



علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت های جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = |a - \sqrt[3]{a}| + |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

- ① $2\sqrt[3]{a}$
- ② $\sqrt{a} - a$
- ③ $a - \sqrt{a}$
- ④ $2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - a$

۲- حاصل عبارت $x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$ به ازای $x = \sqrt{3} + 1$ کدام است؟

- ① $1 + 3\sqrt{3}$
- ② $1 + \sqrt{3}$
- ③ 1
- ④ $3\sqrt{2} - 1$

۳- حاصل عبارت $(2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \frac{5\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1})^{-1}$ کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{2}}{16}$
- ② $\frac{\sqrt{2}}{8}$
- ③ $\frac{\sqrt{3}}{16}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{8}$



۴- حاصل عبارت $A = \frac{a^3 + b^3}{a - b + \frac{b^2}{a}}$ به ازای $a = \sqrt{2}$ و $b = \sqrt{3}$ کدام است؟

① $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{6}$

③ $3 + \sqrt{6}$

④ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

۵- اگر $x \geq 0$ ، آنگاه حاصل $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$ کدام است؟

① $x \sqrt{x}$

② \sqrt{x}

③ $\sqrt{x^3}$

④ $\sqrt{x^7}$

۶- اگر $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

① ۲

② $\frac{4}{3}$

③ ۱

④ $\frac{2}{3}$

۷- اگر $\alpha > 0$ و $\sqrt[n]{8} \times \sqrt[n]{4} = \sqrt[n]{\alpha}$ ، مقدار $1 + \sqrt[5]{2\alpha} \times \sqrt{\alpha}$ کدام است؟

① ۹

② ۲

③ ۴

④ ۶



۸- اگر $0 < a < 1$ و مقادیر $-\sqrt[3]{a^2}$ ، $\frac{1}{a^3}$ ، a^2 ، $\sqrt{-a}$ و $\sqrt[3]{a}$ را روی محور اعداد نشان دهیم سومین عدد از سمت چپ کدام است؟

- ① $\sqrt{-a}$
- ② $-\sqrt[3]{a^2}$
- ③ a^2
- ④ $\sqrt[3]{a}$

۹- اگر $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$ ، حاصل $x^3 - 3x$ کدام است؟

- ① ۱۰-
- ② ۸-
- ③ ۱۰
- ④ ۸

۱۰- اگر ریشه دوم x را به توان ۳ برسانیم، عدد حاصل ۸ برابر ریشه چهارم x^2 می شود. ریشه سوم x کدام است؟

- ① ۲
- ② $2\sqrt{2}$
- ③ $2\sqrt[3]{4}$
- ④ ۴

۱۱- بین دو عدد $\sqrt[3]{-25}$ و $\sqrt[4]{19}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

- ① ۷
- ② ۵
- ③ ۳
- ④ ۴



۱۲- اگر $\sqrt{72} = \frac{\sqrt{288a\sqrt{2}b^4}}{a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

- ① $-\sqrt{2}$
- ② صفر
- ③ $\sqrt{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳- حاصل ساده شده ی عبارت $(\sqrt{3} + 1)^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{2(2 - \sqrt{3})})$ کدام است؟

- ① $2^{\frac{1}{3}}$
- ② $2^{\frac{2}{3}}$
- ③ $2^{\frac{1}{6}}$
- ④ $2^{\frac{2}{3}}$

۱۴- اگر $a = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ و $b = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{\sqrt{15}}$
- ② $-\frac{\sqrt{15}}{3}$
- ③ $-\frac{\sqrt{15}}{5}$
- ④ $-\frac{2\sqrt{15}}{5}$



۱۵- اگر جمله عمومی دنباله a_n به صورت $a_n = 3^{\frac{n-1}{n}}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{(a_{2n+5})^{\frac{2n+5}{2}} - (a_n)^n}{(a_{n+2})^{n+2} - (a_{3n-5})^{\frac{3n-5}{3}}}$ کدام است؟ ($n \geq 2$)

- ① a_{n+1}
- ② a_{n-1}
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ ۳

۱۶- برای اعداد حقیقی a و b ، اگر تساوی $0 = 13 - 2a + 4b - 2ab + b^2 + 2a^2$ برقرار باشد، حاصل $3a + 2b$ کدام است؟

- ① ۱
- ② ۱۹
- ③ -۱
- ④ -۱۹

۱۷- در تجزیه عبارت $3a^3b - 12ab^3 + a^3 - 8b^3$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- ① $a - 2b$
- ② $a + 2b$
- ③ $3a + 2b$
- ④ $3a - b$

۱۸- ریشه بیست و سوم عبارت $\frac{24^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{7}{2}}}{32^2 \times 27^{\frac{1}{3}} \times 48^{\frac{1}{4}}}$ کدام است؟

- ① $\sqrt[12]{6}$
- ② $\sqrt{12}$
- ③ $\sqrt[12]{3}$
- ④ $\sqrt[6]{3}$



۱۹- ساده شده عبارت $\left| \frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \right| - \left| \frac{4\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \right|$ کدام است؟

- ① $-\sqrt{5}$
- ② $\sqrt{5}$
- ③ $2\sqrt{5}$
- ④ $-2\sqrt{5}$

۲۰- اگر $6^{x+1} = \sqrt[3]{2^{y+2}} \times \sqrt[3]{3^{x+5}}$ باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟

- ① ۲
- ② ۳
- ③ ۴
- ④ ۵

۲۱- حاصل عبارت $\frac{x^6 + 1}{x^5 - x^3 + x}$ به ازای $x = -2\sqrt{2}$ کدام است؟

- ① -12
- ② $-\frac{9\sqrt{2}}{4}$
- ③ $-9\sqrt{2}$
- ④ $-\frac{9}{2}\sqrt{2}$

۲۲- حاصل عبارت $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$ به ازای $x = 2 + \sqrt{3}$ کدام است؟

- ① ۸
- ② $8 + \sqrt{3}$
- ③ $8 + 3\sqrt{3}$
- ④ ۱۱



۲۳- اگر $A = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ باشد، حاصل عبارت $B = \frac{1}{\sqrt{5} - A} + \frac{1}{A + \sqrt{5}}$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

① $\sqrt{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ ۱

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۴- خلاصه شده عبارت $(\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})^{1/5}$ کدام است؟

① $\sqrt{2}$

② ۲

③ $\sqrt[3]{2^2}$

④ $\sqrt[3]{2}$

۲۵- حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$ کدام است؟

① $\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$

② $\sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{2}$

③ $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

④ $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

۲۶- در کدام حالت تساوی $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ برقرار نمی‌باشد؟ ($k \in N - \{1\}, m \in N, a \in R$)

① $k, a > 0$ زوج و m زوج

② $k, a > 0$ فرد و m فرد

③ $k, a < 0$ فرد و m زوج

④ $k, a < 0$ زوج و m فرد



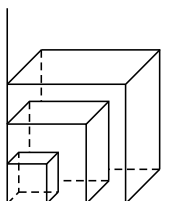
۲۷- در تجزیه عبارت $1 - (\sqrt[5]{x^4})^3$ کدام عبارت وجود ندارد؟

- ① $\sqrt[5]{x^2} - 1$
- ② $\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{x^4} + 1$
- ③ $\sqrt[5]{x^2} + 1$
- ④ $\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^2} + 1$

۲۸- حاصل $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{3} + 1$ کدام است؟

- ① ۱
- ② $2\sqrt{3} - 1$
- ③ ۳
- ④ $\sqrt{3} - 1$

۲۹- در شکل زیر سه مکعب تودرتو واقع شده‌اند. اگر حجم بزرگ‌ترین مکعب برابر ۶۵ و حجم کوچک‌ترین مکعب برابر ۸ باشد، طول ضلع مکعب میانی کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟



- ① ۱٫۹
- ② ۲٫۷
- ③ ۳٫۶
- ④ ۴

۳۰- در نامعادله $2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3$ ، چند مقدار صحیح برای x می‌توان یافت؟

- ① ۸۰
- ② ۸۲
- ③ ۶۵
- ④ ۶۶



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک هرچه رادیکال به فرجه بزرگ‌تری از آن‌ها بگیریم، بزرگ‌تر می‌شوند.

$$a < \sqrt[3]{a} \Rightarrow a - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |a - \sqrt[3]{a}| = -a + \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \Rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}| = -\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}$$

$$|a - \sqrt[3]{a}| + |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}| = -a + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} = 2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - a$$

۲ - گزینه ۳

می‌دانیم $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ است.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt[3]{3} = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 1 - 3\sqrt[3]{3} = (x-1)^3 + 1 - 3\sqrt[3]{3}$$

با جایگذاری $x = \sqrt[3]{3} + 1$ داریم:

$$(\sqrt[3]{3} + 1 - 1)^3 + 1 - 3\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} + 1 - 3\sqrt[3]{3} = 1$$

۳ - گزینه ۱

$$(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6} + \frac{5\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1})^{-1} = \left(\frac{2\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{8\sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = \left(\frac{8\sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = \left(\frac{8\sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = \left(\frac{8\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3} + 1)}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = (8\sqrt[3]{2})^{-1} = \frac{1}{8\sqrt[3]{2}}$$

کسر فوق را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{8\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{8 \times 2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{16}$$

۴ - گزینه ۲

می‌دانیم $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ است.

$$A = \frac{a^2 + b^2}{a - b + \frac{b^2}{a}} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{\left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a}\right)} = a(a+b) = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 2 + \sqrt[3]{6}$$

۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} (a > 0)$

$$\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{x\sqrt{x} \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{x \times x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{5}{2}}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$$

۶ - گزینه ۴ می‌دانیم $(a-b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$ است.

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2}} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-2)}}{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-2)})} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2}}{x+1 - (x-2)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 3 \quad *$$

$$\text{از طرفی: } \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1 \xrightarrow{\text{توان } 3} \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(x-2)^3} - 3\sqrt[3]{(x+1)(x-2)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(x-2)^3} = 1 + 3\sqrt[3]{x^2 - x - 2} \quad **$$



در رابطه * به جای $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ مساویش را از رابطه ** قرار می‌دهیم.

$$\text{پس: } 1 + 2\sqrt[3]{x^2 - x - 2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 3$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3}$$

۷ - گزینه ۳

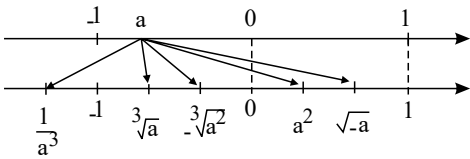
$$\sqrt[n]{\lambda} \times \sqrt[n]{4} = \sqrt[n]{\alpha} \Rightarrow \sqrt[n]{\lambda^r} \times \sqrt[n]{2^n} = 2^{\frac{r}{n}} \times 2^{\frac{r}{n}} = 2^{\frac{r+r}{n}} = 2^{\frac{2r}{n}} = 2^{\frac{r}{n}} = (2^r)^{\frac{1}{n}} = \alpha^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \alpha = 2^r = 16$$

$$\sqrt{\sqrt{\alpha} \times \sqrt[5]{2\alpha + 1}} \stackrel{\alpha=16}{=} \sqrt{\sqrt{16} \times \sqrt[5]{32 + 1}} = \sqrt{4 \times \sqrt[5]{33 + 1}} = \sqrt{4 \times 2 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: اعداد بین صفر و منفی یک هر چه به توان بزرگتری برسند، بزرگتر می‌شوند.

با توجه به محور اعداد، سومین عدد از سمت چپ $-\sqrt[3]{a^2}$ است.



۹ - گزینه ۳ می‌دانیم $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ است.

ابتدا مقدار x^3 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}})^3 \\ &= 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} \times \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}} (\underbrace{\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}}_x) \\ &= 10 + 3\sqrt[3]{25 - 4 \times 6} \times x = 10 + 3 \times 1 \times x = 10 + 3x \Rightarrow x^3 = 10 + 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 10 \end{aligned}$$

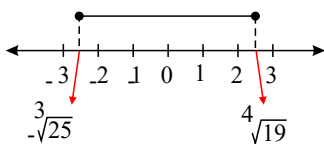
۱۰ - گزینه ۱

می‌دانیم: ریشه n ام عدد x برابر است با $\sqrt[n]{x}$
 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $(a^b)^c = a^{bc}$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^3 &= \lambda \sqrt[4]{x^3} \Rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^3 = \lambda \times x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \lambda x^{\frac{3}{4}} \\ \Rightarrow \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} &= \lambda \Rightarrow x^{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} = \lambda \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\lambda} = 2 \end{aligned}$$

۱۱ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{16} < \sqrt[4]{19} < \sqrt[3]{81} &\Rightarrow 2 < \sqrt[4]{19} < 3 \\ \sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-25} < \sqrt[3]{-8} &\Rightarrow -3 < \sqrt[3]{25} < -2 \end{aligned}$$



با توجه به محور اعداد، در این بازه ۵ عدد صحیح وجود دارد.

۱۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0)$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{288a} \sqrt[3]{b^6}}{a^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\sqrt{288} \sqrt{a} \sqrt[3]{b^6}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{144} \times 2 \times a^{\frac{1}{2}} \times b^2}{a^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{144} \times \sqrt{2} \times b^2 = 12\sqrt{2}b^2 = \sqrt{144} = \sqrt{36 \times 4} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow 12\sqrt{2}b^2 = 6\sqrt{2} \Rightarrow 12b^2 = 6 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بنابراین، مجموع مقادیر ممکن برای b برابر است با ۰

۱۳ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} + 1)^{\frac{2}{3}} (\sqrt{2(2 - \sqrt{3})}) = ((\sqrt{3} + 1)^2)^{\frac{1}{3}} (\sqrt{4 - 2\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}} \\ & = (3 + 1 + 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} (4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = (4 + 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} (4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \\ & = (16 - 4 \times 3)^{\frac{1}{3}} = (16 - 12)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

۱۴ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} + \sqrt{4 + \sqrt{15}}} \times \frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}} = \frac{(\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}})^2}{4 - \sqrt{15} - (4 + \sqrt{15})} \\ & = \frac{4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}}{4 - \sqrt{15} - 4 - \sqrt{15}} = \frac{8 - 2\sqrt{16 - 15}}{-2\sqrt{15}} \\ & = \frac{6}{-2\sqrt{15}} = \frac{3}{-\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{3\sqrt{15}}{15} = -\frac{\sqrt{15}}{5} \end{aligned}$$

۱۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $(a^m)^n = a^{mn}$
عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و داریم:

$$a_n = 3^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow \begin{cases} a_{2n+5} = 3^{\frac{2n+5-1}{2n+5}} = 3^{\frac{2n+4}{2n+5}} \\ a_{n+2} = 3^{\frac{n+2-1}{n+2}} = 3^{\frac{n+1}{n+2}} \\ a_{3n-5} = 3^{\frac{3n-5-1}{3n-5}} = 3^{\frac{3n-6}{3n-5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{2n+5})^{\frac{2n+5}{2}} = (3^{\frac{2n+4}{2n+5}})^{\frac{2n+5}{2}} = 3^{n+2} \\ (a_n)^n = (3^{\frac{n-1}{n}})^n = 3^{n-1} \\ (a_{n+2})^{n+2} = (3^{\frac{n+1}{n+2}})^{n+2} = 3^{n+1} \\ (a_{3n-5})^{\frac{3n-5}{3}} = (3^{\frac{3n-6}{3n-5}})^{\frac{3n-5}{3}} = 3^{n-2} \end{cases}$$

$$A = \frac{3^{n+2} - 3^{n-1}}{3^{n+1} - 3^{n-2}} = \frac{3^{n-1} \times 3^3 - 3^{n-1}}{3^{n-2} \times 3^3 - 3^{n-2}} = \frac{3^{n-1}(3^3 - 1)}{3^{n-2}(3^3 - 1)} = \frac{3^{n-1}}{3^{n-2}} = 3^{n-1-n+2} = 3^1 = 3$$

۱۶ - گزینه ۳

می‌دانیم $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ است.

$$2a^2 + b^2 + 2ab + 4b - 2a + 13 = 0$$

$$\frac{2a^2 - a^2 + a^2, 13 = 9 + 4}{-2a = 4a - 6a} \rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + 4 + 2ab + 4b + 4a}_{(a+b+2)^2} + \underbrace{a^2 - 6a + 9}_{(a-3)^2} = 0$$

$$(a + b + 2)^2 + (a - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ a + b + 2 = 0 \xrightarrow{a=3} b + 5 = 0 \Rightarrow b = -5 \end{cases}$$

$$\text{پس: } 3a + 2b = 9 - 10 = -1$$

$$3a^2b - 12ab^2 + a^3 - 8b^3 = 3ab(a^2 - 4b^2) + (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

۱۷ - گزینه ۱



$$= 3ab(a-2b)(a+2b) + (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = (a-2b)(3a^2b+6ab^2+a^2+2ab+4b^2)$$

بنابراین $a-2b$ در عبارت وجود دارد.

۱۸ - گزینه ۳ کل عبارت را A می‌نامیم و داریم:

$$\begin{cases} (24)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 8)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 2^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2^2 \\ 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 \\ (32)^2 = (2^5)^2 = 2^{10} \\ (27)^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} \\ 48^{\frac{-1}{6}} = (3 \times 16)^{\frac{-1}{6}} = (3 \times 2^4)^{\frac{-1}{6}} = 3^{\frac{-1}{6}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$A = \frac{2^2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^5}{2^{10} \times 3^{-1} \times 2^{-1} \times 3^{\frac{-1}{6}} \times 2^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2^9 \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^9 \times 3^{\frac{-5}{6}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = 3^{\frac{4+5}{6}} = 3^{\frac{9}{6}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ریشه بیست و سوم $\sqrt[3]{A}$

۱۹ - گزینه ۱

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$2 < \sqrt{5} \Rightarrow 2 - \sqrt{5} < 0 \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2} \times \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5 - 4} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 - \sqrt{5} > 0 \Rightarrow \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right| = \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5} + 20}{9 - 5} = 3\sqrt{5} + 5$$

$$\left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| - \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right| = 5 + 2\sqrt{5} - 5 - 3\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

۲۰ - گزینه ۴

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a^m \times b^m = ab^m \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sqrt[3]{3^{x+5}} \times \sqrt[3]{2^{y+2}} = 3^{\frac{x+5}{3}} \times 2^{\frac{y+2}{3}} = 3^{x+1} \times 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+5}{3} = x+1 \Rightarrow x+5 = 3x+3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{y+2}{3} = x+1 \xrightarrow{x=1} \frac{y+2}{3} = 2 \Rightarrow y+2 = 6 \Rightarrow y = 4 \end{cases} \Rightarrow x+y = 4+1 = 5$$

۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم که $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ است.

$$\frac{x^6 + 1}{x^5 - x^2 + x} = \frac{(x^2)^3 + 1^3}{x(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)}{x(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\xrightarrow{x = -2\sqrt{2}} \frac{(-2\sqrt{2})^2 + 1}{-2\sqrt{2}} = \frac{8 + 1}{-2\sqrt{2}} = \frac{9}{-2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-9\sqrt{2}}{4}$$

۲۲ - گزینه ۱

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$x^2 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3} = (x - \sqrt{3})^2 \xrightarrow{x = 2 + \sqrt{3}} (2 + \sqrt{3} - \sqrt{3})^2 = 2^2 = 4$$

۲۳ - گزینه ۱

$$B = \frac{1}{\sqrt{5} - A} + \frac{1}{A + \sqrt{5}} = \frac{A + \sqrt{5} + \sqrt{5} - A}{(\sqrt{5} - A)(\sqrt{5} + A)} = \frac{2\sqrt{5}}{5 - A^2}$$



$$A = \sqrt{5 - \sqrt{2}} \rightarrow B = \frac{2\sqrt{5}}{5 - (\sqrt{5 - \sqrt{2}})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5 - 5 + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \times \sqrt{2}$$

۲۴ - گزینه ۲

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0), \quad a^x - b^x = (a - b)(a^x + ab + b^x)$$

می‌دانیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 - 2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} \right)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}} = (4^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{4} = 2$$

۲۵ - گزینه ۱

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

می‌دانیم:

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})}{3 + 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} - 5} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$$

۲۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: در زیر رادیکال به فرجه زوج، عدد منفی قرار نمی‌گیرد.

$\sqrt[n]{a}$: زوج $x \rightarrow a > 0$

۲۷ - گزینه ۲

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

می‌دانیم:

$$(\sqrt[5]{x^6})^3 - 1 = (\sqrt[5]{(x^2)^3})^3 - 1 = (\sqrt[5]{x^6})^3 - 1$$

$$= ((\sqrt[5]{x^2})^3 - 1)((\sqrt[5]{x^2})^3 + 1)$$

$$= (\sqrt[5]{x^2} - 1)((\sqrt[5]{x^2})^2 + \sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^2} + 1)((\sqrt[5]{x^2})^2 - \sqrt[5]{x^2} + 1)$$

$$= (\sqrt[5]{x^2} - 1)(\sqrt[5]{x^6} + \sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^6} - \sqrt[5]{x^2} + 1)$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3} = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{3} + 1 = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3} + 1 = |2 - \sqrt{3}| + \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \rightarrow 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 = 3$$

۲۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: حجم مکعبی به طول ضلع a برابر است با: $V = a^3$

اگر طول ضلع مکعب میانی را a بنامیم، داریم:

$$(\sqrt[3]{65} \approx 4,02)$$



$$8 < a^3 < 65 \Rightarrow 2^3 < a^3 < 4^3 + 1 \Rightarrow 2 < a < 4,02$$

گزینه ۱ در بازه بدست آمده نیست.

۳- گزینه ۲ حاصل $\sqrt[4]{x}$ همیشه مثبت است، بنابراین $-2 \leq \sqrt[4]{x}$ تبدیل به $x \leq 0$ می شود.

$$-2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \xrightarrow{\text{به توان ۴}} 0 \leq x \leq 3^4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 81$$

تعداد اعداد صحیح در این بازه: $81 - 0 + 1 = 82$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۴	۱۱ - ۲	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۳	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۱	۲۷ - ۲
۳ - ۱	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱
۵ - ۴	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲