



علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت های جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- اگر  $0 < a < 1$  باشد، آنگاه حاصل عبارت  $A = |a - \sqrt[3]{a}| + |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}|$  کدام است؟

- ①  $2\sqrt[3]{a}$
- ②  $\sqrt{a} - a$
- ③  $a - \sqrt{a}$
- ④  $2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - a$

۲- حاصل عبارت  $x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = \sqrt{3} + 1$  کدام است؟

- ①  $1 + 3\sqrt{3}$
- ②  $1 + \sqrt{3}$
- ③  $1$
- ④  $3\sqrt{2} - 1$

۳- حاصل عبارت  $(2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \frac{5\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1})^{-1}$  کدام است؟

- ①  $\frac{\sqrt{2}}{16}$
- ②  $\frac{\sqrt{2}}{8}$
- ③  $\frac{\sqrt{3}}{16}$
- ④  $\frac{\sqrt{3}}{8}$



۴- حاصل عبارت  $A = \frac{a^3 + b^3}{a - b + \frac{b^2}{a}}$  به ازای  $a = \sqrt{2}$  و  $b = \sqrt{3}$  کدام است؟

- ①  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
- ②  $2 + \sqrt{6}$
- ③  $3 + \sqrt{6}$
- ④  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

۵- اگر  $x \geq 0$ ، آنگاه حاصل  $\sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x}$  کدام است؟

- ①  $x \sqrt{x}$
- ②  $\sqrt{x}$
- ③  $\sqrt{x^3}$
- ④  $\sqrt{x^6}$

۶- اگر  $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$  کدام است؟

- ① ۲
- ②  $\frac{4}{3}$
- ③ ۱
- ④  $\frac{2}{3}$

۷- اگر  $\alpha > 0$  و  $\sqrt[n]{8} \times \sqrt[n]{4} = \sqrt[n]{\alpha}$  مقدار  $\sqrt{\sqrt{\alpha} \times \sqrt[5]{2\alpha} + 1}$  کدام است؟

- ① ۹
- ② ۲
- ③ ۴
- ④ ۶



۸- اگر  $0 < a < 1$  و مقادیر  $-\sqrt[3]{a^2}$ ،  $\frac{1}{a^3}$ ،  $a^2$ ،  $\sqrt{-a}$  و  $\sqrt[3]{a}$  را روی محور اعداد نشان دهیم سومین عدد از سمت چپ کدام است؟

- ①  $\sqrt{-a}$
- ②  $-\sqrt[3]{a^2}$
- ③  $a^2$
- ④  $\sqrt[3]{a}$

۹- اگر  $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$ ، حاصل  $x^3 - 3x$  کدام است؟

- ①  $-10$
- ②  $-8$
- ③  $10$
- ④  $8$

۱۰- اگر ریشه دوم  $x$  را به توان ۳ برسانیم، عدد حاصل ۸ برابر ریشه چهارم  $x^2$  می شود. ریشه سوم  $x$  کدام است؟

- ① ۲
- ②  $2\sqrt{2}$
- ③  $2\sqrt[3]{4}$
- ④ ۴

۱۱- بین دو عدد  $\sqrt[3]{-25}$  و  $\sqrt[4]{19}$  چند عدد صحیح وجود دارد؟

- ① ۷
- ② ۵
- ③ ۳
- ④ ۴



۱۲- اگر  $\sqrt{72} = \frac{\sqrt{288a\sqrt{2}b^4}}{a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$  باشد، مجموع مقادیر ممکن برای  $b$  کدام است؟

- ①  $-\sqrt{2}$
- ② صفر
- ③  $\sqrt{2}$
- ④  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳- حاصل ساده شده ی عبارت  $(\sqrt{3} + 1)^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{2(2 - \sqrt{3})})$  کدام است؟

- ①  $2^{\frac{1}{3}}$
- ②  $2^{\frac{2}{3}}$
- ③  $2^{\frac{1}{6}}$
- ④  $2^{\frac{2}{3}}$

۱۴- اگر  $a = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$  و  $b = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$  باشد، حاصل  $\frac{a-b}{a+b}$  کدام است؟

- ①  $-\frac{1}{\sqrt{15}}$
- ②  $-\frac{\sqrt{15}}{3}$
- ③  $-\frac{\sqrt{15}}{5}$
- ④  $-\frac{2\sqrt{15}}{5}$



۱۵- اگر جمله عمومی دنباله  $a_n$  به صورت  $a_n = 3^{\frac{n-1}{n}}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{(a_{2n+5})^{\frac{2n+5}{2}} - (a_n)^n}{(a_{n+2})^{n+2} - (a_{3n-5})^{\frac{3n-5}{3}}}$  کدام است؟ ( $n \geq 2$ )

- ①  $a_{n+1}$
- ②  $a_{n-1}$
- ③  $\frac{1}{3}$
- ④ ۳

۱۶- برای اعداد حقیقی  $a$  و  $b$ ، اگر تساوی  $13 = 2a + 4b - 2a^2 + b^2 + 2ab$  برقرار باشد، حاصل  $3a + 2b$  کدام است؟

- ① ۱
- ② ۱۹
- ③ -۱
- ④ -۱۹

۱۷- در تجزیه عبارت  $3a^3b - 12ab^3 + a^3 - 8b^3$  کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- ①  $a - 2b$
- ②  $a + 2b$
- ③  $3a + 2b$
- ④  $3a - b$

۱۸- ریشه بیست و سوم عبارت  $\frac{24^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{7}{2}}}{32^2 \times 27^{\frac{1}{3}} \times 48^{\frac{1}{4}}}$  کدام است؟

- ①  $\sqrt[12]{6}$
- ②  $\sqrt{12}$
- ③  $\sqrt[12]{3}$
- ④  $\sqrt[6]{3}$



۱۹- ساده شده عبارت  $\left| \frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \right| - \left| \frac{4\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \right|$  کدام است؟

- ①  $-\sqrt{5}$
- ②  $\sqrt{5}$
- ③  $2\sqrt{5}$
- ④  $-2\sqrt{5}$

۲۰- اگر  $6^{x+1} = \sqrt[3]{2^{y+2}} \times \sqrt[3]{3^{x+5}}$  باشد، حاصل  $x + y$  کدام است؟

- ① ۲
- ② ۳
- ③ ۴
- ④ ۵

۲۱- حاصل عبارت  $\frac{x^6 + 1}{x^5 - x^3 + x}$  به ازای  $x = -2\sqrt{2}$  کدام است؟

- ①  $-12$
- ②  $-\frac{9\sqrt{2}}{4}$
- ③  $-9\sqrt{2}$
- ④  $-\frac{9}{2}\sqrt{2}$

۲۲- حاصل عبارت  $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = 2 + \sqrt{3}$  کدام است؟

- ① ۸
- ②  $8 + \sqrt{3}$
- ③  $8 + 3\sqrt{3}$
- ④ ۱۱



۲۳- اگر  $A = \sqrt{5} - \sqrt{2}$  باشد، حاصل عبارت  $B = \frac{1}{\sqrt{5} - A} + \frac{1}{A + \sqrt{5}}$  چند برابر  $\sqrt{5}$  است؟

①  $\sqrt{2}$

②  $\frac{1}{2}$

③ ۱

④  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۴- خلاصه شده عبارت  $(\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})^{1/5}$  کدام است؟

①  $\sqrt{2}$

② ۲

③  $\sqrt[3]{2^2}$

④  $\sqrt[3]{2}$

۲۵- حاصل عبارت  $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$  کدام است؟

①  $\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$

②  $\sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{2}$

③  $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

④  $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

۲۶- در کدام حالت تساوی  $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$  برقرار نمی‌باشد؟ ( $k \in N - \{1\}, m \in N, a \in R$ )

①  $k, a > 0$  زوج و  $m$  زوج

②  $k, a > 0$  فرد و  $m$  فرد

③  $k, a < 0$  فرد و  $m$  زوج

④  $k, a < 0$  زوج و  $m$  فرد



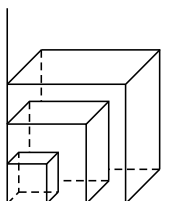
۲۷- در تجزیه عبارت  $1 - (\sqrt[5]{x^4})^3$  کدام عبارت وجود ندارد؟

- ①  $\sqrt[5]{x^2} - 1$
- ②  $\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{x^4} + 1$
- ③  $\sqrt[5]{x^2} + 1$
- ④  $\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^2} + 1$

۲۸- حاصل  $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{3} + 1$  کدام است؟

- ① ۱
- ②  $2\sqrt{3} - 1$
- ③ ۳
- ④  $\sqrt{3} - 1$

۲۹- در شکل زیر سه مکعب تودرتو واقع شده‌اند. اگر حجم بزرگ‌ترین مکعب برابر ۶۵ و حجم کوچک‌ترین مکعب برابر ۸ باشد، طول ضلع مکعب میانی کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟



- ① ۱٫۹
- ② ۲٫۷
- ③ ۳٫۶
- ④ ۴

۳۰- در نامعادله  $2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3$ ، چند مقدار صحیح برای  $x$  می‌توان یافت؟

- ① ۸۰
- ② ۸۲
- ③ ۶۵
- ④ ۶۶





## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک هرچه رادیکال به فرجه بزرگ‌تری از آن‌ها بگیریم، بزرگ‌تر می‌شوند.

$$a < \sqrt[3]{a} \Rightarrow a - \sqrt[3]{a} < 0 \Rightarrow |a - \sqrt[3]{a}| = -a + \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \Rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}| = -\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}$$

$$|a - \sqrt[3]{a}| + |-\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}| = -a + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} = 2\sqrt[3]{a} - \sqrt{a} - a$$

۲ - گزینه ۳

می‌دانیم  $b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3 = (a - b)^3$  است.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt[3]{3} = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 1 - 3\sqrt[3]{3} = (x-1)^3 + 1 - 3\sqrt[3]{3}$$

با جایگذاری  $x = \sqrt[3]{3} + 1$  داریم:

$$(\sqrt[3]{3} + 1 - 1)^3 + 1 - 3\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} + 1 - 3\sqrt[3]{3} = 1$$

۳ - گزینه ۱

$$(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6} + \frac{5\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1})^{-1} = \left( \frac{2\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1}$$

$$= \left( \frac{8\sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = \left( \frac{8\sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = \left( \frac{8\sqrt[3]{6} + 8\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = \left( \frac{8\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3} + 1)}{\sqrt[3]{3} + 1} \right)^{-1} = (8\sqrt[3]{2})^{-1} = \frac{1}{8\sqrt[3]{2}}$$

کسر فوق را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{8\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{8 \times 2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{16}$$

۴ - گزینه ۲

می‌دانیم  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$  است.

$$A = \frac{a^2 + b^2}{a - b + \frac{b^2}{a}} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{\left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a}\right)} = a(a + b) = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 2 + \sqrt[3]{6}$$

۵ - گزینه ۴

می‌دانیم:  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} (a > 0)$

$$\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{x\sqrt{x} \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{x \times x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{5}{2}}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$$

۶ - گزینه ۴ می‌دانیم  $(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$  است.

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2}} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-2)}}{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-2)})} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2}}{x + 1 - (x - 2)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 3 \quad *$$

$$\text{از طرفی: } \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1 \xrightarrow{\text{توان } 3} \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(x-2)^3} - 3\sqrt[3]{(x+1)(x-2)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(x-2)^3} = 1 + 3\sqrt[3]{x^2 - x - 2} \quad **$$



در رابطه \* به جای  $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$  مساویش را از رابطه \*\* قرار می‌دهیم.

$$\text{پس: } 1 + 2\sqrt[3]{x^2 - x - 2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 3$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3}$$

۷ - گزینه ۳

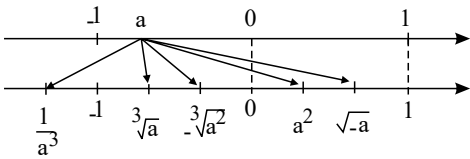
$$\sqrt[n]{\lambda} \times \sqrt[n]{4} = \sqrt[n]{\alpha} \Rightarrow \sqrt[n]{\lambda^r} \times \sqrt[n]{4^r} = \sqrt[n]{\lambda^r} \times \sqrt[n]{2^{2r}} = 2^{\frac{r}{n}} \times 2^{\frac{r}{n}} = 2^{\frac{2r}{n}} = 2^{\frac{r+1}{n}} = 2^{\frac{r}{n}} = (2^r)^{\frac{1}{n}} = \alpha^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \alpha = 2^r = 16$$

$$\sqrt{\sqrt{\alpha} \times \sqrt[5]{2\alpha + 1}} \stackrel{\alpha=16}{=} \sqrt{\sqrt{16} \times \sqrt[5]{32 + 1}} = \sqrt{4 \times \sqrt[5]{33 + 1}} = \sqrt{4 \times 2 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: اعداد بین صفر و منفی یک هر چه به توان بزرگتری برسند، بزرگتر می‌شوند.

با توجه به محور اعداد، سومین عدد از سمت چپ  $-\sqrt[3]{a^2}$  است.



۹ - گزینه ۳ می‌دانیم  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$  است.

ابتدا مقدار  $x^3$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}})^3 \\ &= 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} \times \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}} (\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}) \\ &= 10 + 3\sqrt[3]{25 - 4 \times 6} \times x = 10 + 3 \times 1 \times x = 10 + 3x \Rightarrow x^3 = 10 + 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 10 \end{aligned}$$

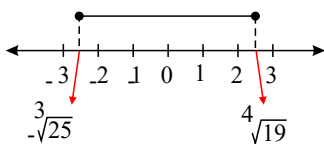
۱۰ - گزینه ۱

می‌دانیم: ریشه  $n$ ام عدد  $x$  برابر است با  $\sqrt[n]{x}$   
 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  ,  $(a^b)^c = a^{bc}$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^3 &= \lambda \sqrt[4]{x^3} \Rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^3 = \lambda \times x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \lambda x^{\frac{3}{4}} \\ \Rightarrow \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} &= \lambda \Rightarrow x^{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} = \lambda \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\lambda} = 2 \end{aligned}$$

۱۱ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{16} < \sqrt[4]{19} < \sqrt[3]{81} &\Rightarrow 2 < \sqrt[4]{19} < 3 \\ \sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-25} < \sqrt[3]{-8} &\Rightarrow -3 < \sqrt[3]{25} < -2 \end{aligned}$$



با توجه به محور اعداد، در این بازه ۵ عدد صحیح وجود دارد.

۱۲ - گزینه ۲

می‌دانیم:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0)$  ,  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{288a} \sqrt[3]{b^6}}{a^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\sqrt{288} \sqrt{a} \sqrt[3]{b^6}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{144 \times 2} \times a^{\frac{1}{2}} \times b^2}{a^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{144} \times \sqrt{2} \times b^2 = 12\sqrt{2}b^2 = \sqrt{144} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow 12\sqrt{2}b^2 = 6\sqrt{2} \Rightarrow 12b^2 = 6 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بنابراین، مجموع مقادیر ممکن برای  $b$  برابر است با  $0$

۱۳ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} + 1)^{\frac{2}{3}} (\sqrt{2(2 - \sqrt{3})}) = ((\sqrt{3} + 1)^2)^{\frac{1}{3}} (\sqrt{4 - 2\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}} \\ & = (3 + 1 + 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} (4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = (4 + 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} (4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \\ & = (16 - 4 \times 3)^{\frac{1}{3}} = (16 - 12)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

۱۴ - گزینه ۳

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} + \sqrt{4 + \sqrt{15}}} \times \frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}} = \frac{(\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}})^2}{4 - \sqrt{15} - (4 + \sqrt{15})} \\ & = \frac{4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}}{4 - \sqrt{15} - 4 - \sqrt{15}} = \frac{8 - 2\sqrt{16 - 15}}{-2\sqrt{15}} \\ & = \frac{6}{-2\sqrt{15}} = \frac{3}{-\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{3\sqrt{15}}{15} = -\frac{\sqrt{15}}{5} \end{aligned}$$

۱۵ - گزینه ۴

می‌دانیم:  $(a^m)^n = a^{mn}$

عبارت مورد نظر را  $A$  می‌نامیم و داریم:

$$a_n = 3^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow \begin{cases} a_{2n+5} = 3^{\frac{2n+5-1}{2n+5}} = 3^{\frac{2n+4}{2n+5}} \\ a_{n+2} = 3^{\frac{n+2-1}{n+2}} = 3^{\frac{n+1}{n+2}} \\ a_{3n-5} = 3^{\frac{3n-5-1}{3n-5}} = 3^{\frac{3n-6}{3n-5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{2n+5})^{\frac{2n+5}{2}} = (3^{\frac{2n+4}{2n+5}})^{\frac{2n+5}{2}} = 3^{n+2} \\ (a_n)^n = (3^{\frac{n-1}{n}})^n = 3^{n-1} \\ (a_{n+2})^{n+2} = (3^{\frac{n+1}{n+2}})^{n+2} = 3^{n+1} \\ (a_{3n-5})^{\frac{3n-5}{3}} = (3^{\frac{3n-6}{3n-5}})^{\frac{3n-5}{3}} = 3^{n-2} \end{cases}$$

$$A = \frac{3^{n+2} - 3^{n-1}}{3^{n+1} - 3^{n-2}} = \frac{3^{n-1} \times 3^3 - 3^{n-1}}{3^{n-2} \times 3^3 - 3^{n-2}} = \frac{3^{n-1}(3^3 - 1)}{3^{n-2}(3^3 - 1)} = \frac{3^{n-1}}{3^{n-2}} = 3^{n-1-n+2} = 3^1 = 3$$

۱۶ - گزینه ۳

می‌دانیم  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$  است.

$$2a^2 + b^2 + 2ab + 4b - 2a + 13 = 0$$

$$\frac{2a^2 - a^2 + a^2, 13 = 9 + 4}{-2a = 4a - 6a} \rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + 4 + 2ab + 4b + 4a}_{(a+b+2)^2} + \underbrace{a^2 - 6a + 9}_{(a-3)^2} = 0$$

$$(a + b + 2)^2 + (a - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ a + b + 2 = 0 \xrightarrow{a=3} b + 5 = 0 \Rightarrow b = -5 \end{cases}$$

پس:  $3a + 2b = 9 - 10 = -1$

$$3a^2b - 12ab^2 + a^3 - 8b^3 = 3ab(a^2 - 4b^2) + (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$$

۱۷ - گزینه ۱



$$= 3ab(a-2b)(a+2b) + (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = (a-2b)(3a^2b+6ab^2+a^2+2ab+4b^2)$$

بنابراین  $a-2b$  در عبارت وجود دارد.

۱۸ - گزینه ۳ کل عبارت را  $A$  می‌نامیم و داریم:

$$\begin{cases} (24)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 8)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 2^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2^2 \\ 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 \\ (32)^2 = (2^5)^2 = 2^{10} \\ (27)^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} \\ 48^{\frac{-1}{6}} = (3 \times 16)^{\frac{-1}{6}} = (3 \times 2^4)^{\frac{-1}{6}} = 3^{\frac{-1}{6}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$A = \frac{2^2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^5}{2^{10} \times 3^{-1} \times 2^{-1} \times 3^{\frac{-1}{6}} \times 2^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2^7 \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^9 \times 3^{\frac{-5}{6}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = 3^{\frac{4+5}{6}} = 3^{\frac{9}{6}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ریشه بیست و سوم  $\sqrt[3]{A}$

۱۹ - گزینه ۱

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$2 < \sqrt{5} \Rightarrow 2 - \sqrt{5} < 0 \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2} \times \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5 - 4} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 - \sqrt{5} > 0 \Rightarrow \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right| = \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5} + 20}{9 - 5} = 3\sqrt{5} + 5$$

$$\left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| - \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right| = 5 + 2\sqrt{5} - 5 - 3\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

۲۰ - گزینه ۴

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a^m \times b^m = ab^m \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sqrt[3]{3^{x+5}} \times \sqrt[3]{2^{y+2}} = 3^{\frac{x+5}{3}} \times 2^{\frac{y+2}{3}} = 3^{x+1} \times 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+5}{3} = x+1 \Rightarrow x+5 = 3x+3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{y+2}{3} = x+1 \xrightarrow{x=1} \frac{y+2}{3} = 2 \Rightarrow y+2 = 6 \Rightarrow y = 4 \end{cases} \Rightarrow x+y = 4+1 = 5$$

۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم که  $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$  است.

$$\frac{x^6+1}{x^5-x^2+x} = \frac{(x^2)^3+1^3}{x(x^4-x^2+1)} = \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{x(x^4-x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$\xrightarrow{x=-2\sqrt{2}} \frac{(-2\sqrt{2})^2+1}{-2\sqrt{2}} = \frac{8+1}{-2\sqrt{2}} = \frac{9}{-2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-9\sqrt{2}}{4}$$

۲۲ - گزینه ۱

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$x^2 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3} = (x - \sqrt{3})^2 \xrightarrow{x=2+\sqrt{3}} (2 + \sqrt{3} - \sqrt{3})^2 = 2^2 = 4$$

۲۳ - گزینه ۱

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}-A} + \frac{1}{A+\sqrt{5}} = \frac{A+\sqrt{5}+\sqrt{5}-A}{(\sqrt{5}-A)(\sqrt{5}+A)} = \frac{2\sqrt{5}}{5-A^2}$$



$$A = \sqrt{5 - \sqrt{2}} \rightarrow B = \frac{2\sqrt{5}}{5 - (\sqrt{5 - \sqrt{2}})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5 - 5 + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \times \sqrt{2}$$

۲۴ - گزینه ۲

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0), \quad a^x - b^x = (a - b)(a^x + ab + b^x)$$

می‌دانیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 - 2} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left( \sqrt[3]{4} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( 4^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{4} = 2$$

۲۵ - گزینه ۱

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

می‌دانیم:

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})}{3 + 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} - 5} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$$

۲۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: در زیر رادیکال به فرجه زوج، عدد منفی قرار نمی‌گیرد.

$\sqrt[n]{a}$ : زوج  $x \rightarrow a > 0$

۲۷ - گزینه ۲

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

می‌دانیم:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(\sqrt[5]{x^6})^3 - 1 = (\sqrt[5]{(x^2)^3})^3 - 1 = (\sqrt[5]{x^6})^3 - 1$$

$$= ((\sqrt[5]{x^2})^3 - 1)((\sqrt[5]{x^2})^3 + 1)$$

$$= (\sqrt[5]{x^2} - 1)((\sqrt[5]{x^2})^2 + \sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^2} + 1)((\sqrt[5]{x^2})^2 - \sqrt[5]{x^2} + 1)$$

$$= (\sqrt[5]{x^2} - 1)(\sqrt[5]{x^6} + \sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^6} - \sqrt[5]{x^2} + 1)$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3} = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{3} + 1 = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3} + 1 = |2 - \sqrt{3}| + \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \rightarrow 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 = 3$$

۲۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: حجم مکعبی به طول ضلع  $a$  برابر است با:  $V = a^3$

اگر طول ضلع مکعب میانی را  $a$  بنامیم، داریم:

$$(\sqrt[3]{65} \approx 4,02)$$



$$8 < a^3 < 65 \Rightarrow 2^3 < a^3 < 4^3 + 1 \Rightarrow 2 < a < 4,02$$

گزینه ۱ در بازه بدست آمده نیست.

۳- گزینه ۲ حاصل  $\sqrt[4]{x}$  همیشه مثبت است، بنابراین  $-2 \leq \sqrt[4]{x}$  تبدیل به  $x \leq 0$  می شود.

$$-2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \xrightarrow{\text{به توان ۴}} 0 \leq x \leq 3^4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 81$$

تعداد اعداد صحیح در این بازه:  $81 - 0 + 1 = 82$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۴	۱۱ - ۲	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۳	۷ - ۳	۱۲ - ۲	۱۷ - ۱	۲۲ - ۱	۲۷ - ۲
۳ - ۱	۸ - ۲	۱۳ - ۲	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۳
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۱
۵ - ۴	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲