



علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت های جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- اگر $m = 3 \cot \theta$ و θ زاویه ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{m^2 + 9}$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{\cos \theta}$
- ② $-(3 \cot \theta + 3)$
- ③ $3 \cos \theta$
- ④ $\frac{-3}{\sin \theta}$

۲- اگر عبارت های $A = \sqrt[4]{-x} \times y^{\frac{1}{3}}$ و $B = \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt[5]{xy}}$ تعریف شده باشند، علامت A و B چگونه است؟

- ① $A > 0, B > 0$
- ② $A > 0, B < 0$
- ③ $A < 0, B < 0$
- ④ A و B می توانند مثبت یا منفی باشند.

۳- اگر m و n دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک باشند، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[n]{n} \times \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{m} \times \sqrt[n]{m}}$ کدام است؟

- ① $\sqrt[mn]{\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}}$
- ② $\sqrt[mn]{\left(\frac{n}{m}\right)^{m+n}}$
- ③ $\sqrt[m+n]{\left(\frac{n}{m}\right)^{mn}}$
- ④ ۱



۴- اگر $a = \frac{(\sqrt{\sqrt{3}+1})^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{6}} \times (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{(2 \times 324^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{8}}}$ مقدار a کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{12}$
- ۲) $\frac{1}{6}$
- ۳) $\frac{1}{4}$
- ۴) ۱

۵- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{6}+2} \times \sqrt[6]{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt[5]{2}\sqrt[3]{4}}$ کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) $\sqrt[3]{2}$
- ۳) $\sqrt[6]{2}$
- ۴) $\sqrt[15]{2}$

۶- اگر $1 < a < \infty$ باشد، ریشه‌ی پنجم a از ریشه‌ی ششم a است و اگر $a > 1$ باشد، ریشه‌ی چهارم a از ریشه‌ی پنجم a است.

- ۱) بزرگ‌تر - بزرگ‌تر
- ۲) بزرگ‌تر - کوچک‌تر
- ۳) کوچک‌تر - بزرگ‌تر
- ۴) کوچک‌تر - کوچک‌تر

۷- اگر m و n دو عدد صحیح متوالی باشند که در رابطه‌ی $\sqrt[4]{25} < n < m < \sqrt[4]{25}$ صدق کنند، آنگاه $m^2 - n^2$ کدام است؟

- ۱) ۵
- ۲) ۴
- ۳) -۵
- ۴) -۴



۸- حاصل عبارت $\sqrt[3]{x^n \sqrt{x^n}}$ همواره کدام است؟ (عبارت تعریف شده است.)

- ① \sqrt{x}
- ② $\sqrt[3]{x^n}$
- ③ $\sqrt{x^n}$
- ④ $\sqrt[3]{x^{2n}}$

۹- حاصل عبارت $A = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{4x^2 + 4x + 1}$ کدام است؟ (عبارت تعریف شده است.)

- ① $\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$
- ② $\frac{x^2}{x + 1}$
- ③ $\frac{x^2 - x + 1}{2x - 1}$
- ④ $\frac{x + 1}{2}$

۱۰- حاصل $\sqrt[5]{(\sqrt{2} + 1)^4} \times \sqrt[5]{(3 - 2\sqrt{2})^2}$ کدام است؟

- ① ۲
- ② ۱
- ③ $\sqrt{2}$
- ④ $\sqrt[5]{2}$

۱۱- گویا شده‌ی کسر $A = \frac{6}{\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{27}}$ کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt[3]{2} + 2}{6}$
- ② $\frac{\sqrt[3]{4} + 4}{3}$
- ③ $\frac{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 2}{6}$
- ④ $\frac{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 4}{3}$



۱۲- اگر x عددی مثبت باشد، مقدار x در معادله $\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{16}$ کدام است؟

- ① $\sqrt[3]{32}$
- ② $\sqrt[3]{64}$
- ③ $\sqrt[3]{16}$
- ④ $\sqrt[3]{8}$

۱۳- مجموع مربع عددی با چهار برابر مربع عددی دیگر مساوی ۴ برابر حاصل ضرب آن دو عدد است. نسبت عدد اولی به دومی کدام است؟

- ① ۱
- ② ۲
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$

۱۴- در مقایسه‌ی دو عدد $\sqrt[3]{0,125}$ و $\sqrt{0,25}$ ، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- ① $\sqrt{0,25} > \sqrt[3]{0,125}$
- ② $\sqrt{0,25} < \sqrt[3]{0,125}$
- ③ $\sqrt{0,25} = \sqrt[3]{0,125}$
- ④ نمی‌توان مشخص کرد کدام بزرگ‌تر است.

۱۵- اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$$

- ① $2\sqrt[3]{a}$
- ② $\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$
- ③ $2a$
- ④ صفر



۱۶- اگر ساده شده عبارت $\frac{\sqrt[3]{9} \times 3^2}{\sqrt{27} \times 81}$ را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۳ بنویسیم، توان این عدد چند است؟

① $-\frac{17}{6}$

② $\frac{17}{6}$

③ $\frac{15}{7}$

④ $-\frac{15}{7}$

۱۷- در تجزیه عبارت $y^5 + 2y^3 - 24y$ کدام عامل وجود ندارد؟

① $y^2 + 6$

② $y - 2$

③ $y + 2$

④ $y - 4$

۱۸- با فرض $x = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل $x + \frac{1}{x}$ کدام است؟

① $2 - \sqrt{3}$

② ۲

③ ۴

④ $4\sqrt{3}$

۱۹- ساده شده عبارت زیر در کدام گزینه آمده است؟

$$X = (2a - 3)(2a + 3)(16a^4 + 36a^2 + 81)$$

① $64a^6 - 729$

② $8a^6 - 729$

③ $64a^6 - 243$

④ $8a^6 - 243$



۲۰- اگر گویا شده کسر $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}}$ به صورت $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})(9 + 3\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2)}{x}$ باشد، کدام است x ؟

- ۲۷ (۱)
- ۲۱ (۲)
- ۲۵ (۳)
- ۲۳ (۴)

۲۱- ساده شده عبارت مقابل کدام است؟

$$A = \frac{xy^r + y^r + y + 1 - x}{y^r + y + 1}$$

- $xy^r - 1$ (۱)
- $y^r - x$ (۲)
- $xy - x + 1$ (۳)
- $y - x$ (۴)

۲۲- اگر $0 < a < 1$ باشد، فاصله کدام عدد از صفر کوچک تر است؟

- $a^r \sqrt{a}$ (۱)
- $\frac{1}{a}$ (۲)
- $a \sqrt[3]{a}$ (۳)
- $\sqrt[5]{a}$ (۴)

۲۳- اگر $2 < \sqrt[5]{x} < 3$ به جای x چند عدد طبیعی می توان قرار داد؟

- ۲۱۰ (۱)
- ۲۱۱ (۲)
- ۲۱۲ (۳)
- ۲۱۳ (۴)



۲۴- اگر $x < 1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[5]{(1-x)^5} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(-3)^2}$ کدام است؟

- ① -۳
- ② $-2x + 5$
- ③ $2x - 5$
- ④ ۳

۲۵- عبارت $\sqrt[8]{\frac{1}{6^{15}}}$ با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

- ① $\sqrt[8]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{36}}}$
- ② $\sqrt[4]{\sqrt[10]{\sqrt[6]{6}}}$
- ③ $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{6^{\frac{1}{3}}}}}$
- ④ $\sqrt[12]{\sqrt[10]{\sqrt[3]{36}}}$

۲۶- به ازای کدام مقدار k عبارت $\sqrt[3]{a^k \sqrt{a^4}}$ برابر a خواهد شد؟

- ① ۲
- ② ۳
- ③ ۴
- ④ ۵

۲۷- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3^6 \sqrt[4]{4}} + (\sqrt[4]{64})^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[12]{(4^6)^{\frac{1}{4}}}}$ کدام است؟

- ① ۲۷
- ② $27 + \sqrt[4]{4}$
- ③ ۲۸
- ④ ۳



۲۸- اگر $x^{\frac{5}{a}} = 2$ باشد، ریشه دهم x کدام است؟ ($x > 0$ و a عددی گویا و مثبت است.)

۱ فقط $\frac{a}{250}$

۲ فقط $\frac{a}{25}$

۳ $\pm 2^{\frac{a}{25}}$

۴ $\pm 2^{\frac{a}{250}}$

۲۹- حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y - 5x}{x - y}$ کدام است؟ ($x \neq y$)

۱ ۲

۲ $\frac{2y}{x - y}$

۳ -۳

۴ $\frac{3y + x}{x - y}$

۳۰- مجموع دو عدد برابر ۵ و مجموع مربعات آنها برابر ۱۹ است. مجموع مکعبات این اعداد کدام است؟

۱ ۱۲۵

۲ ۱۰۰

۳ ۹۱

۴ ۸۰

۳۱- اگر 125^{y-x} ، 25^{2x-y} و 5^{3x+y} سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه کدام رابطه بین x و y برقرار است؟ ($x, y \neq 0$)

۱ $\frac{x}{y} = 4$

۲ $\frac{x}{y} = 3$

۳ $y = x$

۴ $\frac{y}{x} = 8$



۳۲- اگر $\alpha = \sqrt[4]{7\sqrt{3} + 12}$ و $\beta = \sqrt[4]{7\sqrt{3} - 12}$ ، حاصل $(\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta)$ کدام است؟

- ۱) ۷
- ۲) $7\sqrt{3}$
- ۳) $7\sqrt[4]{3}$
- ۴) صفر

۳۳- حاصل عبارت $A = \sqrt[5]{8} \times (\sqrt[4]{4} \times \sqrt[7]{8})^{\frac{2}{3}}$ به صورت توان گویا کدام است؟

- ۱) $\frac{13}{225}$
- ۲) $\frac{128}{2105}$
- ۳) $\frac{1}{27}$
- ۴) $\frac{67}{221}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$A = \sqrt{(\sqrt{3} \cot \theta)^2 + 9} = \sqrt{9 \cot^2 \theta + 9} = \sqrt{9(1 + \cot^2 \theta)}$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{1 + \cot^2 \theta} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta}} = \sqrt{3} \times \frac{1}{|\sin \theta|}$$

ناحیه‌ی سوم: θ

$$\Rightarrow A = \sqrt{3} \times \frac{1}{-\sin \theta} = \frac{-\sqrt{3}}{\sin \theta}$$

۲ - گزینه ۲

عدد زیر رادیکال با فرجه زوج، حتماً باید عددی مثبت باشد تا عبارت تعریف شود. برای عدد طبیعی $n \geq 2$ ، عبارت $a^{\frac{1}{n}}$ زمانی تعریف می‌شود که $a \geq 0$ باشد.

$$\sqrt[n]{-x}: -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y^{\frac{1}{r}}: y \geq 0 \\ z^{-\frac{1}{r}} = \frac{1}{z^{\frac{1}{r}}}: \begin{cases} z \geq 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow z > 0 \\ \frac{1}{\sqrt[n]{xy}}: xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, y \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

۳ - گزینه ۲

$$\frac{\sqrt[n]{n} \times \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{m} \times \sqrt[n]{m}} = \frac{n^{\frac{1}{n}} \times n^{\frac{1}{n}}}{m^{\frac{1}{n}} \times m^{\frac{1}{n}}} = \frac{n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}{m^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{\left(\frac{n}{m}\right)^{n+m}}$$

۴ - گزینه ۱

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

$$a^c \times b^c = (ab)^c$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$\frac{(\sqrt{\sqrt{3}+1})^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{(2 \times 3^2 \times 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{((\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} \times (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} \times (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{(2 \times (3^2 \times 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{9}} \times (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{(2 \times 3^2 \times 2)^{\frac{1}{9}}} = \frac{((\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1))^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{9}}}{(2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{9}}}$$

$$= \frac{(3-1)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{9}}}{(2 \times 3)^{\frac{1}{9}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{9}}}{6^{\frac{1}{9}}} = \frac{6^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{9}}} = 6^{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}$$



$$= \frac{4-2}{6^{12}} = \frac{1}{6^{12}} \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

۵ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{\sqrt{6+2}} \times \sqrt[3]{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt[5]{2^3 \sqrt{4}}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{6+2})^2} \times \sqrt[3]{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt[5]{2^3 \sqrt{2^2 \times 4}}} \\ & = \frac{\sqrt[3]{6+4+4\sqrt{6}} \times \sqrt[3]{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt[5]{2^3 \sqrt{2^3 \times 2^2}}} = \frac{\sqrt[3]{10+4\sqrt{6}} \times \sqrt[3]{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt[5]{2^3 \sqrt{2^5}}} \\ & = \frac{\sqrt[3]{10^2 - (4\sqrt{6})^2}}{\sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}}} = \frac{\sqrt[3]{100-96}}{\sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{6}} = 1 \end{aligned}$$

۶ - گزینه ۳

اعداد بازه‌ی (0, 1)، هرچه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می‌شوند و هرچه از آنها ریشه‌ی بیشتری بگیریم، بزرگتر می‌شوند، این امر برای اعداد بزرگتر از ۱ برعکس است.

$$0 < a < 1 \rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$$

$$1 < a \rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$$

۷ - گزینه ۳ نزدیکترین اعداد توان چهار کامل به عدد ۲۵، ۸۱ و ۱۶ هستند:

$$16 < 25 < 81 \Rightarrow 2^4 < 25 < 3^4 \rightarrow 2 < \sqrt[4]{25} < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow m^r - n^r = 4 - 9 = -5$$

۸ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^n \sqrt{x^n}} &= \sqrt[3]{\sqrt{(x^n)^2} \times x^n} = \sqrt[3]{\sqrt{x^{2n}} \times x^n} = \sqrt[3]{\sqrt{x^{3n}}} = \sqrt[3 \times 2]{x^{3n}} \\ &= x^{\frac{3n}{3 \times 2}} = x^{\frac{n}{2}} = (x^n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^n} \end{aligned}$$

۹ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} A &= \frac{\overbrace{2x^r + 2x} + \overbrace{x+1}}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x-1)(x^r+x+1)}{(2x+1)^r} \\ &= \frac{2x(x+1)+x+1}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x-1)(x^r+x+1)}{(2x+1)^r} \\ &= \frac{\cancel{(2x+1)} \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)}} \times \frac{\cancel{(x-1)} (x^r+x+1)}{(2x+1)^r} \\ &= \frac{x^r+x+1}{2x+1} \end{aligned}$$

۱۰ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{(\sqrt{2+1})^4} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt[5]{((\sqrt{2+1})^2)^2} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt[5]{(2+1+2\sqrt{2})^2} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt[5]{(3+2\sqrt{2})^2} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2} \\ &= (3+2\sqrt{2})^{\frac{2}{5}} \times (3-2\sqrt{2})^{\frac{2}{5}} = ((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}))^{\frac{2}{5}} \\ &= (3^2 - (2\sqrt{2})^2)^{\frac{2}{5}} = (9-8)^{\frac{2}{5}} = 1^{\frac{2}{5}} = 1 \end{aligned}$$

۱۱ - گزینه ۴

می‌دانیم $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ است.



$$A = \frac{6}{\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{27}} = \frac{6}{\sqrt[3]{27 \times 2} - 2 \times 3} = \frac{6}{3\sqrt[3]{2} - 6} = \frac{6}{3(\sqrt[3]{2} - 2)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{2} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 4}{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 4} = \frac{2(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 4)}{\underbrace{2 - 8}_{-6}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 4}{3}$$

۱۲ - گزینه ۴

$$\sqrt[3]{x^6 \sqrt{x^2}} = \sqrt[3]{16} \Rightarrow \sqrt[3]{x^6 \times x^2} = \sqrt[3]{16} \Rightarrow \sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{16}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{8}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \quad \left(\frac{12}{3}\right) \quad \left(\frac{12}{3}\right) \quad \left(\frac{12}{3}\right) \quad \left(\frac{12}{3}\right) \quad \left(\frac{12}{3}\right) \quad \left(\frac{12}{3}\right) \Rightarrow x = 2^{\frac{4}{3} \times \frac{12}{8}}$$

$$\Rightarrow x = 2^{\frac{6}{2}} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64}$$

۱۳ - گزینه ۲ دو عدد مطلوب را x و y می‌نامیم:

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$$

۱۴ - گزینه ۳

$$\sqrt[3]{0,25} = \sqrt[3]{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{0,125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

با هم برابرند \Rightarrow

۱۵ - گزینه ۴ می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک، هرچه رادیکال با فرجه بزرگتری از آن‌ها بگیریم، حاصلشان بزرگتر می‌شود. داریم:

$$0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$$

بنابراین:

$$|a - \sqrt{a}| \stackrel{a < \sqrt{a}}{=} \sqrt{a} - a$$

$$|a - \sqrt[3]{a}| \stackrel{a < \sqrt[3]{a}}{=} \sqrt[3]{a} - a$$

$$|\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| \stackrel{\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}}{=} \sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow A = (\sqrt{a} - a) - (\sqrt[3]{a} - a) + (\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}) = \sqrt{a} - a - \sqrt[3]{a} + a + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} = 0$$

۱۶ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a \geq 0)$, $\begin{cases} a^b \times a^c = a^{b+c} \\ a^b \div a^c = a^{b-c} \end{cases}$ داریم:

$$\frac{\sqrt[3]{9} \times 3^2}{\sqrt{27} \times 81} = \frac{\sqrt[3]{3^2} \times 3^2}{\sqrt{3^3} \times 3^4} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^2}{3^{\frac{3}{2}} \times 3^4} = 3^{((\frac{2}{3}+2)-(\frac{3}{2}+4))}$$

$$\frac{2}{3} + 2 - (\frac{3}{2} + 4) = \frac{2+6}{3} - \frac{3+8}{2} = \frac{16-33}{6} = \frac{-17}{6}$$

۱۷ - گزینه ۴

$$y^5 + 2y^3 - 24y = y(y^4 + 2y^2 - 24) = y(y^2 + 6)(y^2 - 4) = y(y^2 + 6)(y + 2)(y - 2)$$

بنابراین $4 - y$ در عبارت وجود ندارد.

۱۸ - گزینه ۳ می‌دانیم: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$



۱۹ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= (2a - 3)(2a + 3)(16a^2 + 36a^2 + 81) = ((2a)^2 - (3)^2)((2a^2)^2 + (2a^2)(9) + 9^2) \\ &\stackrel{(2a)^2 = 4a^2, 3^2 = 9}{=} (A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 \\ &= ((2a)^3)^2 - (3^2)^2 = (2a)^6 - 9^2 = 64a^6 - 729 \end{aligned}$$

۲۰ - گزینه ۴ می‌دانیم $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ است. از آنجائیکه گویاشده هر کسر با خودش برابر است، داریم:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(9 + 3\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{3}\sqrt{2})^2)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ \Rightarrow x &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(9 + 3\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{3}\sqrt{2})^2) \\ \Rightarrow x &= ((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2)(9 + 3\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{3}\sqrt{2})^2) \\ \Rightarrow x &= (3 - 2)(9 + 3\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{3}\sqrt{2})^2) = 3^2 - (\sqrt{3}\sqrt{2})^2 = 27 - 6 = 21 \end{aligned}$$

۲۱ - گزینه ۳ می‌دانیم که $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ است.

$$\begin{aligned} \frac{xy^2 + y^2 + y + 1 - x}{y^2 + y + 1} &= \frac{(xy^2 - x) + (y^2 + y + 1)}{y^2 + y + 1} = \frac{x(y^2 - 1) + (y^2 + y + 1)}{y^2 + y + 1} \\ &= \frac{x(y - 1)(y^2 + y + 1) + (y^2 + y + 1)}{y^2 + y + 1} \\ &= \frac{(y^2 + y + 1)(x(y - 1) + 1)}{y^2 + y + 1} = x(y - 1) + 1 = xy - x + 1 \end{aligned}$$

۲۲ - گزینه ۱ می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک، هرچه از آن‌ها رادیکال یا فرجه بزرگتری بگیریم بزرگتر می‌شوند و هرچه آن‌ها را به توان بزرگتری برسانیم، کوچکتر می‌شوند. ابتدا هر یک از گزینه‌ها را به صورت توان کسری می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 1) a^2 \sqrt{a} &= a^2 a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}} \\ 2) \frac{1}{a} &= a^{-1} \\ 3) a \sqrt[3]{a} &= a \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \\ 4) \sqrt[5]{a} &= a^{\frac{1}{5}} \\ -1 < \frac{1}{5} < \frac{4}{3} < \frac{5}{2} &\Rightarrow 0 < a^{\frac{1}{5}} < a^{\frac{4}{3}} < a^{\frac{5}{2}} < 1 < a^{-1} \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۱ از همه به صفر نزدیکتر است (کوچکتر است).

۲۳ - گزینه ۱ می‌دانیم: $(\sqrt[n]{a})^n = a(n \text{ فرد})$

$$2 < \sqrt[5]{x} < 3 \xrightarrow{\text{توان } 5} 2^5 < (\sqrt[5]{x})^5 < 3^5 \Rightarrow 32 < x < 243 \Rightarrow x \in (32, 243)$$

تعداد اعداد صحیح موجود در بازه x برابر است $243 - 32 - 1 = 210$

۲۴ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} |a| \text{ زوج } n \\ a \text{ فرد } n \end{cases}$

داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{(1-x)^5} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(-3)^2} &= 1 - x + |x - 1| + |-3| \\ \stackrel{x < 1}{=} 1 - x + (-x + 1) + 3 &= -2x + 2 + 3 = -2x + 5 \end{aligned}$$

۲۵ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = mnk\sqrt[k]{a}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

بررسی گزینه‌ها:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{36}}} &= \sqrt[4 \times 5 \times 6]{36^2} = \sqrt[120]{36^2} = \sqrt[60]{36} = \sqrt[30]{6} = \sqrt[15]{\sqrt{6}} \\ 2) \sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{6}}} &= \sqrt[4 \times 5 \times 6]{6^2} = \sqrt[120]{6^2} = \sqrt[60]{6} = \sqrt[30]{\sqrt{6}} \end{aligned}$$



$$۳) \sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{6}}} = 6^{\frac{1}{6 \times 5 \times 4}} = \frac{1}{6^{2 \times 5 \times 2}} = \frac{1}{6^{2 \times 4 \times 5}} = \frac{1}{6^{4 \times 5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{6^5}}$$

$$۴) \sqrt[12]{\sqrt[10]{\sqrt[3]{36}}} = 12^{\frac{1}{10 \times 3}} \sqrt[6]{6^2} = \frac{2}{6^{3 \times 10 \times 12}} = \frac{1}{6^{3 \times 10 \times 6}} = \frac{1}{6^{3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 2}} = \frac{1}{6^{6 \times 30}} = \sqrt[6]{\frac{1}{6^{30}}}$$

۲۶ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt[3]{a^k \sqrt{a^f}} = \sqrt[3]{a(a^{\frac{f}{2}})} = \sqrt[3]{a^{1+\frac{f}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{k+f}{2}}} = a^{\frac{k+f}{3 \times 2}}$$

$$a^{\frac{k+f}{3 \times 2}} = a^1 \Rightarrow \frac{k+f}{3 \times 2} = 1 \Rightarrow k+f = 3 \times 2 = 6 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$

۲۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

داریم:

$$\frac{3^3 \times \sqrt[3]{4} + ((3^3)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}}}{(3^3)^{\frac{1}{12}}} = \frac{3^3 \times \sqrt[3]{4} + 3^{\frac{3}{6}}}{3^{\frac{3}{12}}}$$

$$= \frac{3^3 \times 4^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^3 \times 4^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} = 27 + 1 = 28$$

۲۸ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ریشه‌های دهم x برابر است با $\pm \sqrt[10]{x}$. بنابراین:

$$\pm \sqrt[10]{x} = \pm \sqrt[10]{x^{\frac{a}{5}}} = \pm \sqrt[10]{(x^{\frac{a}{5}})^{\frac{2}{2}}} = \pm \sqrt[10]{2^{\frac{a}{5}}} = \pm 2^{\frac{a}{5 \times 10}} = \pm 2^{\frac{a}{50}}$$

۲۹ - گزینه ۳

$$A = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y - 5x}{x - y}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{xy} + y + x - 2\sqrt{xy} + y}{x - y} + \frac{y - 5x}{x - y} = \frac{2x + 2y}{x - y} + \frac{y - 5x}{x - y} = \frac{2x + 2y + y - 5x}{x - y}$$

$$= \frac{-3x + 3y}{x - y} = \frac{-3(x - y)}{x - y} = -3$$

۳۰ - گزینه ۴ $a^r + b^r = (a + b)(a^r - ab + b^r)$

دو عدد مورد نظر را x و y می‌نامیم:

$$\text{فرض } x + y = 5 \rightarrow \underbrace{x^r + y^r}_{19} + 2xy = 25 \Rightarrow 19 + 2xy = 25$$

$$\Rightarrow 2xy = 25 - 19 = 6 \Rightarrow xy = 3$$

$$x^r + y^r = (x + y)(x^r - xy + y^r) = 5 \times (19 - 3) = 5 \times 16 = 80$$

۳۱ - گزینه ۳

اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند: $b^2 = ac$

$$\delta^{r(x+y)} \times 12\delta^{y-x} = (25^{2x-y})^2 \Rightarrow \delta^{rx+y} \times (\delta^r)^{y-x} = (\delta^r)^{4x-2y}$$

$$\Rightarrow \delta^{rx+y} \times \delta^{ry-3x} = \delta^{4x-4y} \Rightarrow \delta^{rx+y+ry-3x} = \delta^{4x-4y}$$

$$\Rightarrow \delta^{ry} = \delta^{4x-4y} \Rightarrow ry = 4x - 4y \Rightarrow 4y = 4x - 4y \Rightarrow 8y = 4x \Rightarrow x = 2y$$

۳۲ - گزینه ۴

$$A = (\alpha^r + \beta^r + 4\alpha\beta)(\alpha^r + \beta^r - 4\alpha\beta) = ((\alpha^r + \beta^r) + 4\alpha\beta)((\alpha^r + \beta^r) - 4\alpha\beta)$$

$$= (\alpha^r + \beta^r)^2 - (4\alpha\beta)^2 = \alpha^{2r} + \beta^{2r} + 2\alpha^r\beta^r - 16\alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha^{2r} + \beta^{2r} - 16\alpha^2\beta^2$$

حال مقادیر α و β را در عبارت فوق جای می‌دهیم:



$$\begin{aligned}
 A &= (\sqrt[4]{\sqrt{3}+12})^4 + (\sqrt[4]{\sqrt{3}-12})^4 - 14\sqrt{\sqrt{3}+12} \times \sqrt{\sqrt{3}-12} \\
 &= \sqrt{3}+12 + \sqrt{3}-12 - 14\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 12^2} \\
 &= 14\sqrt{3} - 14\sqrt{49 \times 3 - 12^2} = 14\sqrt{3} - 14\sqrt{3} = 0
 \end{aligned}$$

۳۳ - گزینه ۲

$$\left(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[5]{2^3} \times \left(\sqrt[4]{2^2} \times \sqrt[3]{2^3}\right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 2^{\frac{3}{5}} \times \left(2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{3}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{5}} \times \left(2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 2^{\frac{3}{5}} \times \left(2^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{5}} \times 2^{\frac{14}{9} \times \frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{5}} \times 2^{\frac{14}{9}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{14}{9}} \\
 &= 2^{\frac{63+65}{105}} = 2^{\frac{128}{105}}
 \end{aligned}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴

۲ - ۲

۳ - ۲

۴ - ۱

۵ - ۱

۶ - ۳

۷ - ۳

۸ - ۳

۹ - ۱

۱۰ - ۲

۱۱ - ۴

۱۲ - ۴

۱۳ - ۲

۱۴ - ۳

۱۵ - ۴

۱۶ - ۱

۱۷ - ۴

۱۸ - ۳

۱۹ - ۱

۲۰ - ۴

۲۱ - ۳

۲۲ - ۱

۲۳ - ۱

۲۴ - ۲

۲۵ - ۱

۲۶ - ۱

۲۷ - ۳

۲۸ - ۴

۲۹ - ۳

۳۰ - ۴

۳۱ - ۳

۳۲ - ۴

۳۳ - ۲