$
- ④  $-\frac{1}{3x}$



۱۳- چه تعداد از تساوی‌های زیر صحیح است؟

الف)  $\sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{80} = 2\sqrt[6]{5}$     ب)  $\sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108} = 6$     پ)  $\sqrt[5]{\frac{7}{16a^5}} \times \sqrt[5]{\frac{243}{14}} = \frac{7}{2a}$

- ۱
- ۲
- ۳
- ۴  صفر

۱۴- اگر تساوی  $\frac{1}{x^3+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{c}{x+1}$  با شرط  $x \neq -1$  یک اتحاد باشد،  $a - b + 2c$  کدام است؟

- ۱   $\frac{1}{4}$
- ۲   $-\frac{1}{4}$
- ۳   $-\frac{2}{4}$
- ۴   $\frac{2}{4}$

۱۵- حاصل عبارت  $(2\sqrt{2})^3 + (3 - \sqrt{2})^3 + (-3 - \sqrt{2})^3$  کدام است؟

- ۱   $-6\sqrt{2}$
- ۲   $-36\sqrt{2}$
- ۳   $36\sqrt{2}$
- ۴   $-42\sqrt{2}$



۱۶- کدام گزینه برابر با کسر  $A = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}}}$  است؟

①  $\frac{\sqrt[6]{4}}{4}$

②  $\frac{\sqrt[6]{4}}{2}$

③  $\frac{\sqrt[6]{2}}{4}$

④  $\frac{\sqrt[6]{2}}{2}$

۱۷- چه تعداد از اعداد صحیح در هر دو نامساوی زیر صدق می‌کنند؟

I)  $2 < \sqrt[3]{x} < 3$     II)  $3 \leq \sqrt{x} \leq 5$

① ۱۶

② ۱۷

③ ۱۸

④ ۱۹

۱۸- حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \sqrt[5]{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-5}} - \sqrt[7]{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^7}$$

①  $\frac{3}{2}$

② ۲

③  $\frac{4}{3}$

④ ۱



۱۹- کسر  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$  با کدام گزینه زیر برابر است؟

①  $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$

②  $\sqrt[3]{2} + 1$

③  $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$

④  $\sqrt[3]{2} - 1$

۲۰- اگر  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$  باشد، مقدار  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  کدام است؟

①  $\pm 52$

②  $\pm 76$

③  $\pm 46$

④  $\pm 72$

۲۱- حاصل عبارت زیر به ازای  $n = 4$  کدام است؟

$$4 \times \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2^n}}}}}_{n \text{ تا}}$$

①  $\sqrt[4]{8}$

② ۲

③  $\sqrt[4]{2}$

④  $4\sqrt[4]{2}$

۲۲- اگر  $0 < a < 1$  ، حاصل عبارت  $A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$  کدام است؟

①  $2a$

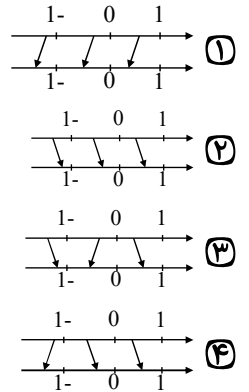
②  $2\sqrt[3]{a}$

③  $2\sqrt{a}$

④ صفر



۲۳- در کدام گزینه هریک از اعداد روی محور بالا به درستی به عدد متناظر با ریشه‌ی سوم خود روی محور پایین وصل شده است؟



۲۴- اگر  $a$  عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر، عبارتی همواره درست است؟

- ①  $\sqrt[n]{a^n} = a$
- ②  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
- ③  $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
- ④  $(\sqrt[n]{a})^n = a$

۲۵- اگر  $n$  عددی صحیح باشد و  $n < \sqrt[4]{475} < n+1$ ، در این صورت  $n$  کدام است؟

- ① ۳
- ② ۴
- ③ ۵
- ④ ۶

۲۶- اگر  $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ، حاصل  $x^4 - 16x^2$  کدام است؟

- ① -۲
- ② ۲
- ③ -۴
- ④ ۴



۲۷- حاصل عبارت  $A = \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[6]{a^5}$  کدام است؟

- ①  $a\sqrt[2]{a^7}$
- ②  $a\sqrt[24]{a^{15}}$
- ③  $a\sqrt[12]{a^5}$
- ④  $a\sqrt[24]{a^{13}}$

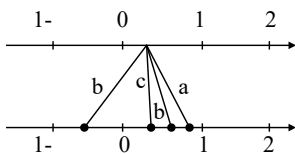
۲۸- اگر  $0 < a < 1$ ، حاصل عبارت  $A = |\sqrt[3]{a} - a| - |a - \sqrt{a}| - |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$  کدام است؟

- ①  $2\sqrt{a}$
- ② صفر
- ③  $-2\sqrt[3]{a}$
- ④  $-2(\sqrt{a} - a)$

۲۹- حاصل  $(\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{5}})\sqrt[3]{7} \times (\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{5}})\sqrt[3]{5}$  کدام است؟

- ①  $8\sqrt[3]{2}$
- ② ۱۶
- ③ ۸
- ④ ۴

۳۰- در شکل زیر، نقطه‌ای از محور بالا توسط خط  $a$  و  $c$  و خط شکسته‌ی  $b$  به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. از



راست به چپ به ترتیب کدام خط مربوط به ریشه‌ی سوم، ریشه‌ی چهارم و ریشه‌ی پنجم است؟

- ①  $c, b, a$
- ②  $b, c, a$
- ③  $a, b, c$
- ④  $b, a, c$





## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ الف) درست

(ب) نادرست: مثال نقض:  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$   
 (پ) نادرست: مثال نقض:  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} > \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

۲ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} -1 < a < 0 &\Rightarrow a^r > \sqrt[r]{a} \Rightarrow a^r - \sqrt[r]{a} > 0 \Rightarrow |a^r - \sqrt[r]{a}| = a^r - \sqrt[r]{a} \\ -1 < a < 0 &\Rightarrow a < a^r \Rightarrow a - a^r < 0 \Rightarrow |a - a^r| = -a + a^r \\ -1 < a < 0 &\Rightarrow a > \sqrt[r]{a} \Rightarrow a - \sqrt[r]{a} < 0 \Rightarrow |a - \sqrt[r]{a}| = a - \sqrt[r]{a} \\ |a^r - \sqrt[r]{a}| - |a - a^r| - |a - \sqrt[r]{a}| &= a^r - \sqrt[r]{a} - (-a + a^r) - (a - \sqrt[r]{a}) \\ &= a^r - \sqrt[r]{a} + a - a^r - a + \sqrt[r]{a} = 0 \end{aligned}$$

۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: در دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$ ؛ جمله عمومی دنباله برابر است با:  $a_n = a_1 q^{n-1}$

$$\begin{aligned} a_n &= r^{an+b} = r^{an} \times r^b = r^b \times (r^a)^n = r^b \times (r^a)^{n-1} \times r^a = r^{a+b} \times (r^a)^{n-1} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_1 = r^{a+b} \\ q = r^a = 8 \Rightarrow a = 3 \end{cases} \\ a_r = 1024 &\Rightarrow r^{r+b} \times (r^r)^r = r^{10} \Rightarrow r^{r+b} \times r^{r^2} = r^{10} \Rightarrow r^{r^2+r+b} = r^{10} \Rightarrow b = 1 \\ b_n = bn + a &\xrightarrow{a=r} b_n = n + 3 \rightarrow b_{r_0} = 20 + 3 = 23 \end{aligned}$$

۴ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{-0.008} + 3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{625}} - \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} \\ &= \sqrt[3]{-(0.2)^3} + 3 \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} - \sqrt[5]{\left(\frac{-1}{2}\right)^5} = -0.2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{-2+6+5}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

۵ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱) درست:  $(-0.01)^5 > (-0.1)^4 \Rightarrow \left(-\left(\frac{0.1}{10}\right)^2\right)^5 > (-0.1)^4 \Rightarrow -\left(\frac{0.1}{10}\right)^{10} > (-0.1)^4$   
 ۲) درست:  $(-2)^6 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 2^6 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$   
 ۳) درست:  $(-0.1)^3 > -\sqrt[5]{0.000001} \Rightarrow (-0.1)^3 > (-0.1)$   
 ۴) نادرست:  $(0.4)^5 > \left(\frac{3}{5}\right)^4 \Rightarrow (0.4)^5 > (0.6)^4 \Rightarrow 0.4 > 0.6$

۶ - گزینه ۴

$$-3 \leq \sqrt[3]{x} \leq 5 \xrightarrow{(\quad)^3} -27 \leq x \leq 125$$

تعداد اعداد صحیح این بازه عبارتست از:

$$125 - (-27) + 1 = 153$$

۷ - گزینه ۱ نزدیکترین اعداد مکعب کامل به ۵۳، عبارتند از ۲۷ و ۶۴:

$$27 < 53 < 64 \xrightarrow{\times(-1)} -27 > -53 > -64$$

$$\sqrt[3]{-27} > \sqrt[3]{-53} > \sqrt[3]{-64} \Rightarrow \underbrace{-3}_{k+1} > \sqrt[3]{-53} > \underbrace{-4}_k \Rightarrow k = -4$$

۸ - گزینه ۴

هر عدد مثبت، دو ریشه دوم قرینه هم دارد.

توان‌های گویا و عبارت‌ها جبری



$$\frac{\sqrt[3]{64}}{\pm\sqrt{32}} = \frac{\sqrt[3]{4^3}}{\pm\sqrt{16 \times 2}} = \frac{4}{\pm 4\sqrt{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹ - گزینه ۴

اعداد بازه‌ی  $-1 < a < 0$  هر چه به توان بزرگتر برسند، به صفر نزدیکتر می‌شوند؛ توان‌های زوج آنها نیز مثبت می‌شود.

داریم:

$$\sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < a < -a^2 < a^3 < -a^4$$

۱۰ - گزینه ۴

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$11 - 4\sqrt{7} = 4 - 4\sqrt{7} + 7 = (2 - \sqrt{7})^2$$

پس ریشه‌های دوم این عبارت، برابرند با:

$$\pm\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = \pm|2 - \sqrt{7}| \quad \begin{cases} \text{ریشه‌ی مثبت: } \sqrt{7} - 2 \\ \text{ریشه‌ی منفی: } -(\sqrt{7} - 2) = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

۱۱ - گزینه ۳ محدوده هر گزینه را مشخص می‌کنیم:

$$1) \quad \begin{matrix} 2^3 < 9 < 3^3 \\ \downarrow & \downarrow \\ 8 & 9 \end{matrix} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} 2 < \sqrt[3]{9} < 3$$

$$\xrightarrow{x(-1)} -3 < -\sqrt[3]{9} < -2 \Rightarrow A = -\sqrt[3]{9} \quad \text{درست}$$

$$2) \quad \sqrt[3]{2} \approx 1/4 \xrightarrow{\times(-3)} -3\sqrt[3]{2} \approx -4/2 \Rightarrow C \approx -4/2 \Rightarrow -5 < C < -4 \quad \text{درست}$$

$$3) \quad 8 < 17 < 27 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} 2 < \sqrt[3]{17} < 3 \xrightarrow{\times(-1)} -3 < \underbrace{-\sqrt[3]{17}}_E < -2 \Rightarrow -3 < E < -2 \quad \text{نادرست}$$

$$4) \quad 9 < 15 < 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 3 < \sqrt{15} < 4 \xrightarrow{\times(-1)} -4 < -\sqrt{15} < -3 \Rightarrow 3 < D < -4 \quad \text{درست}$$

۱۲ - گزینه ۲

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt[3]{3x\sqrt{\frac{1}{9x^2}}} = \sqrt[3]{3x\left|\frac{1}{3x}\right|} \stackrel{x < 0}{=} \sqrt[3]{3x \times \left(-\frac{1}{3x}\right)} = \sqrt[3]{3x \times \frac{-1}{3x}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

۱۳ - گزینه ۲

$$\text{الف) } \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{80} = \sqrt[6]{4 \times 80} = \sqrt[6]{320} = \sqrt[6]{2^6 \times 5} = \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[6]{5} = 2 \times \sqrt[6]{5} \quad \text{درست}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108} &= \sqrt[5]{72 \times 108} = \sqrt[5]{(2^3 \times 3^3) \times (2^3 \times 3^3)} = \sqrt[5]{2^6 \times 3^6} \times 2^5 \\ &= \sqrt[5]{2^6} \times \sqrt[5]{2^5} = 2 \times 2 = 4 \quad \text{درست} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \sqrt[5]{\frac{7}{16a^5}} \times \sqrt[5]{\frac{243}{14}} &= \sqrt[5]{\frac{7 \times 243}{16a^5 \times 14}} = \sqrt[5]{\frac{7 \times 3^5}{2^4 \times a^5 \times 2 \times 7}} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5 \times a^5}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5 \times a^5}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{a^5}} = \frac{3}{2 \times a} = \frac{3}{2a} \neq \frac{7}{2a} \quad \text{نادرست} \end{aligned}$$

۱۴ - گزینه ۲

می‌دانیم  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$  است.

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + cx^2 - cx + c}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{(a + c)x^2 + (a + b - c)x + (b + c)}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 = (a + c)x^2 + (a + b - c)x + (b + c)$$

برای آنکه دو طرف تساوی با یکدیگر متحد باشند، باید:

$$\left. \begin{aligned} a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ b + c = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2a + b = 0 \\ a + 2b = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3} \xrightarrow{a+c=0} c = \frac{1}{3}$$

$$\text{پس: } a - b + 2c = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

۱۵ - گزینه ۴ اگر  $a + b + c = 0$  باشد، آن گاه  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  است.

از آنجا که  $0 = (-3 - \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2}$  است، مجموع مکعبات آنها برابر است با سه برابر حاصلضرب آنها.

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^3 + (3 - \sqrt{2})^3 + (-3 - \sqrt{2})^3 &= 3(2\sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(-3 - \sqrt{2}) \\ &= -3(2\sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = -3(2\sqrt{2})(3^2 - 2) \\ &= -3(2\sqrt{2})(9 - 2) = -21 \times 2\sqrt{2} = -42\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۶ - گزینه ۱  $\boxed{x^a \times x^b = x^{a+b}}$  و  $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times 2} + \sqrt[3]{5^2 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2 \sqrt{2}} + 5\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8 \cdot 3^2 \sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{3+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{\frac{7}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{\frac{10}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{\frac{10}{3}}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{2^{\frac{10}{3} \times 2}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^{\frac{20}{3}}}} = \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{2^{\frac{20}{3} - 2}}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{2^{\frac{14}{3}}}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt[6]{4}}{4}$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} I) 2 < \sqrt[3]{x} < 3 \xrightarrow{(\ )^3} 8 < x < 27 \\ II) 3 \leq \sqrt{x} \leq 5 \xrightarrow{(\ )^2} 9 \leq x \leq 25 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 9 \leq x \leq 25$$

تعداد اعداد صحیح در این بازه عبارتست از:  $25 - 9 + 1 = 17$

۱۸ - گزینه ۱

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x}$$

$$A = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}} - \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^5} - \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^4}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

۱۹ - گزینه ۳

$$\boxed{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$



۲۰ - گزینه ۲

$$a^x - b^x = (a - b)(a^x + b^x + ab), \quad a^x + b^x = (a - b)^2 + 2ab$$

$$x^x + \frac{1}{x^x} - 2 = 18 - 2 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} x - \frac{1}{x} = \pm 4$$

$$x^x - \frac{1}{x^x} = \underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)}_{\pm 4} \underbrace{\left(x^x + \frac{1}{x^x}\right)}_{18} + \underbrace{x \times \frac{1}{x}}_1 = (\pm 4) \times (18 + 1) = \pm 76$$

۲۱ - گزینه ۴

می‌دانیم:  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^2}}}}} = 4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt[4]{2^2}}}}} = 4 \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^2}}}} = 4 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^2}}} = 4 \sqrt{\sqrt{2}} = 4 \sqrt[4]{2}$$

$$= 4 \times 2^{\frac{1}{4}} = 4 \times \sqrt[4]{2}$$

۲۲ - گزینه ۴ اعداد بازه  $(0, 1)$  هرچه به فرجه بیشتری برسند بزرگتر می‌شوند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < 1$$

$$A = \underbrace{|a - \sqrt{a}|}_{-} - \underbrace{|a - \sqrt[3]{a}|}_{-} + \underbrace{|\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|}_{-}$$

$$\Rightarrow = (-a + \sqrt{a}) - (-a + \sqrt[3]{a}) + (-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})$$

$$\Rightarrow A = 0$$

۲۳ - گزینه ۳ اعداد بازه  $(0, 1)$  و  $(-1, 0)$  هرچه به توان بزرگتر برسند به صفر نزدیک‌تر می‌شوند و هرچه ریشه‌ی بزرگ‌تری از آن‌ها گرفته شود، از صفر دورتر می‌شوند. با توجه به نکته‌ی فوق، گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۲۴ - گزینه ۴

برای هر  $n$  زوج:  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$   
 برای هر  $n$  فرد:  $\sqrt[n]{a^n} = a$   
 برای هر  $n$  طبیعی:  $(\sqrt[n]{a})^n = a$

با توجه به نکات فوق، گزینه‌ی ۴ همواره صحیح است.

۲۵ - گزینه ۲ عدد ۴۷۵ بین دو عدد توان‌دار کامل از نوع توان ۴ قرار دارد که عبارتند از:

$$4^4 < 475 < 5^4 \xrightarrow{\sqrt[4]{\quad}} 4 < \sqrt[4]{475} < 5$$

$$\Rightarrow n = 4$$

۲۶ - گزینه ۳

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{5} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 3 + 5 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 8 + 2\sqrt{15}$$

$$x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16)$$

$$= (8 + 2\sqrt{15})(8 + 2\sqrt{15} - 16) = (8 + 2\sqrt{15})(2\sqrt{15} - 8)$$

$$= (2\sqrt{15})^2 - 8^2 = 60 - 64 = -4$$

۲۷ - گزینه ۱ فرجه و توان را می‌توان هم‌زمان در یک عدد دلخواه ضرب نمود. یعنی:  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[m]{a^{nm}}$

$$A = \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[4 \times 3]{a^{3 \times 3}} \times \sqrt[6 \times 2]{a^{5 \times 2}} = \sqrt[12]{a^9} \times \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^{19}}$$

$$= \sqrt[12]{a^{12} \times a^7} = \sqrt[12]{a^{12}} \times \sqrt[12]{a^7} = a \sqrt[12]{a^7}$$



۲۸ - گزینه ۲ اعداد بازه‌ی (۰, ۱) هرچه به توان برسند کوچک‌تر می‌شوند و هرچه ریشه‌ی بیش‌تری از آن‌ها گرفته شود بزرگ‌تر می‌شوند، یعنی:

$$0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$$

$$A = \left| \underbrace{\sqrt[3]{a} - a}_{+} \right| - \left| \underbrace{a - \sqrt{a}}_{-} \right| - \left| \underbrace{\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}}_{-} \right|$$

$$= (\sqrt[3]{a} - a) + (a - \sqrt{a}) + (\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}) = 0$$

۲۹ - گزینه ۲

$$(\sqrt[3]{2} \sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{5}}) \sqrt{2} \times (\sqrt[3]{2} \sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5}}) \sqrt{5} = (\sqrt[3]{2}) \sqrt{2} \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})} \times (\sqrt[3]{2}) \sqrt{5} \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$= (\sqrt[3]{2})^{2-\sqrt{25}} \times (\sqrt[3]{2})^{\sqrt{25}+5} = (\sqrt[3]{2})^{2-\sqrt{25}+\sqrt{25}+5} = (\sqrt[3]{2})^{12} = \left( (\sqrt[3]{2})^3 \right)^4 = 2^4 = 16$$

۳۰ - گزینه ۳ هر عدد مثبت دارای دو ریشه‌ی زوج قرینه‌ی هم است. پس  $b$  ریشه‌های چهارم را مشخص می‌کند. از طرفی، عدد مذکور بین ۰ و ۱ است. پس هرچه عدد ریشه بزرگ‌تر باشد، حاصل ریشه  $n$ م بزرگ‌تر می‌شود، پس:

$$0 < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < 1$$

و  $b$  بین  $a$  و  $c$  است.

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۴	۱۱ - ۳	۱۶ - ۱	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۲	۷ - ۱	۱۲ - ۲	۱۷ - ۲	۲۲ - ۴	۲۷ - ۱
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۱	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۱	۹ - ۴	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۴	۲۹ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۳