



علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت های جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- حاصل عبارت $(\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}} + \frac{\sqrt[5]{4}}{2\sqrt[3]{2}})^{60}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{4}$
- ② 2^{-16}
- ③ 2^{-32}
- ④ 2^4

۲- کدام یک از جملات زیر نادرست است؟

- ① ریشه های چهارم هر عدد مثبت، قرینه یکدیگرند.
- ② ریشه پنجم هر عدد منفی، عددی منفی است.
- ③ جذر هر عدد بزرگ تر از ۱ از سایر ریشه هایش بزرگ تر است.
- ④ جذر هر عدد بین صفر و یک از سایر ریشه هایش بزرگ تر است.

۳- حاصل کسر $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt{8}}$ کدام است؟

- ① ۱
- ② ۲
- ③ ۳
- ④ ۴

۴- کدام گزینه همواره درست است؟ (n عدد طبیعی و $n \geq 2$)

- ① b ریشه n ام عدد a است، هرگاه $a^n = b$.
- ② تساوی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ همواره برقرار است.
- ③ اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = \pm a$.
- ④ اگر n فرد باشد، ریشه n ام عدد a همواره وجود دارد.



۵- چه تعداد از جملات زیر نادرست است؟

الف - هر عدد مثبت، دارای ۲ ریشهٔ چهارم است که باهم قرینه‌اند.

ب - ریشهٔ سوم هر عدد از خود عدد کم‌تر است.

ج - ریشهٔ چهارم اعداد مثبت از ریشهٔ سومشان کم‌تر است.

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۰ (۴)

۶- اگر $2 = 49^{5x-3}$ باشد، مقدار 7^{3-5x} کدام است؟

۲ (۱)

$\sqrt{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

۱ (۴)

۷- حاصل عبارت $(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{\sqrt{5+2}} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{5-2}}}$ کدام است؟

۱ (۱)

-۱ (۲)

$\sqrt{5+2}$ (۳)

$\sqrt{5-2}$ (۴)

۸- در کدام گزینه، اعداد به درستی مرتب شده‌اند؟

$\sqrt[3]{31} < \sqrt[4]{80} < \sqrt{10} < \sqrt[6]{972}$ (۱)

$\sqrt[3]{31} < \sqrt[4]{80} < \sqrt[6]{972} < \sqrt{10}$ (۲)

$\sqrt[4]{80} < \sqrt[3]{31} < \sqrt{10} < \sqrt[6]{972}$ (۳)

$\sqrt[4]{80} < \sqrt[3]{31} < \sqrt[6]{972} < \sqrt{10}$ (۴)



۹- اگر $0 < a < 1$ باشد، چند مورد از موارد زیر درست است؟

الف) $\sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$ (ب) $a^2 > a^4$

پ) $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[6]{a^2}$ (ت) $\sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a}$

- ۱) ۴
- ۲) ۳
- ۳) ۲
- ۴) ۱

۱۰- حاصل عبارت $A = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{25}$ کدام است؟

- ۱) $-\sqrt[3]{25}$
- ۲) $-\sqrt[3]{5}$
- ۳) $-3\sqrt[3]{25}$
- ۴) $2\sqrt[3]{25}$

۱۱- اگر $2 = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^2 - 1}{x}$ کدام است؟

- ۱) ۶
- ۲) ۲
- ۳) ۱۴
- ۴) ۱۲

۱۲- حاصل عبارت $A = 5\sqrt[3]{-0,027} + 2\sqrt[4]{\frac{1}{16}} + \sqrt[5]{\frac{-243}{32}}$ کدام است؟

- ۱) ۱,۵
- ۲) ۱
- ۳) -۱,۳
- ۴) -۲



۱۳- در تجزیه عبارت $\lambda a^9 - a^6 b^3 + \lambda a^3 b^3 - b^6$ کدام عامل وجود ندارد؟

① $a^6 + b^3$

② $4a^2 + 2ab + b^2$

③ $2a - b$

④ $2a + b$

۱۴- حاصل عبارت $(3\sqrt{2} - \sqrt{1})(3\sqrt{2} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) \dots (3\sqrt{2} - \sqrt{20})$ کدام است؟

① $(3\sqrt{2})^{20} - 20$

② $(3\sqrt{2})^{20} + 20$

③ $(3\sqrt{2})^{20} - 20\sqrt{20}$

④ صفر

۱۵- اگر $x = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $x^3 - 5x$ کدام است؟

① ۱

② $\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{2}$

④ ۲

۱۶- حاصل $\frac{1}{3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{3}}$ کدام است؟

① $\sqrt{3} - 1$

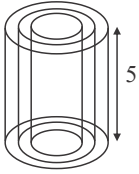
② $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

③ $\sqrt{3} + 1$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$



۱۷- در شکل مقابل سه استوانه با ارتفاع ۵ داخل یکدیگرند. اگر حجم استوانه بزرگتر برابر با 300π و حجم استوانه کوچکتر برابر 60π باشد، اندازه شعاع قاعده استوانه میانی برابر با چند عدد طبیعی می تواند باشد؟



- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

۱۸- اگر $3 < a < 4$ باشد، آنگاه ساده شده $\sqrt{a^2 - 9a + 19} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ کدام است؟

- ۱) $a - 4$
- ۲) $a + 4$
- ۳) $4 - a$
- ۴) ۴

۱۹- حاصل $\sqrt{14 - \sqrt{52}} - \sqrt{14 + \sqrt{52}}$ کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲) -۲
- ۳) ۳
- ۴) -۳

۲۰- اگر ریشه پنجم عدد x برابر $\frac{3}{2}$ و ریشه سوم عدد y برابر $\frac{4}{3}$ باشد، حاصل ضرب ریشه دوم مثبت عدد y در ریشه چهارم مثبت عدد x کدام است؟

- ۱) $4\sqrt[4]{3}$
- ۲) $\frac{4}{\sqrt[4]{3}}$
- ۳) $\frac{4}{\sqrt[4]{6}}$
- ۴) $4\sqrt[4]{27}$



۲۱- حاصل عبارت $A = \frac{(512)^{-\frac{1}{9}} + \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\frac{625}{256}\right)^{\frac{5}{25}}}$ کدام است؟

- ① ۲٫۲
- ② ۲٫۶
- ③ ۲٫۴
- ④ ۱٫۲

۲۲- به ازای چه مقدار a ، رابطه $\left(\frac{4^a}{2\sqrt{8}}\right)^2 = 2\sqrt{288}$ برقرار است؟

- ① $2\sqrt{2}$
- ② $3\sqrt{2}$
- ③ $4\sqrt{2}$
- ④ $8\sqrt{2}$

۲۳- حاصل عبارت $2\sqrt{5-2} \times (8 + 2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$ کدام است؟

- ① ۱
- ② $2\sqrt{5}$
- ③ $4\sqrt{5}$
- ④ ۱۶

۲۴- در تساوی $\frac{6 + 3\sqrt{x} + A}{x-1} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$ ، عبارت A کدام است؟

- ① $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x}$
- ② $\sqrt[4]{x^3} + x$
- ③ $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}$
- ④ $\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x}$



۲۵- مقدار $\sqrt{27} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} - 2\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ کدام است؟

- ① ۲
 ② $-2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$
 ③ $4\sqrt{3} + 6$
 ④ -2

۲۶- نردبانی به طول ۱۳ متر را طوری به دیوار یک ساختمان تکیه داده‌ایم که فاصله پای نردبان تا دیوار ۷ متر کمتر از سر نردبان تا زمین است. فاصله سر نردبان تا زمین چقدر است؟

- ① ۵
 ② ۱۲
 ③ ۸
 ④ ۱۵

۲۷- مجموع مربعات سه مضرب طبیعی و متوالی ۵، ۱۹۲۵ است. مجموع آن‌ها کدام است؟

- ① ۶۰
 ② ۱۰۵
 ③ ۷۵
 ④ ۹۰

۲۸- اگر $\sqrt[3]{a} > a$ باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

- ① $-1 < a < 0$
 ② $\sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$
 ③ $a^4 < a$
 ④ $a^5 < a$



۲۹- اگر $0 < x \leq 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[6]{x^6} + \sqrt[7]{x^7}$ کدام است؟

- ① $4x$
- ② $-4x$
- ③ $2x$
- ④ صفر

۳۰- حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt[6]{\sqrt[5]{4^3}}} \times \sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{9^6}}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^3}}}}$$

- ① $\sqrt[20]{\frac{81}{16}}$
- ② $\sqrt[20]{\frac{9}{4}}$
- ③ $\sqrt[10]{\frac{3}{4}}$
- ④ $\sqrt[10]{\frac{9}{2}}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}} + \frac{\sqrt[5]{4}}{2\sqrt[3]{2}} \right)^{60} &= \left(\frac{4^{\frac{1}{3}}}{2 \times (2^3)^{\frac{1}{5}}} + \frac{4^{\frac{1}{5}}}{2 \times 2^{\frac{1}{3}}} \right)^{60} = \left(\frac{(2^2)^{\frac{1}{3}}}{2 \times 2^{\frac{3}{5}}} + \frac{(2^2)^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{4}{3}}} \right)^{60} \\ &= \left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{8}{5}}} + \frac{2^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{4}{3}}} \right)^{60} = \left(2^{\frac{2}{3} - \frac{8}{5}} + 2^{\frac{2}{5} - \frac{4}{3}} \right)^{60} = \left(2^{\frac{10-24}{15}} + 2^{\frac{6-20}{15}} \right)^{60} \\ &= \left(2^{\frac{-14}{15}} + 2^{\frac{-14}{15}} \right)^{60} = \left(2 \times 2^{\frac{-14}{15}} \right)^{60} = \left(2^{\frac{1}{15}} \right)^{60} = 2^4 \end{aligned}$$

۲ - گزینه ۴ می‌دانیم: هرچه از اعداد بین صفر و یک، ریشه بزرگتری بگیریم، بزرگ‌تر می‌شوند.

جزر یعنی ریشه دوم که برای اعداد بین صفر و یک؛ ریشه‌های بزرگ‌تر؛ بزرگ‌تر هستند.

۳ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ ($n \rightarrow a, b > 0$ زوج)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt{8}} &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 \times 4} + \sqrt{2 \times 9}}{\sqrt{2 \times 25} - \sqrt{2 \times 4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2}}{\sqrt{25}\sqrt{2} - \sqrt{4}\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 2 \end{aligned}$$

۴ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست: b ریشه n ام عدد a است، هرگاه $a = b^n$.

(۲) نادرست: مثال نقض:

$$\begin{cases} \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ (\sqrt{-2})^2 \text{ تعریف نشده} \end{cases}$$

(۳) نادرست: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

(۴) درست

۵ - گزینه ۲ الف) درست

ب) نادرست: ریشه سوم اعداد بین صفر و یک از خودشان بزرگ‌تر است.

ج) نادرست: ریشه چهارم اعداد بین صفر و یک از ریشه سومشان بزرگ‌تر است.

۶ - گزینه ۳

$$(49)^{5x-3} = 2 \Rightarrow (7^2)^{5x-3} = 2 \Rightarrow 7^{10x-6} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان } \frac{-1}{2}} (7^{10x-6})^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 7^{5x-3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{7} + \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} &= ((\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6}))^{\sqrt{5}+2} \\ &= (7 - 6)^{\sqrt{5}+2} = 1^{\sqrt{5}+2} = 1 \end{aligned}$$

۷ - گزینه ۱



$$\left. \begin{aligned} 2 < \sqrt[4]{80} < 3 \\ 3 < \sqrt[3]{31} < 4 \\ 3 < \sqrt[6]{972} < 4 \\ 3 < \sqrt[5]{10} < 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (\sqrt[3]{31})^6 &= 961 \\ (\sqrt[5]{10})^6 &= 1000 \Rightarrow \sqrt[5]{10} > \sqrt[6]{972} > \sqrt[3]{31} > \sqrt[4]{80} \\ (\sqrt[6]{972})^6 &= 972 \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a} < \sqrt[k]{a} < \dots < a < a^3 < \dots < a^{m+1}$$

نکته: اگر $-1 < a < 0$ باشد:

بررسی گزینه ها:

(الف) درست: $-1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$

(ب) درست: $-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^4 < a^2 < 1$

(پ) درست: $-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^2 < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[6]{a^2}$

(ت) درست: $-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < -a < 1 \Rightarrow \sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases} \text{ می دانیم: ۱۰ - گزینه ۱}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$$

$$A = \frac{2}{5}\sqrt[3]{25} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{25} = -\sqrt[3]{25}$$

۱۱ - گزینه ۳ می دانیم $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ است.

$$\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 3} (\sqrt[3]{x})^3 - 3(\sqrt[3]{x})^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) + 3(\sqrt[3]{x}) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 8$$

$$\Rightarrow x - 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} = 8 \Rightarrow x - \frac{1}{x} - 3 \underbrace{\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}_2 = 8$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = 8 + 6 = 14 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 14$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases} \text{ می دانیم: ۱۲ - گزینه ۴}$$

داریم:

$$A = 5\sqrt[3]{-0,3^27} + 2\sqrt[4]{\frac{1}{16}} + \sqrt[5]{\frac{-243}{32}}$$

$$\Rightarrow A = 5\sqrt[3]{(-0,3)^3} + 2\sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} + \sqrt[5]{\frac{-3^5}{2^5}} \Rightarrow A = 5(-0,3) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = -1,5 + 1 - 1,5 = -2$$

۱۳ - گزینه ۴ می دانیم که $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ است.

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda a^3 - a^2 b^3} + \underbrace{\lambda a^2 b^3 - b^6} &= a^2(\lambda a^3 - b^3) + b^3(\lambda a^2 - b^3) \\ &= (\lambda a^3 - b^3)(a^2 + b^3) = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + b^3) \end{aligned}$$

بنابراین $2a + b$ در عبارت وجود ندارد.

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{زوج } n \\ x & \text{فرد } n \end{cases} \text{ می دانیم: ۱۴ - گزینه ۴}$$

زوج $a = b \leftarrow$ مثبت

داریم:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2}\sqrt{2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$$

بنابراین:



$$(3\sqrt{2} - \sqrt{1})(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdots \underbrace{(3\sqrt{2} - \sqrt{18})(3\sqrt{2} - \sqrt{19})(3\sqrt{2} - \sqrt{20})}_{\text{صفر}} = 0$$

۱۵ - گزینه ۴ ابتدا x را گویا می‌کنیم:

$$x = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

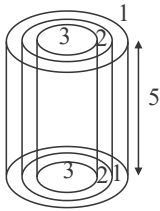
اکنون $x = 1 - \sqrt{2}$ را در $x(x^2 - 5)$ جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2}) \left((1 - \sqrt{2})^2 - 5 \right) &= (1 - \sqrt{2}) \left((1 + 2 - 2\sqrt{2}) - 5 \right) \\ &= (1 - \sqrt{2}) (-2 - 2\sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2}) (-2(1 + \sqrt{2})) \\ &= -2 \left((1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \right) = -2 \left((1)^2 - (\sqrt{2})^2 \right) = -2(1 - 2) = -2(-1) = 2 \end{aligned}$$

۱۶ - گزینه ۲

$$\frac{1}{3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

۱۷ - گزینه ۲

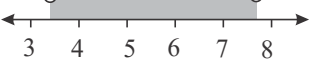


می‌دانیم: $V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$ (شعاع r , ارتفاع h)

شعاع قاعده استوانه دوم را r فرض می‌کنیم و داریم:

$$V_1 < V_r < V_r \Rightarrow 60\pi < \pi r^2 \times 5 < 300\pi \xrightarrow{\div 5\pi} 12 < r^2 < 60$$

$$\sqrt{12} < r < \sqrt{60} \Rightarrow 3,4 < r < 7,7$$



اعداد طبیعی این بازه برابرند با $\{4, 5, 6, 7\}$ یعنی ۴ تا.

۱۸ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}, |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - 9a + 19} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} &= \sqrt{a^2 - 9a + 19} + \sqrt{(a - 3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 9a + 19} + |a - 3| \stackrel{\substack{3 < a < 4 \\ a - 3 > 0}}{=} \sqrt{a^2 - 9a + 19} + a - 3 \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 16} = \sqrt{(a - 4)^2} = |a - 4| \stackrel{\substack{3 < a < 4 \\ a - 4 < 0}}{=} -(a - 4) = 4 - a \end{aligned}$$

۱۹ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{14 - \sqrt{52}} - \sqrt{14 + \sqrt{52}} = \sqrt{14 - 2\sqrt{13}} - \sqrt{14 + 2\sqrt{13}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{13} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13} + 1)^2} = \underbrace{|\sqrt{13} - 1|}_{+} - \underbrace{|\sqrt{13} + 1|}_{+} \\ &= \sqrt{13} - 1 - \sqrt{13} - 1 = -2 \end{aligned}$$

۲۰ - گزینه ۳

می‌دانیم: هر عدد مثبت دو ریشه m زوج به فرم $\pm \sqrt[n]{a}$ و یک ریشه m فرد به صورت $\sqrt[n]{a}$ دارد.
 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$



$$\sqrt[5]{x} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{توان 5}} x = \frac{3^5}{2^5} \xrightarrow{\text{ریشه چهارم}} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{\frac{3^5}{2^5}} = \sqrt[4]{\frac{3^4 \times 3}{2^4 \times 2}} = \frac{3}{2} \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{y} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{توان 3}} y = \frac{4^3}{3^3} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} \sqrt{y} = \sqrt{\frac{4^3}{3^3}} = \sqrt{\frac{4^2 \times 4}{3^2 \times 3}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} \times \frac{4}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

۲۱ - گزینه ۱

$$(512)^{-\frac{1}{9}} = (2^9)^{-\frac{1}{9}} = 2^{9 \times -\frac{1}{9}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{625}{256}\right)^{\frac{1}{256}} = \left(\frac{625}{256}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{5^4}{4^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{5}{4}$$

بنابراین:

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{2+9}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{11}{5} = 2,2$$

۲۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^n \sqrt{b}} = \sqrt[n]{a^n b}$, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, $\frac{a^m}{a^n} = a^m - a^n$, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

با ساده‌سازی طرفین تساوی داریم:

$$\left(\frac{4^a}{2\sqrt{8}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^a}{2^2\sqrt{2^3}}\right)^2 = \left(\frac{2^{2a}}{2^2\sqrt{2^3}}\right)^2 = (2^{2a-2}\sqrt{2})^2 = 2^{4a-4}\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{288} = 2\sqrt{144 \times 2} = 2 \times 12\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{4^a}{2\sqrt{8}}\right)^2 = 2\sqrt{288} \Rightarrow 2^{4a-4}\sqrt{2} = 2 \times 12\sqrt{2} \Rightarrow 4a - 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow 4a = 16\sqrt{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

۲۳ - گزینه ۳

$$(\lambda + 2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} = (5 + 3 + 2\sqrt{5}\sqrt{3})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} = ((\sqrt{5} + \sqrt{3})^2)^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{\sqrt{5}+2}$$

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\sqrt{5}+2}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{5}-2} \times (\lambda + 2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} &= 2^{\sqrt{5}-2} \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{\sqrt{5}+2} \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\sqrt{5}+2} \\ &= 2^{\sqrt{5}-2} \times ((\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}))^{\sqrt{5}+2} = 2^{\sqrt{5}-2} \times (5 - 3)^{\sqrt{5}+2} = 2^{\sqrt{5}-2} \times 2^{\sqrt{5}+2} \\ &= 2^{\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2} = 2^{2\sqrt{5}} = (2^2)^{\sqrt{5}} = 4^{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

۲۴ - گزینه ۱ ابتدا کسرهای دوم و سوم سمت راست تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}+2}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1} = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\text{پس: } \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{3}{x-1} + \frac{2\sqrt{x}+2}{x-1} + \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$



$$= \frac{3 + 2\sqrt{x} + 2 + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1}{x-1} = \frac{6 + 3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x}}{x-1} = \frac{6 + 3\sqrt{x} + A}{x-1} \Rightarrow A = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x}$$

۲۵ - گزینه ۴

$$\sqrt{y - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 3 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}|$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{y + 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}|$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

بنابراین:

$$\sqrt{y - 4\sqrt{3}} - 2\sqrt{y + 4\sqrt{3}} + \sqrt{27} = 2 - \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -2$$

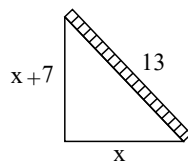
۲۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

با نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث روبرو داریم:



$$13^2 = x^2 + (x+7)^2$$

$$169 = x^2 + 49 + x^2 + 14x \Rightarrow 2x^2 + 14x - 120 \Rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 & \text{غ ق ق} \\ x = 5 \Rightarrow x+7 = 5+7 = 12 \end{cases}$$

۲۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: $(x+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

عددها را به ترتیب $x+10, x+5, x$ فرض می‌کنیم و داریم:

$$x^2 + (x+5)^2 + (x+10)^2 = 1925$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 20x + 100 = 1925 \Rightarrow 3x^2 + 30x - 1800 = 0$$

$$x^2 + 10x - 600 = 0 \Rightarrow (x+30)(x-20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+30 = 0 \Rightarrow x = -30 \\ x-20 = 0 \Rightarrow x = 20 \end{cases}$$

با توجه به مثبت بودن گزینه‌ها، $x = 20$ را انتخاب می‌کنیم و مجموع ۳ عدد به صورت زیر است:

$$x + x + 5 + x + 10 = 3x + 15 \stackrel{x=20}{=} 60 + 15 = 75$$

۲۸ - گزینه ۴

اعداد بین صفر و یک همچنین اعداد کوچکتر از منفی یک، هرچه به توان بزرگتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

$$\sqrt[3]{a} > a \xrightarrow{\text{توان ۳}} a > a^3 \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \xrightarrow{\text{توان ۴}} a^4 < 1 \xrightarrow{\times a} a^5 < a \\ \text{یا} \\ a < -1 \xrightarrow{\text{توان ۴}} a^4 > 1 \xrightarrow[\text{a < 0}]{\times a} a^5 < a \end{cases}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) $\sqrt[3]{a} > a : a = \frac{1}{y} \Rightarrow -1 < a < 0$ نادرست



۲) $\sqrt[3]{a} > a : a = \left(\frac{1}{10}\right)^{15} \Rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^{15}} > \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^{15}} \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^5 > \left(\frac{1}{10}\right)^3$ نادرست

۳) $\sqrt[3]{a} > a : a = -2 \Rightarrow (-2)^3 < -2 \Rightarrow 16 < -2$ نادرست

۲۹ - گزینه ۴

می‌دانیم: زوج $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ ، فرد $\sqrt[n]{x^n} = x$

داریم:

$$\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt{x^6} + \sqrt[5]{x^5} = |x| + x + |x| + x = 2x + 2|x| \xrightarrow{-1 < x < 0} 2x - 2x = 0$$

۳۰ - گزینه ۳

$$\frac{\sqrt[4]{6} \sqrt[5]{5} \sqrt[3]{4^3} \times \sqrt[6]{5} \sqrt[4]{9^6}}{\sqrt[3]{3} \sqrt[5]{3^3}} = \frac{120 \sqrt{(2^2)^3} \times 120 \sqrt{(3^2)^6}}{60 \sqrt{(2^5)^3}} = \frac{120 \sqrt{2^6} \times 120 \sqrt{3^{12}}}{60 \sqrt{2^{15}}} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^1}$$

$$= \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^1} \times \frac{1}{3^1} = \frac{1-5}{2^2} \times \frac{1}{3^1} = \frac{-4}{2^2} \times \frac{1}{3^1} = \frac{-2}{10} \times \frac{1}{3^1} = \frac{10 \sqrt{3}}{10 \sqrt{2^2}} = 10 \sqrt{\frac{3}{4}}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۳	۱۱ - ۳	۱۶ - ۲	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۴	۷ - ۱	۱۲ - ۴	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۳
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۴	۱۸ - ۳	۲۳ - ۳	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۱	۱۴ - ۴	۱۹ - ۲	۲۴ - ۱	۲۹ - ۴
۵ - ۲	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۴	۳۰ - ۳