



علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت های جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ - کدام گزینه درست است؟

- ① $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ را همواره می توان به صورت $\sqrt[n]{ab}$ نوشت.
- ② $\sqrt[n]{a^m}$ را همواره می توان به صورت $(\sqrt[n]{a})^m$ نوشت.
- ③ $\sqrt[n]{ab}$ را همواره می توان به صورت $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ نوشت.
- ④ $\sqrt[n]{x^4}$ برابر است با $\pm x$.

۲ - حاصل عبارت $A = (x - \sqrt[3]{2})^2 (x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})^2$ به ازای $x = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 2}$ کدام است؟

- ① $\sqrt{2} + 2$
- ② ۴
- ③ $\sqrt{2} + 4$
- ④ ۲

۳ - اگر $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 27$ ، مقدار $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$ کدام است؟

- ① ۳
- ② ۹
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{9}$

۴ - حاصل عبارت $\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a+b}$ کدام است؟

- ① $a+b$
- ② $a^2 + ab + b^2$
- ③ $a^2 + b^2$
- ④ $(a+b)^2$



۵- اگر $x^2 + 3x + 1 = 0$ حاصل عبارت $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

- ۱) ۲۷-
- ۲) ۲۷
- ۳) ۱۸
- ۴) ۱۸-

۶- اگر $7^x = \sqrt{3}$ و $3^y = \sqrt{7}$ باشد، مقدار xy کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$
- ۲) $\frac{1}{4}$
- ۳) ۴
- ۴) ۳

۷- حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{\frac{-\sqrt[6]{4}}{\sqrt[5]{-2}}} \times (0,5)^{-3}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{137}{2 \cdot 45}$
- ۲) $\frac{137}{-2 \cdot 45}$
- ۳) $\frac{133}{2 \cdot 15}$
- ۴) $\frac{133}{-2 \cdot 15}$

۸- حاصل عبارت $\frac{3\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}})}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$
- ۲) $\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$
- ۳) ۱
- ۴) $\sqrt{3}$



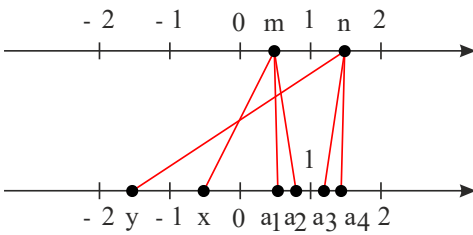
۹- اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

- ۱) ۱۸
- ۲) ۲۷
- ۳) ۹
- ۴) ۵۴

۱۰- عدد $2 - \sqrt{15}$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. مجموع این دو عدد صحیح کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) -۳
- ۳) ۱
- ۴) -۵

۱۱- در شکل زیر دو نقطه از محور بالا را به ریشه‌های دوم و سوم هر کدام از نقاط وصل می‌کنیم. مقادیر x و y به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



- ۱) $-a_3, -a_2$
- ۲) $-a_4, -a_2$
- ۳) $-a_3, -a_1$
- ۴) $-a_4, -a_1$

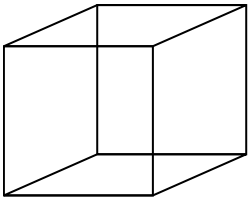
۱۲- اگر x برابر ریشه سوم ۶۴، برابر با ریشه دوم ۸۱ باشد، ریشه دوم x کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) $\frac{4}{3}$
- ۲) ۱٫۵
- ۳) ۲
- ۴) ۲٫۲۵



۱۳- اگر $0 < a < 1$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- ① $0 < a^2 < a < \sqrt[3]{a} < 1$
- ② $0 < \sqrt[3]{a} < a < a^2 < 1$
- ③ $0 < a < \sqrt[3]{a} < a^2 < 1$
- ④ $0 < a^2 < \sqrt[3]{a} < a < 1$



۱۴- می‌خواهیم حجم مکعب مقابل بیشتر از ۱۲۵ و کمتر از ۷۲۹ باشد، بیشترین مقدار صحیح ضلع مکعب کدام است؟

- ① ۹
- ② ۵
- ③ ۸
- ④ ۷

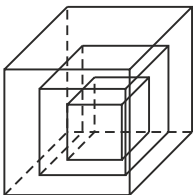
۱۵- اگر n عددی طبیعی باشد، به طوری که $n + 1 < \sqrt[4]{357} < n$ ، آنگاه n کدام است؟

- ① ۳
- ② ۴
- ③ ۵
- ④ ۶

۱۶- اگر x عددی منفی باشد، ساده‌شده کسر $\frac{\sqrt[5]{x^5} \times \sqrt[4]{x^8}}{\sqrt[3]{x^3}}$ کدام است؟

- ① ۱
- ② $-x$
- ③ x
- ④ -1

۱۷- مطابق شکل، سه مکعب تودرتو داریم. اگر حجم بزرگ‌ترین مکعب ۱۲۵ و حجم کوچک‌ترین مکعب ۶۴ باشد، طول ضلع مکعب متوسط در کدام بازه قرار دارد؟



- ① (۲, ۵), (۳, ۵)
- ② (۳, ۴)
- ③ (۴, ۵)
- ④ (۳, ۵), (۴, ۵)



۱۸- تساوی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ به ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟

- ① $n \cdot a > 0$ زوج
- ② $n \cdot a < 0$ زوج
- ③ $n \cdot a > 0$ فرد
- ④ $n \cdot a < 0$ فرد

۱۹- حاصل $(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$ کدام است؟

- ① $-\sqrt{2}$
- ② -16
- ③ $\frac{1}{16}$
- ④ $\sqrt{2}$

۲۰- حاصل $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ کدام است؟

- ① $\sqrt[6]{6}$
- ② $6\sqrt[6]{6}$
- ③ 6
- ④ $\frac{6}{\sqrt[6]{6}}$

۲۱- ساده شده کسر $A = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt[4]{2}}$ کدام است؟

- ① $1 + \sqrt{2}$
- ② $\sqrt[4]{2} - 1$
- ③ $1 + \sqrt[4]{2}$
- ④ $1 - \sqrt[4]{2}$



۲۲- عبارت $x\sqrt{-x}$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

- ① $-\sqrt{-x^3}$
- ② $\sqrt{-x^3}$
- ③ $-\sqrt{x^3}$
- ④ $|x|\sqrt{-x}$

۲۳- اگر $0 < b < 1$ باشد، بین ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم b کدام رابطه می‌تواند برقرار باشد؟

- ① ریشه پنجم b > ریشه چهارم b > ریشه سوم b
- ② ریشه سوم b > ریشه پنجم b > ریشه چهارم b
- ③ ریشه چهارم b > ریشه سوم b > ریشه پنجم b
- ④ ریشه پنجم b > ریشه سوم b > ریشه چهارم b

۲۴- حاصل کسر $A = \frac{81^{27^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt[3]{81^8}}$ کدام گزینه است؟

- ① $\sqrt{3}$
- ② $\sqrt[4]{27}$
- ③ 81^3
- ④ $3^3\sqrt{3}$

۲۵- اگر $a, b \geq 0$ و $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ، کدام گزینه درست است؟

- ① $ab = 1$
- ② $a + b = 1$
- ③ $a = 0$ یا $b = 0$
- ④ $0 < a, b < 1$



۲۶- در تجزیه عبارت $x^3 - 2xy + x^2y - 2y^2$ کدام عامل وجود دارد؟

- ① $x^2 + 2y$
- ② $x - y$
- ③ $x^2 - 2y$
- ④ $2x + y^2$

۲۷- حاصل عبارت $A = x\sqrt{x}\sqrt[5]{x^2}$ به ازای $x = \sqrt[13]{2^{15}}$ کدام است؟

- ① ۱
- ② ۲
- ③ ۸
- ④ ۴

۲۸- مقدار $A = \frac{99^3 - 1}{99^2 + 100} \times \frac{99^3 + 1}{99^2 - 98}$ کدام است؟

- ① ۹۹۰۰
- ② ۹۸۰۰
- ③ 99^2
- ④ 98^2

۲۹- اگر $0 < x < y < 1$ ، کدام رابطه الزاماً برقرار نیست؟

- ① $\sqrt{x} < y^2$
- ② $x^2 < \sqrt[3]{y}$
- ③ $\sqrt{x} < \sqrt{y}$
- ④ $x^3 < \sqrt[5]{y}$

۳۰- چند عدد صحیح x وجود دارد به طوری که $-2 \leq \sqrt{x} \leq 7$ باشد؟

- ① ۴۸
- ② ۴۹
- ③ ۵۰
- ④ ۵۱



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱، از خواص رادیکال‌ها است. دقت کنید که گزینه ۳، (برعکس گزینه ۱) صحیح نیست؛ مانند:

$$\sqrt[4]{(-3) \times (-4)} \neq \sqrt[4]{-3} \times \sqrt[4]{-4}$$

۲ - گزینه ۴

$$A = \left((x - \sqrt[3]{2})(x^3 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) \right)^3 = (x^3 - 2)^3$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} + 2} \Rightarrow A = \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} + 2} \right)^3 - 2 \right)^3 = (\sqrt[3]{2} + 2 - 2)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 = 2$$

۳ - گزینه ۴

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1}) \stackrel{\text{مزدوج}}{=} x - 2 - (x + 1)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(x-2)(x+1)} = -3 \Rightarrow \sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \frac{1}{9}$$

۴ - گزینه ۳

$$\frac{a^r + a^r b + ab^r + b^r}{a+b} = \frac{(a^r + a^r b) + (ab^r + b^r)}{a+b} = \frac{a^r(a+b) + b^r(a+b)}{a+b}$$

$$= \frac{(a+b)(a^r + b^r)}{a+b} = a^r + b^r$$

$$a^r + b^r = (a+b)^r - 3ab(a+b) \quad \text{گزینه ۴}$$

$$A = x^r + \frac{1}{x^r} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^r - \underbrace{3 \times x \times \frac{1}{x}}_1 \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^r - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

طرفین معادله‌ی داده شده را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$x^r + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\div x} \frac{x^r}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x + 3 + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = -3$$

این مقدار را در A جایگزین می‌کنیم:

$$A = (-3)^r - 3 \times (-3) = -27 + 9 = -18$$

۶ - گزینه ۲

$$3^{xy} = \sqrt[3]{3} \xrightarrow{(\cdot)^r} 3^{rxy} = \sqrt[3]{3^r} \xrightarrow{(\cdot)^x} 3^{rxy} = 3^x \xrightarrow{v^x = \sqrt[3]{3}} 3^{rxy} = \sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow 3^{rxy} = 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow rxy = \frac{1}{3} \xrightarrow{\div r} xy = \frac{1}{3r}$$

۷ - گزینه ۱

$$\sqrt[3]{\frac{-6\sqrt{4}}{\sqrt{5-2}}} = \sqrt[3]{\frac{-6\sqrt{2^2}}{-\sqrt{5-2}}} = \sqrt[3]{\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$(0.5)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$$

$$\Rightarrow A = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^3 = 2^{\frac{2}{3}+3} = 2^{\frac{2+13}{3}} = 2^{\frac{15}{3}} = 2^5$$

۸ - گزینه ۱ عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{3\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}\sqrt{5-2}}$$



$$= \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\underbrace{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}_3} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

۹ - گزینه ۱

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3 \times x^2 \times \frac{1}{x} + 3 \times x \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow 27 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

۱۰ - گزینه ۲

$$9 < 15 < 16 \Rightarrow \sqrt[3]{9} < \sqrt{15} < 4$$

$$\Rightarrow -4 < -\sqrt{15} < -3 \Rightarrow 2 - 4 < 2 - \sqrt{15} < 2 - 3 \Rightarrow -2 < 2 - \sqrt{15} < -1$$

پس عدد $2 - \sqrt{15}$ بین دو عدد صحیح متوالی ۱- و ۲- قرار دارد که مجموع این دو عدد ۳- است.

۱۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ دوم برابر و مختلف‌العلامه است

ریشهٔ سوم هر عدد از ریشهٔ دوم آن در اعداد } مابین صفر و یک، بزرگتر است
بزرگتر از یک، کوچکتر است

$$n > 1 \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n} \\ a_r < a_f \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{n} = a_f \rightarrow -\sqrt[n]{n} = -a_f = y$$

$$0 < m < 1 \rightarrow \begin{cases} \sqrt[m]{m} < \sqrt[m]{m} \\ a_1 < a_r \end{cases} \Rightarrow \sqrt[m]{m} = a_1 \rightarrow -\sqrt[m]{m} = -a_1 = x$$

۱۲ - گزینه ۲

$$a \text{ ریشهٔ } n \text{ ام } \begin{cases} \sqrt[n]{a} \text{ فرد } n \\ \pm \sqrt[n]{a} \text{ زوج } n \end{cases} \text{ و } \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| \text{ زوج } n \\ a \text{ فرد } n \end{cases}$$

$$64 \text{ ریشهٔ سوم } : \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$81 \text{ ریشهٔ دوم } \pm \sqrt{81} = \pm \sqrt{9^2} = \pm 9$$

$$x = \frac{81 \text{ ریشهٔ دوم}}{64 \text{ ریشهٔ سوم}} = \frac{\pm 9}{4} = \pm \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند}} x = \frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4} \text{ ریشهٔ دوم } : \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2} = \pm 1,5$$

۱۳ - گزینه ۱

می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک هرچه به یک هرچه به توان بزرگتری برسند، کوچکتر می‌شوند و هرچه ریشهٔ بزرگ‌تری از آنها بگیریم، بزرگتر می‌شوند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots < 1$$

۱۴ - گزینه ۳

می‌دانیم: حجم مکعبی به ضلع x برابر است با x^3

$$125 < x^3 < 729 \Rightarrow 5^3 < x^3 < 9^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} 5 < x < 9 \Rightarrow x \text{ حداکثر } 8$$

۱۵ - گزینه ۲

$$256 < 357 < 625 \Rightarrow 4^4 < 357 < 5^4 \xrightarrow{\sqrt[4]{\quad}} 4 < \sqrt[4]{357} < 5 \Rightarrow 4 < \sqrt[4]{357} < 4 + 1 \Rightarrow n = 4$$

۱۶ - گزینه ۲

$$\sqrt[n]{a^n} = |x| \text{ (زوج } n) \text{ و } \sqrt[n]{a^n} = n \text{ (فرد } n) \text{ می‌دانیم:}$$



داریم:

$$\frac{\sqrt[5]{x^5} \times \sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{x \times |x|}{x} = |x| \stackrel{x < 0}{=} -x$$

۱۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: $a^3 = a$ حجم مکعبی به ضلع a

اگر طول ضلع مکعب متوسط را برابر با a در نظر بگیریم، از آنجایی که حجم مکعب a بین ۶۴ و ۱۲۵ است داریم:

$$64 < a^3 < 125 \Rightarrow 4^3 < a^3 < 5^3 \Rightarrow 4 < a < 5 \Rightarrow a \in (4, 5)$$

۱۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$ و $(\sqrt[n]{a})^n = a \ (a > 0, n)$ (که در صورت زوج بودن n ، $a > 0$)

راه اول: با توجه به کادر، گزینه ۲ صحیح است.

راه دوم: مثال نقض:

$$a = -4, n = 2: \begin{cases} \sqrt[2]{(-4)^2} = |-4| = 4 \\ \text{تعریف نشده: } (\sqrt[2]{-4})^2 \end{cases}$$

۱۹ - گزینه ۴

می‌دانیم: $(a \geq 0) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ و $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ و $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

داریم:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{4}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = \sqrt{2}$$

۲۰ - گزینه ۳

می‌دانیم: $(a^n)^m = a^{mn}, a^m \times a^n = a^{m+n}$

داریم:

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} \times \frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} \times \frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} \times \frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} \times \frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} \times \frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} \times \frac{1}{6^{\frac{1}{6}}} = 6^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 6^{\frac{6}{6}} = 6$$

۲۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

برای ساده‌سازی کسر، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{(1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}{(1 - 2)} = 1 - \sqrt{2}$$

۲۲ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ و برای x های منفی تعریف نمی‌شود

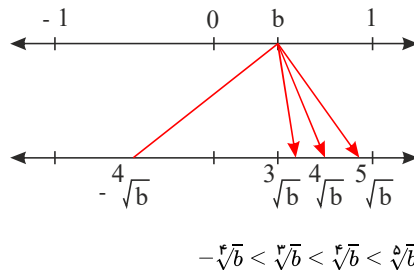
با توجه به صورت سؤال، $\sqrt{-x}$ تعریف شده است بنابراین $x < 0$:

$$x\sqrt{-x} \stackrel{x < 0}{=} -|x|\sqrt{-x} = -\sqrt{x^2} \times \sqrt{-x} = -\sqrt{-x^3}$$

۲۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک، هرچه ریشه بزرگتری از آنها بگیریم، بزرگتر می‌شوند. همچنین اعداد مثبت، دو ریشه مختلف علامه و مساوی دارند.

با توجه به شکل و کادر داریم:



یعنی:



ریشه پنجم $b <$ ریشه چهارم $b <$ ریشه سوم $b <$ ریشه چهارم b

با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه ۳ صحیح است.

۲۴ - گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

همچنین در محاسبه $a^{m/n}$ از بیرونی‌ترین توان شروع می‌کنیم.

داریم:

$$81^{\frac{1}{27 \cdot 3}} = 81^{\frac{1}{81}} = (9^2)^{\frac{1}{81}} = 9^{\frac{2}{81}} = (3^2)^{\frac{2}{81}} = 3^{\frac{4}{81}}$$

$$\sqrt[3]{81^{\frac{4}{81}}} = 81^{\frac{4}{243}} = (3^4)^{\frac{4}{243}} = 3^{\frac{16}{243}}$$

$$A = \frac{81^{\frac{1}{27 \cdot 3}}}{\sqrt[3]{81^{\frac{4}{81}}}} = \frac{3^{\frac{4}{81}}}{3^{\frac{16}{243}}} = 3^{\frac{36}{243} - \frac{16}{243}} = 3^{\frac{20}{243}} = 3^{\frac{20}{27 \cdot 9}} = 3^{\frac{20}{27} \cdot \frac{1}{9}} = 3^{\frac{20}{243}}$$

۲۵ - گزینه ۳

می‌دانیم:

$$(\sqrt{a})^2 = a (a > 0), ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{یا} \\ b = 0 \end{cases}$$

با به توان ۲ رساندن طرفین داریم:

$$(\sqrt{a+b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Rightarrow a+b = a+b + 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{یا} \\ b = 0 \end{cases}$$

۲۶ - گزینه ۳

$$x^r - 2xy + x^r y - 2y^r = \underbrace{x^r + x^r y}_{x^r(x+y)} - \underbrace{2xy - 2y^r}_{2y(x+y)} = x^r(x+y) - 2y(x+y) = (x+y)(x^r - 2y)$$

۲۷ - گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a^m \times a^n = a^{m+n}$$

داریم:

$$A = x^{\frac{5}{15}} \sqrt[5]{x^{\frac{2}{15}}} = x^{\frac{5}{15}} \times x^{\frac{1}{15}} \times x^{\frac{2}{15}} = x^{\frac{15+5+6}{15}} = x^{\frac{26}{15}} \stackrel{x=2^{13}}{=} (2^{\frac{13}{15}})^{\frac{26}{15}} = 2^{\frac{26}{15} \cdot \frac{13}{15}} = 2^{\frac{338}{225}} = 2^{\frac{13}{15}}$$

۲۸ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} a^r - b^r &= (a-b)(a^{r-1} + ab^{r-2} + \dots + b^{r-1}) \\ a^r + b^r &= (a+b)(a^{r-1} - ab^{r-2} + \dots - b^{r-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{99^3 - 1}{99^2 + 100} &= \frac{(99-1)(99^2 + 99 + 1)}{99^2 + 100} = 99 - 1 = 98 \\ \frac{99^3 + 1}{99^2 - 98} &= \frac{(99+1)(99^2 - 99 + 1)}{99^2 - 98} = 100 \\ \Rightarrow A &= \frac{99^3 - 1}{99^2 + 100} \times \frac{99^3 + 1}{99^2 - 98} = 98 \times 100 = 9800 \end{aligned}$$

۲۹ - گزینه ۱ هر یک از گزینه‌ها را به تنهایی بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $x = \frac{1}{9}, y = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < x < y < 1, \frac{1}{3} < \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

گزینه ۲: $0 < x < y < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^r < x < y \\ 0 < y < \sqrt[3]{y} \end{cases} \Rightarrow x^r < y < \sqrt[3]{y} \Rightarrow x^r < \sqrt[3]{y}$

گزینه ۳: $0 < x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

گزینه ۴: $0 < x < y < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^r < x < y \\ 0 < y < \sqrt[5]{y} \end{cases} \Rightarrow x^r < y < \sqrt[5]{y} \Rightarrow x^r < \sqrt[5]{y}$

۳۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\sqrt[n]{x} \geq 0, x > 0, n$ زوج



$$-2 \leq \sqrt{x} \leq 7 \xrightarrow{\sqrt{x} \geq 0} 0 \leq \sqrt{x} \leq 7 \xrightarrow{\text{توان } 2} 0 \leq x \leq 49 \Rightarrow x \in [0, 49]$$

تعداد x های این بازه برابر $1 + 0 - 49$ است، یعنی 50 تا

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۲	۱۱ - ۴	۱۶ - ۲	۲۱ - ۴	۲۶ - ۳
۲ - ۴	۷ - ۱	۱۲ - ۲	۱۷ - ۳	۲۲ - ۱	۲۷ - ۴
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۱	۱۴ - ۳	۱۹ - ۴	۲۴ - ۴	۲۹ - ۱
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۲	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۳