



علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت های جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- چه تعداد از عبارت های زیر نادرست هستند؟

الف) $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[4]{0,0081}$

ب) $(\sqrt[4]{-2})^4 = \sqrt[4]{(-2)^4}$

پ) $\sqrt[4]{(-5)^4} = -5$

ت) $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[4]{(-3)^4} = 9$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۲- کدام گزینه درست نیست؟

(۱) هر عدد حقیقی دارای دو ریشه چهارم است که قرینه یکدیگرند.

(۲) هر عدد حقیقی دارای یک ریشه پنجم است.

(۳) هر عدد حقیقی دارای یک ریشه سوم است.

(۴) اعداد ۳ و -۳ ریشه های چهارم ۸۱ هستند.

۳- کدام عدد بین دو عدد صحیح ۷ و ۸ قرار می گیرند؟

(۱) $\sqrt[3]{340}$

(۲) $\sqrt[3]{504}$

(۳) $\sqrt[4]{2100}$

(۴) $\sqrt[3]{625}$



۴- عبارت $2x^2 + 3x - 2$ مضرب کدام یک از عبارت های زیر است؟

الف) $2x + 1$ ب) $x - 1$ پ) $2x - 1$ ت) $x + 2$

- ① پ و ت
- ② پ و ب
- ③ الف و ت
- ④ الف و پ

۵- اگر $0 < a < 1 < b$ باشد، آن گاه کدام گزینه درست نیست؟

- ① $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$
- ② $\sqrt[3]{b} < \sqrt{b}$
- ③ $\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{b}$
- ④ $b^2 < a^4$

۶- اگر $a > 0$ و نامساوی $\sqrt[4]{a} > \sqrt[3]{a}$ برقرار باشد، کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- ① ریشه چهارم مثبت a از ریشه پنجم a کوچک تر است.
- ② توان چهارم a از توان سوم a بزرگ تر است.
- ③ $0 < a < 1$
- ④ عدد a به توان هر عدد گویایی برسد، مثبت خواهد بود.

۷- حاصل عبارت روبه رو کدام است؟

$$\frac{\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 10^{-\frac{4}{3}}}{(\sqrt{20})^{\frac{2}{3}} \times (25)^{-\frac{2}{3}}}$$

- ① $\frac{5^{\frac{7}{12}}}{2}$
- ② $\frac{5^{\frac{7}{12}}}{2^{\frac{11}{12}}}$
- ③ $\frac{5^{\frac{5}{12}}}{2}$
- ④ $\frac{5^{\frac{5}{12}}}{2^{\frac{11}{12}}}$



۸- اگر a و b منفی و n زوج باشد، حاصل عبارت $\sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}} \times \sqrt[n]{(ab)^{2n}}$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{R}$)

- ① b^n
- ② $-ab^n$
- ③ $\frac{b^n}{a}$
- ④ $-b^n$

۹- اگر $a = 32$ ، $r = \frac{1}{2}$ و $s = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار عددی کدام یک از گزینه‌های زیر از سایر گزینه‌ها بزرگ‌تر است؟

- ① $\frac{a^r}{a^{s-r}}$
- ② a^{r-s}
- ③ $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{r}}$
- ④ $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{s}}$
- ⑤ $((\sqrt{a})^r)^s$

۱۰- چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ ($a, b \geq 0$ ، $a, b \in \mathbb{R}$ ، $n \in \mathbb{N}$)

- الف) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- ب) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
- ج) $a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$
- د) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

- ① ۱
- ② ۲
- ③ ۳
- ④ ۴

۱۱- کدام یک از عبارات‌های زیر همواره درست است؟ ($a, b \in \mathbb{R}$)

- ① برای هر دو عدد a و b رابطه $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ برقرار است.
- ② $\sqrt[m]{m}$ برای نمایش ریشه‌های دوم عدد m به کار می‌رود. ($m > 0$)
- ③ b ریشه n ام عدد a است اگر $b^n = a$ ($n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$)
- ④ برای هر a داریم: $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ (m عدد صحیح و k عدد طبیعی است).



۱۲- اگر $a - b = 3$ ، $ab = \frac{3}{4}$ و a و b هر دو مثبت باشند، آنگاه مقدار $(a + b)^{-3}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲) $24\sqrt{3}$
- ۳ (۳) ۷۲
- ۴ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{72}$

۱۳- اگر $x = 1 + \sqrt{3}$ و $y = 2 - \sqrt{3}$ باشد، حاصل $x^{-2} + \frac{y^{-1}}{2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۲
- ۲ (۲) ۰
- ۳ (۳) ۲
- ۴ (۴) ۴

۱۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (الف) اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه $a^{21} > a^{17}$
- (ب) ریشه چهارم مثبت اعداد مثبت از ریشه دوم مثبت شان کوچک تر است.
- (ج) $\sqrt[3]{-0.1} < -\sqrt[4]{0.1}$
- (د) اگر $a^6 > a^{10}$ باشد، آنگاه $a^5 > a^{11}$ است.

- ۱ (۱) ۰
- ۲ (۲) ۱
- ۳ (۳) ۲
- ۴ (۴) ۳

۱۵- در معادله $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}^{n-9} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{10}}}$ ، n کدام است؟ ($n > 1$)

- ۱ (۱) ۴
- ۲ (۲) ۸
- ۳ (۳) ۲
- ۴ (۴) ۳



۱۶- حاصل عبارت $(1 + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{2}})$ کدام است؟

- ① $\sqrt{2}$
- ② ۱
- ③ $\sqrt[24]{2^7}$
- ④ $\sqrt[12]{2^7}$

۱۷- حاصل عبارت $(\sqrt[3]{2}\sqrt{2} \times \sqrt{2\sqrt[3]{2}})(\sqrt[3]{2} - \sqrt{2} \times \sqrt[6]{6 + 4\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{4})$ کدام است؟

- ① $2\sqrt[6]{2}$
- ② $4\sqrt[6]{2}$
- ③ $8\sqrt[6]{2}$
- ④ $16\sqrt[6]{2}$

۱۸- حاصل عبارت $(x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$ همواره کدام است؟

- ① صفر
- ② -۲
- ③ ۲
- ④ $2x^3$

۱۹- در تساوی $\frac{5}{x-1} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + A}{x-1}$ ، عبارت A کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند).

- ① $3\sqrt{x} + 8$
- ② $4\sqrt{x} + 9$
- ③ $2\sqrt{x} + 9$
- ④ $2\sqrt{x} + 8$



۲۰- حاصل عبارت تعریف شده $\sqrt[n-3]{\frac{m}{\sqrt[n-2]{m}}}$ کدام است؟

- ① $\sqrt[n]{m}$
- ② m
- ③ $\sqrt[n-2]{m}$
- ④ m^{n-3}

۲۱- در تجزیه $b^5 + b^3a^2 + 27a^3b^2 + 27a^5$ کدام عامل وجود دارد؟

- ① $a^2 - b^2$
- ② $3a - b$
- ③ $3a + b$
- ④ $a^2 + b$

۲۲- حاصل $(4^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}})(4^{-\frac{1}{4}} + (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}})$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{16}$
- ② $\frac{31}{16}$
- ③ $\frac{1}{8}$
- ④ $\frac{9}{16}$

۲۳- حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[5]{-128}} + \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[4]{-\frac{1}{32}}} + \sqrt[3]{64}$ کدام است؟

- ① -۲
- ② ۲
- ③ -۳
- ④ ۶



۲۴- اگر ریشه دوم عددی $\sqrt[2]{10}$ باشد، ریشه سوم آن بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

- ۱) ۲ و ۱
- ۲) ۳ و ۲
- ۳) ۴ و ۳
- ۴) ۶ و ۵

۲۵- اگر $0 < a < b < 1$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- ۱) $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$
- ۲) $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$
- ۳) $\sqrt[3]{b} < \sqrt[3]{a}$
- ۴) $\sqrt[3]{b} > \sqrt[3]{a}$

۲۶- شرط برقراری تساوی $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ کدام است؟

- ۱) این تساوی همواره برقرار است.
- ۲) تنها به ازای مقادیر مثبت a ، m و k برقرار است.
- ۳) اگر a نامنفی باشد، باید k زوج باشد. برای بقیه حالت‌ها برقرار است.
- ۴) اگر k زوج باشد باید a نامنفی باشد. برای بقیه حالت‌ها برقرار است.

۲۷- کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < 2\sqrt[6]{2}$
- ۲) $\sqrt[3]{11} < 2\sqrt[6]{2} < \sqrt{5}$
- ۳) $\sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < 2\sqrt[6]{2}$
- ۴) $\sqrt{5} < 2\sqrt[6]{2} < \sqrt[3]{11}$

۲۸- اگر $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{k-2}}$ باشد، حاصل $\sqrt{(k-2)(8k+1)}$ کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند).

- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶



۲۹- چه تعداد از تساوی‌های زیر همواره برقرار است؟

(الف) $\sqrt[4]{a^{12}} = a^3$ (ب) $\sqrt[32]{a^{16}} = \sqrt{a}$ (ج) $\sqrt[15]{a^3} = \sqrt[5]{a}$ (د) $\sqrt[9]{-x^3} = -\sqrt[3]{x}$

- ① صفر
- ② ۱
- ③ ۲
- ④ ۳

۳۰- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{x^5} \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x} \sqrt{x}}$ همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند.)

- ① $\sqrt[10]{x^3}$
- ② $\frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}$
- ③ $\sqrt[5]{x^3}$
- ④ $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج} \\ a & n \text{ فرد} \end{cases}$

الف) درست: $\begin{cases} \sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{(0,3)^3} = 0,3 \\ \sqrt[4]{0,0081} = \sqrt[4]{(0,3)^4} = 0,3 \end{cases}$

ب) نادرست: $\begin{cases} \text{تعریف نشده: } (\sqrt[4]{-2})^4 \\ \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2 \end{cases}$

پ) نادرست: $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

ت) درست: $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[3]{(-3)^4} = \sqrt[3]{(-3)(-9) \times |-3|} = \sqrt[3]{27 \times 3} = \sqrt[3]{3^3} \times 3 = 3 \times 3 = 9$

۲ - گزینه ۱ می‌دانیم: هر عدد مثبت، دارای دو ریشه چهارم است که قرینه یکدیگرند.

سایر گزینه‌ها درست هستند.

۳ - گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست: $216 < 340 < 343 \Rightarrow 6^3 < 340 < 7^3 \Rightarrow 6 < \sqrt[3]{340} < 7$

۲) درست: $343 < 504 < 512 \Rightarrow 7^3 < 504 < 8^3 \Rightarrow 7 < \sqrt[3]{504} < 8$

۳) نادرست: $1296 < 2100 < 2401 \Rightarrow 6^4 < 2100 < 7^4 \Rightarrow 6 < \sqrt[4]{2100} < 7$

۴) نادرست: $512 < 625 < 729 \Rightarrow 8^3 < 625 < 9^3 \Rightarrow 8 < \sqrt[3]{625} < 9$

۴ - گزینه ۱

$$2x^2 + 3x - 2 = (x^2 + 2x) + (x^2 + x - 2) = x(x + 2) + (x + 2)(x - 1) = (x + 2)(x + x - 1) = (x + 2)(2x - 1)$$

۵ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

۱) درست: $0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$

۲) درست: $b > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{b} < \sqrt{b}$

۳) درست: $\begin{cases} 0 < a < 1 \rightarrow \sqrt[3]{a} < 1 \\ b > 1 \rightarrow \sqrt[4]{b} > 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{b}$

۴) نادرست: $\begin{cases} 0 < a < 1 \Rightarrow a^4 < 1 \\ b > 1 \Rightarrow b^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow a^4 < b^2$

۶ - گزینه ۲

$$\begin{cases} \sqrt[4]{a} > \sqrt[3]{a} \Rightarrow 0 < a < 1 \text{ (گزینه ۳ درست)} \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 < a^3 \text{ (گزینه ۲ نادرست)} \\ \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} \text{ (گزینه ۱ درست)} \end{cases}$$

$a > 0 \Rightarrow a^{b \in \mathbb{Q}} > 0$ (گزینه ۴ درست)

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

۷ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\frac{\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} \times 10^{-\frac{4}{3}}}{\left(\sqrt{20}\right)^{\frac{2}{3}} \times (25)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\left(\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} \times (2 \times 5)^{-\frac{4}{3}}}{\left(\left(2^2 \times 5\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{-\frac{2}{3}}}$$



$$= \frac{2 \times 5^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{-4}{3}} \times 5^{\frac{-4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{-4}{3}}} = \frac{2^{-1} \times 5^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{-1} \times 2^{\frac{-2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{-1}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{5^{12}} = \frac{5}{2}$$

۸ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^r} = |a| \quad a > 0, \quad n \text{ زوج}$

$$\sqrt[n]{a^r} \times \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^{rn}} \times \sqrt[n]{(ab)^{rn}} = |a| \times \left(\frac{b}{a}\right)^r \times |ab| \frac{a < 0}{b < 0} - a \times \frac{b^r}{a^r} \times ab = -b^r$$

۹ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

۱) $\frac{a^r}{a^{s-r}} = a^{r-(s-r)} = a^{r-s+r} = a^{2r-s} = 32^{2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 32^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5$

۲) $a^{r-s} = 32^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 32^0 = 1$

۳) $\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{s}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} = (a^{-1})^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} = (32^{-1})^{2-3} = (32^{-1})^{-1} = 32 = 2^5$

۴) $((\sqrt{a})^r)^s = (\sqrt{a})^{rs} = a^{\frac{rs}{2}} = 32^{\frac{6}{2}} = 32^3 = 2^{12}$

۱۰ - گزینه ۳ بررسی گزاره‌ها:

الف) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ درست (الف)

ب) $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$ (مثال: $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5 \neq \sqrt{13}$) نادرست (ب)

ج) $a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ درست (ج)

د) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ درست (د)

۱۱ - گزینه ۳ بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست: برای $a, b > 0$ رابطه $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ برقرار است.

ب) نادرست: \sqrt{m} برای نمایش ریشه دوم مثبت m به کار می‌رود. درست (ج)

د) نادرست: برای هر عدد a داریم: $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ (m عدد صحیح، k عدد طبیعی و اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

۱۲ - گزینه ۴ می‌دانیم: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9 + 4 \times \frac{3}{4} = 12 \xrightarrow{a,b>0} a+b = \sqrt{12}$$

$$(a+b)^{-2} = (\sqrt{12})^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2 = \frac{1}{12 \times \sqrt{12}} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{12 \times 12} = \frac{2\sqrt{3}}{12 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{6 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{72}$$

۱۳ - گزینه ۳ می‌دانیم: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

$$x^{-2} + \frac{y^{-1}}{2} = \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} + \frac{1}{2(2-\sqrt{3})} = \frac{1}{1+2\sqrt{3}+3} + \frac{1}{4-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{4+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4-2\sqrt{3}} \stackrel{(I)}{=} \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$(I) \begin{cases} \frac{1}{4+2\sqrt{3}} \times \frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{16-12} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4-2\sqrt{3}} \times \frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{16-12} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

۱۴ - گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

الف) درست

ب) نادرست: مثال نقض: $0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt[4]{a} > \sqrt[3]{a}$

توان‌های گویا و عبارت‌های جذری



ج) نادرست: $\sqrt[3]{-0,1} > -\sqrt[4]{0,1}$

د) نادرست: مثال نقض: $-1 < a < 0 \Rightarrow a^6 > a^{10} \Rightarrow a^5 < a^{11}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

۱۵ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{3}}\right)^{n-9} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{3^{10}}} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-9}{n}} = \frac{10}{3^{5n}} \Rightarrow 3^{\frac{9-n}{n}} = 3^{\frac{5n}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{9-n}{n} = \frac{5n}{n} \Rightarrow 9n - n^2 = 5n \Rightarrow n^2 - 4n = 0 \Rightarrow (n-4)(n) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=4 \end{cases} \xrightarrow{n>1} n=4$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

۱۶ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$(1 + \sqrt{2}) (\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}) (\sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt{2}}}) = (1 + \sqrt{2}) (\sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1}) (\sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt{2}})$$

$$= (1 + \sqrt{2}) (\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}) (\sqrt{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}) = (1 + \sqrt{2}) (1 - \sqrt{2}) (\sqrt{\frac{2}{2}})$$

$$(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{\sqrt{2}^2}) = (2 - 1)(\sqrt{2}^2) = \sqrt{2}^2$$

۱۷ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$\left(\sqrt[2]{\sqrt{2}\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) \left(\sqrt[2]{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\sqrt[2]{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}\right) \left(\sqrt[2]{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\sqrt[2]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \times \sqrt[2]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\right) \left(\sqrt[2]{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(\sqrt[2]{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\sqrt[2]{(\sqrt{2}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{2})} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\sqrt[2]{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \times \sqrt[2]{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\sqrt[2]{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2^1 = 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

$$x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

۱۸ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^3 + 1) - (x^3 - 1) = x^3 + 1 - x^3 + 1 = 2$$

۱۹ - گزینه ۲ ابتدا عبارت‌ها را گویا می‌کنیم:

$$\frac{3}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1} = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x-1}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{5}{x-1} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{5 + 3\sqrt{x} + 3 + 1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x-1}$$

$$= \frac{9 + 4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + A}{x-1} \Rightarrow A = 4\sqrt{x} + 9$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

۲۰ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$n^{-r} \sqrt[n-r]{\frac{m}{n^{-r}\sqrt{m}}} = n^{-r} \sqrt[n-r]{\frac{m}{m^{\frac{1}{n-r}}}} = n^{-r} \sqrt[n-r]{m^{\frac{1-\frac{1}{n-r}}{n-r}}} = n^{-r} \sqrt[n-r]{m^{\frac{n-r-1}{(n-r)^2}}} = \left(m^{\frac{n-r}{n-r}}\right)^{\frac{1}{n-r}} = m^{\frac{1}{n-r}} = n^{-r} \sqrt[n-r]{m}$$



۲۱ - گزینه ۳

$$27a^5 + 27a^r b^r + b^r a^r + b^5 = (3a)^r (a^r + b^r) + b^r (a^r + b^r)$$

$$= (a^r + b^r)((3a)^r + b^r) = (a^r + b^r)(3a + b)(9a^r - 3ab + b^r)$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^r - b^r = (a - b)(a + b)$$

۲۲ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\left(4^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right) \left(4^{-\frac{1}{4}} + (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$$

$$= \left(4^{-0.25}\right)^2 - \left((2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)^2 = \left(4^{-\frac{1}{4}}\right)^2 - (2\sqrt{2})^{-\frac{8}{3}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{8}{3}}$$

$$= 2^{-1} - 2^{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{8-1}{16} = \frac{7}{16}$$

۲۳ - گزینه ۴

$$\begin{cases} \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5 \\ \sqrt{-128} = \sqrt[4]{(-2)^4} = -2 \\ \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \\ \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = -\frac{1}{2} \\ \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{5}{-2} + \frac{3 \times -3}{4 \times \frac{1}{2}} + 4 = \frac{-5}{2} + \frac{9}{2} + 4 = 6$$

۲۴ - گزینه ۳

$$(2\sqrt{10})^2 = 40$$

$$27 < 40 < 64 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{40} < 4$$

۲۵ - گزینه ۴ برای این که مسئله قابل فهم تر باشد، طرفین نامساوی‌ها را به توان مضرب مشترک ۵ و ۶ (یعنی ۳۰) می‌رسانیم:

۱. ممکن است برقرار نباشد. $a^5 > b^6 \xrightarrow{\text{به توان } 30} \sqrt[6]{a} > \sqrt[5]{b}$ (گزینه ۱)
۲. ممکن است برقرار نباشد. $a^5 < b^6 \xrightarrow{\text{به توان } 30} \sqrt[6]{a} < \sqrt[5]{b}$ (گزینه ۲)
۳. همواره غلط است. $b^5 < a^6 \xrightarrow{\text{به توان } 30} \sqrt[6]{b} < \sqrt[5]{a}$ (گزینه ۳)
۴. همواره صحیح است. $b^5 > a^6 \xrightarrow{\text{به توان } 30} \sqrt[6]{b} > \sqrt[5]{a}$ (گزینه ۴)

توجه کنید که $1 < a < b < 10$ است پس نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$a^6 < b^6, a^5 < b^5, a^6 < a^5, b^6 < b^5$$

۲۶ - گزینه ۴ در تساوی $(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m}$ ؛ اگر k زوج بود؛ باید a نامنفی باشد و در سایر حالات همواره برقرار است.

۲۷ - گزینه ۱

$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{128} \\ \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{121} \\ \sqrt{5} = \sqrt[3]{125} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{121} < \sqrt[3]{125} < \sqrt[3]{128} \Rightarrow \sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < 2\sqrt[3]{2}$$

۲۸ - گزینه ۳

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{k-2}}}{\sqrt[n]{a^k}} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[n]{a^r}} = \frac{\sqrt[n]{a^{k-2}}}{\sqrt[n]{a^k}} \Rightarrow k - 2 = 1 \Rightarrow k = 3$$

حاصل عبارت برابر است با:

$$\sqrt{(k-2)(8k+1)} \stackrel{k=3}{=} \sqrt{1 \times 25} = \sqrt{25} = 5$$

۲۹ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

- (الف) نادرست: $\sqrt[4]{a^{12}} = |a^3|$
- (ب) نادرست: $\sqrt[32]{a^{16}} = \sqrt{|a|}$
- (ج) درست



$$\frac{\sqrt{x^5 \sqrt{x}}}{\sqrt[5]{x \sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x \times x^{\frac{1}{5}}}}{\sqrt[5]{x \times x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{x^{\frac{6}{5}}}}{\sqrt[5]{x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{3}{10}}} = x^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{x^3}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۲	۱۱ - ۳	۱۶ - ۳	۲۱ - ۳	۲۶ - ۴
۲ - ۱	۷ - ۳	۱۲ - ۴	۱۷ - ۲	۲۲ - ۱	۲۷ - ۱
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۳	۱۸ - ۳	۲۳ - ۴	۲۸ - ۳
۴ - ۱	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۳	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۲	۲۰ - ۳	۲۵ - ۴	۳۰ - ۱