

علی هاشمی

نام آزمون: توان های گویا و عبارت های جبری

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- به ازای کدام مجموعه از مقادیر a ، رابطه $\sqrt{9a^2 - 6a + 1} = 1 - 3a$ حتماً برقرار است؟

① $a > \frac{1}{3}$

② $a \leq 1$

③ $a > 0$

④ $a < -2$

۲- اگر جمله عمومی دنباله a_n به صورت $a_n = \sqrt[n+1]{(-3)^{n+1}}$ باشد، مجموع ۱۱ جمله اول این دنباله کدام است؟

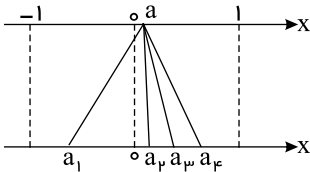
① صفر

② ۳۳

③ ۳

④ -۳۳

۳- در شکل زیر، نقطه a از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. کدام نقطه ریشه چهارم نقطه a است؟



① فقط a_1

② a_1 و a_2

③ فقط a_3

④ a_1 و a_3

۴- حاصل عبارت $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$ کدام است؟

① $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

② $\sqrt{6} - 1$

③ $\sqrt{6} + 1$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$



۵- اگر $A = \sqrt[3]{-7}$ ، $B = \sqrt[3]{13}$ ، $C = \sqrt[4]{83}$ و $D = \sqrt[4]{0,0014}$ باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

① $-2 < A < -1$

② $2 < B < 3$

③ $3 < C < 4$

④ $0,2 < D < 0,3$

۶- چند مورد از مقایسه‌های زیر صحیح است؟

(الف) $-3\sqrt[4]{2} > -2\sqrt[4]{3}$

(ب) $\sqrt[10]{6} < \sqrt[5]{2}\sqrt[3]{2}$

(پ) $\sqrt[6]{4} > \sqrt[9]{8}$

① ۱

② ۲

③ ۳

④ هیچکدام

۷- حاصل $(\frac{9}{25})^{\frac{1}{2}} + (125)^{-\frac{1}{3}} + 0,4$ چند برابر $(\frac{3}{2})^{-1} - (16)^{\frac{3}{4}} - (27)^{-\frac{1}{3}}$ است؟

① $-\frac{115}{18}$

② $\frac{115}{18}$

③ $\frac{23}{9}$

④ $-\frac{23}{9}$

۸- برای اعداد حقیقی a و b داریم: $2a^2 + b^2 + 2ab + 4b - 2a + 13 = 0$ ؛ حاصل $3a + 2b$ کدام است؟

① ۱

② ۱۹

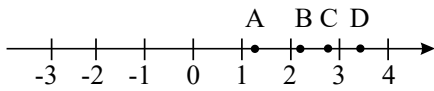
③ -۱

④ -۱۹



۹- با فرض $x > \sqrt{a}$ ، ساده شده عبارت $\sqrt{\frac{a+x^2}{x}} - 2\sqrt{a} + \sqrt{\frac{x^2+a}{x}} + 2\sqrt{a}$ کدام است؟

- ۱) $2a$
- ۲) $2\sqrt{a}$
- ۳) $2\sqrt{x}$
- ۴) $2x$



۱۰- مطابق شکل زیر، کدام یک از نقاط A, B, C یا D نمایانگر عدد $\sqrt[3]{25}$ است؟

- ۱) A
- ۲) B
- ۳) C
- ۴) D

۱۱- حاصل عبارت تعریف شده $\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt{-x}}$ همواره کدام است؟

- ۱) $\sqrt{-x}$
- ۲) $-\sqrt{-x}$
- ۳) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$
- ۴) $\frac{-1}{\sqrt{-x}}$

۱۲- حاصل عبارت $A = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1$ به ازای $x = \sqrt[4]{2}$ کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) $\sqrt{2}$
- ۴) $\sqrt[4]{2}$



۱۳- اگر $a = \sqrt{6 + \sqrt{20}}$ و $b = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲) $2\sqrt{5}$
- ۳) ۴
- ۴) $4\sqrt{5}$

۱۴- کدام گزینه درست است؟

- ۱) $\sqrt[4]{625}$ دارای دو مقدار است که قرینه یکدیگرند.
- ۲) معادله $\sqrt[5]{a} = a$ تنها دارای دو جواب $a = 1$ و $a = -1$ است.
- ۳) $\sqrt[3]{10}$ بین اعداد صحیح ۳ و ۴ قرار دارد.
- ۴) هر عدد مثبت، دو ریشه چهارم دارد.

۱۵- اگر $0 < a < 1$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- ۱) $a^3 < a$
- ۲) $\sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$
- ۳) $\frac{1}{a} < a$
- ۴) $a^3 > a^5$

۱۶- چه تعداد از نامساوی‌های زیر درست است؟

الف) $(0.3)^{10} > (-0.3)^{16}$ ، ب) $\sqrt[5]{0.1} > \sqrt[7]{0.1}$ ، پ) $\sqrt[4]{(-2)^4} < \sqrt[4]{(2)^4}$ ، ت) $\sqrt{0.25} > \sqrt[3]{0.125}$

- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴



۱۷- حاصل $A = \left(\sqrt[3]{7\sqrt{7}} + \sqrt[3]{5\sqrt{5}} \right) \left(\sqrt[4]{49} - \sqrt[5]{5\sqrt{125}} \right)$ کدام است؟

- ① $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}$
- ② $\sqrt{7} + \sqrt{5}$
- ③ $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}$
- ④ ۲

۱۸- ساده شده عبارت $\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1}$ کدام است؟ (مخرج کسرها مخالف صفر است.)

- ① $\frac{1}{x+1}$
- ② $\frac{1}{x-1}$
- ③ $\frac{x+1}{x-1}$
- ④ $\frac{x-1}{x+1}$

۱۹- اگر $x^3 + y^3 = 72$ و $x + y = 6$ باشد، آن گاه $|x - y|$ کدام است؟

- ① ۲
- ② ۴
- ③ ۳
- ④ $\sqrt{2}$

۲۰- در صورتی که $0 < a < 1$ باشد، کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره نادرست است؟

- ① $\sqrt[5]{a} > a$
- ② $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$
- ③ $\sqrt[5]{-a} < \sqrt{a}$
- ④ $-a < \sqrt[3]{-a}$



۲۱- اگر $\sqrt[6]{1-a} \times \sqrt[6]{b-1} = \sqrt[6]{(1-a)(b-1)}$ و $\sqrt{(2-b)^2} = 2-b$ ، آن‌گاه کدام گزینه در خصوص حدود a یا b صحیح است؟

- ۱) $0 \leq b \leq 1$
- ۲) $1 \leq b \leq 2$
- ۳) $1 \leq a \leq 2$
- ۴) $-1 \leq a \leq 0$

۲۲- حاصل عبارت $A = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱) -4
- ۲) -2
- ۳) -1
- ۴) 2

۲۳- اگر $a(a^2 + 3ab) = 7$ و $b(b^2 + 3ab) = 20$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱) 2
- ۲) 3
- ۳) 4
- ۴) 5

۲۴- اگر $x\sqrt[5]{y} = 3$ و $y\sqrt[5]{x} = 81$ باشد، حاصل $A = \sqrt[5]{x\sqrt[5]{x}} \times \sqrt[5]{y\sqrt[5]{y}}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt[5]{27}$
- ۲) $3\sqrt[5]{3}$
- ۳) 3
- ۴) $\sqrt[5]{3}$



۲۵- حاصل عبارت تعریف شده زیر کدام است؟

$$A = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4}{x-4}$$

- ① $\frac{4(\sqrt{x}-1)}{x-4}$
- ② $\frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$
- ③ $\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-4}$
- ④ $\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x-4}$

۲۶- عبارت $x^6 - 1$ همواره با کدام عبارت زیر برابر است؟

- ① $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
- ② $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)^2$
- ③ $(x+1)(x^2+x-1)(x-1)(x^2-x-1)$
- ④ $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

۲۷- حاصل عبارت $(\sqrt[6]{5}-1)(\sqrt[6]{5^2}-\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[6]{5^2}+\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[6]{5}+1)$ کدام است؟

- ① ۳
- ② ۴
- ③ ۵
- ④ ۶

۲۸- اگر $\sqrt[4]{a^3} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$ باشد، آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

- ① $\sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$
- ② $a^3 < a^4$
- ③ $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$
- ④ $\sqrt[6]{a^5} < \sqrt[4]{a}$



۲۹- حاصل عبارت $\frac{1}{6}(9 + 4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}(\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}}$ کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ② $2\sqrt{2}$
- ③ $\sqrt{2}$
- ④ $\sqrt[3]{2}$

۳۰- حاصل عبارت $A = (1 + \sqrt{3})^3 + (1 - \sqrt{3})^3$ در کدام گزینه آمده است؟

- ① ۲۰
- ② $4\sqrt[3]{3}$
- ③ ۲۴
- ④ $8\sqrt[3]{3}$



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{9a^2 - 6a + 1} = 1 - 3a \Rightarrow \sqrt{(3a - 1)^2} = 1 - 3a \Rightarrow |3a - 1| = 1 - 3a$$

پس عبارت $3a - 1$ منفی یا صفر بوده که قدر مطلق آن با قرینه اش برابر شده:

$$3a - 1 \leq 0 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

از میان گزینه ها، فقط گزینه ی ۴ در شرط فوق صدق می کند.

۲ - گزینه ۳

$$\begin{cases} \text{فرد} : n \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \\ \text{زوج} : n \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a| \end{cases}$$

$$a_n = \sqrt[n+1]{(-3)^{n+1}} \Rightarrow \begin{cases} \text{زوج} : n + 1 \Rightarrow a_n = |-3| = 3 \\ \text{فرد} : n + 1 \Rightarrow a_n = -3 \end{cases}$$

و دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$3, -3, 3, -3, \dots$$

پس مجموع ۱۱ جمله ی آن عبارتست از:

$$\underbrace{3 + (-3)} + \underbrace{3 + (-3)} + \dots + 3 = 3$$

۳ - گزینه ۴ می دانیم: اعداد بین صفر و یک، هر چه رادیکال با فرجه بزرگتری از آن ها بگیریم، حاصلشان بزرگتر می شود. همچنین هر عدد مثبت دو ریشه ی زوج مختلف علامه دارد

داریم:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$$

$$a_2 < a_3 < a_4$$

بنابراین:

a_2 : ریشه سوم a

a_3 : ریشه چهارم مثبت a

a_4 : ریشه پنجم a

a_1 : ریشه چهارم منفی a

۴ - گزینه ۴ عبارت را گویا می کنیم:

$$\frac{5 - 2\sqrt{6}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} \times \frac{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}}{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} = \frac{45\sqrt{3} - 18\sqrt{18} + 55\sqrt{2} - 22\sqrt{12}}{81 \times 3 - 121 \times 2}$$

$$= \frac{45\sqrt{3} - 18 \times 3\sqrt{2} + 55\sqrt{2} - 22 \times 2\sqrt{3}}{243 - 242} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

۵ - گزینه ۴ بررسی گزینه ها:

۱) درست: $-8 < -7 < -1 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} < \sqrt[3]{-7} < \sqrt[3]{-1} \Rightarrow -2 < A < -1$

۲) درست: $8 < 13 < 27 \Rightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{13} < \sqrt[3]{27} \Rightarrow 2 < B < 3$

۳) درست: $81 < 83 < 256 \Rightarrow \sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{83} < \sqrt[4]{256} \Rightarrow 3 < C < 4$

۴) نادرست: $0,0001 < 0,00014 < 0,0016 \Rightarrow \sqrt[4]{0,0001} < \sqrt[4]{0,00014} < \sqrt[4]{0,0016} \Rightarrow 0,1 < D < 0,2$

۶ - گزینه ۱

الف)
$$\begin{cases} -3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{162} \\ -2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{48} \end{cases} \Rightarrow 162 > 48 \Rightarrow \sqrt[4]{162} > \sqrt[4]{48} \Rightarrow -\sqrt[4]{162} < -\sqrt[4]{48} \Rightarrow -3\sqrt[4]{2} > -2\sqrt[4]{3}$$



$$ب) \begin{cases} \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{16^2} = \sqrt[5]{256} \\ \sqrt[10]{6} = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{216} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{256 > 216} \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}} > \sqrt[10]{6}$$

$$پ) \begin{cases} \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[3]{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[6]{4} = \sqrt[9]{8}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (a \geq 0)$$

۷ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - (16)^{\frac{3}{4}} - (27)^{-\frac{1}{3}} &= \frac{2}{3} - (2^4)^{\frac{3}{4}} - (3^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} - 8 - \frac{1}{3} \\ \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + (125)^{-\frac{1}{3}} + 0,4 &= \frac{3}{5} + (5^3)^{-\frac{1}{3}} + 0,4 = 0,6 + \frac{1}{5} + 0,4 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{24}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2 - 24 - 1}{3} = \frac{-23}{3} = \frac{-23}{3} \times \frac{10}{12} = \frac{-115}{18} \\ &= \frac{\frac{2}{5} - \frac{24}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{6}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10}} = \frac{\frac{2 - 24 - 1}{3}}{\frac{6 + 2 + 4}{10}} = \frac{\frac{-23}{3}}{\frac{12}{10}} = \frac{-23}{3} \times \frac{10}{12} = \frac{-115}{18} \end{aligned}$$

۸ - گزینه ۳

$$2a^x + b^x + 2ab + 4b - 2a + 13 = 0 \Rightarrow a^x + b^x + 4 + 2ab + 4b + 4a + a^x - 6a + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (a + b + 2)^x + (a - 3)^x = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است؛ بنابراین هریک از عبارات برابر صفر هستند، یعنی داریم:

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -5 \Rightarrow 3a + 2b = -1$$

۹ - گزینه ۳ روش اول:

عبارت موردنظر را A می‌نامیم و داریم:

$$A = \sqrt{\frac{a+x^r}{x} - 2\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{x^r+a}{x} + 2\sqrt{a}}$$

$$A^r = \left(\frac{a+x^r}{x} - 2\sqrt{a} + \frac{x^r+a}{x} + 2\sqrt{a}\right)^r = \left(\frac{a+x^r}{x} - 2\sqrt{a}\right)^r \left(\frac{a+x^r}{x} + 2\sqrt{a}\right)^r$$

$$= 2\left(\frac{x^r+a}{x}\right)^r + 2\sqrt{\frac{(a+x^r)^r}{x^r}} - 4a = \frac{2x^r+2a}{x} + 2\sqrt{\frac{x^r+a^r+2ax^r-4ax^r}{x^r}}$$

$$= \frac{2x^r+2a}{x} + 2\sqrt{\frac{(x^r-a)^r}{x^r}} = \frac{2x^r+2a}{x} + 2\sqrt{\left(\frac{x^r-a}{x}\right)^r}$$

$$= \frac{2x^r+2a}{x} + 2\left|\frac{x^r-a}{x}\right| \xrightarrow{x>\sqrt{a}} \frac{2x^r+2a}{x} + \frac{2x^r-2a}{x} = \frac{4x^r}{x} = 4x$$

$$A^r = 4x \Rightarrow A = \pm 2\sqrt{x} \xrightarrow{A>0} A = 2\sqrt{x}$$

روش دوم:

ابتدا عبارت‌های زیر هر رادیکال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{a+x^r}{x} - 2\sqrt{a} = \frac{a}{x} + \frac{x^r}{x} - 2\sqrt{a} = \frac{a}{x} + x - 2\sqrt{a} = (\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}})^r$$



$$\frac{a+x^r}{x} + r\sqrt{a} = \frac{a}{x} + \frac{x^r}{x} + r\sqrt{a} = \frac{a}{x} + x + r\sqrt{a} = (\sqrt{x} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}})^r$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a+x^r}{x} - r\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a+x^r}{x} + r\sqrt{a}} = \sqrt{(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}})^r} + \sqrt{(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}})^r}$$

$$= \left| \sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \right| + \left| \sqrt{x} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \right| \stackrel{x > \sqrt{a}}{=} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

۱۰ - گزینه ۳

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{25} < 3$$

باتوجه به نزدیک تر بودن $\sqrt[3]{25}$ به ۳، C درست است و B درست نیست.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (a, b > 0 \rightarrow \text{اگر } n \text{ زوج})$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a \frac{m}{n}, \quad (a > 0)$$

۱۱ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\frac{\sqrt{x^r \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x \sqrt{-x}}} = \frac{\sqrt{x \times x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{x \times (-x)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}{-\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\sqrt[6]{x^3}}{-\sqrt[6]{-x^3}} = -\sqrt[6]{-x}$$

۱۲ - گزینه ۳

$$A = (x^r - 1)(x^r + x + 1)(x^r - x + 1) + 1 = (x - 1)(x + 1)(x^r + x + 1)(x^r - x + 1) + 1$$

$$= (x - 1)(x^r + x + 1)(x + 1)(x^r - x + 1) + 1 = (x^r - 1)(x^r + 1) + 1 = x^r - 1 + 1 = x^r$$

$$\stackrel{x = \sqrt[12]{2}}{=} (\sqrt[12]{2})^6 = \sqrt{2}$$

۱۳ - گزینه ۲

$\sqrt[n]{a^r} = |a|$

می‌دانیم:

$$a = \sqrt{6 + \sqrt{20}} = \sqrt{5 + 1 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = |\sqrt{5} + 1| = \sqrt{5} + 1$$

$$b = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{5 + 1 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1$$

$$a + b = \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} - 1 = 2\sqrt{5}$$

۱۴ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

$$\sqrt[4]{625} = 5 \quad (1)$$

$$\sqrt[5]{a} = a \Rightarrow a = -1, 0, 1 \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{27} \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{10} < 3 \quad (3)$$

(۴) درست

۱۵ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

برای مثال فرض کنید $a = -\frac{1}{2}$ باشد و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم؛ داریم:

$$-1 < a < 0 \xrightarrow{\text{مثال}} a = -\frac{1}{2}$$

(۱) نادرست: $-\frac{1}{2} < (-\frac{1}{2})^3$

(۲) نادرست: $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} > \sqrt[5]{-\frac{1}{2}}$

(۳) درست: $-2 < -\frac{1}{2}$



(۴) نادرست: $(-\frac{1}{2})^3 < (-\frac{1}{2})^5$

۱۶ - گزینه ۱ بررسی موارد:

الف) درست: از آنجایی که $0 < 0.3 < 1$ است هرچقدر توان آن بیشتر شود حاصل کوچک تر می شود.

ب) نادرست: $\sqrt[5]{0.1} < \sqrt[4]{0.1}$

پ) نادرست: $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

ت) نادرست: $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt{0.25} = 0.5$

۱۷ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{\sqrt{7}\sqrt{7}} + \sqrt[3]{\sqrt{5}\sqrt{5}}) (\sqrt[4]{49} - \sqrt[5]{\sqrt{125}}) \\ &= \left(\sqrt[3]{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} + \sqrt[3]{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \right) \left(\sqrt[4]{7^2} - \sqrt[5]{5 \times 5^{\frac{2}{5}}} \right) \\ &= \left(\sqrt[3]{7^{\frac{2}{3}}} + \sqrt[3]{5^{\frac{2}{3}}} \right) \left(\sqrt[4]{7^{\frac{2}{2}}} - \sqrt[5]{5^{\frac{4}{5}}} \right) \\ &= (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5}) = 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

۱۸ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} \frac{x^r + 2x^r + 2x + 1}{x^r + x^r - x - 1} &= \frac{(x+1)^r - x^r - x}{x^r(x+1) - (x+1)} = \frac{(x+1)^r - x(x+1)}{(x+1)(x^r - 1)} \\ &= \frac{(x+1)((x+1)^r - x)}{(x+1)(x^r - 1)} = \frac{(x+1)^r - x}{x^r - 1} = \frac{x^r + 2x + 1 - x}{(x-1)(x^r + x + 1)} \\ &= \frac{(x^r + x + 1)}{(x-1)(x^r + x + 1)} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

۱۹ - گزینه ۱ می دانیم: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(x+y)^r = x^r + 3x^r y + 3xy^r + y^r = x^r + y^r + 3xy(x+y)$$

$$\Rightarrow x^r + y^r = (x+y)^r - 3xy(x+y) \Rightarrow 72 = 6^r - 3xy(6)$$

$$\Rightarrow 72 = 216 - 18xy \Rightarrow 18xy = 216 - 72 = 144 \Rightarrow xy = \frac{144}{18} = 8$$

$$\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ y = (6-x) \end{cases} \Rightarrow x(6-x) = 8 \Rightarrow 6x - x^2 = 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=4 \\ x=4 \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow |x-y| = 2$$

۲۰ - گزینه ۴

می دانیم: در صورتی که $0 < a < 1$ داریم:

$$a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots$$

بررسی گزینه ها:

(۱) درست: $\sqrt[5]{a} > a$

(۲) درست: $\sqrt[5]{-a} > \sqrt{a}$

(۳) درست: $\sqrt[5]{-a} < \sqrt{a}$ (زیرا: $\sqrt[5]{-a} < 0 < \sqrt{a}$)

(۴) نادرست: $-a > \sqrt[5]{-a}$ (زیرا: $\sqrt[5]{-a} > -a$)

۲۱ - گزینه ۲

$$\sqrt[6]{1-a} \times \sqrt[6]{b-1} = \sqrt[6]{(1-a)(b-1)} \rightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ b-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \leq 1 \text{ (۱)} \\ b \geq 1 \text{ (۲)} \end{cases}$$

$$\sqrt{(2-b)^r} = |2-b| = 2-b \rightarrow 2-b \geq 0 \rightarrow b \leq 2 \text{ (۳)}$$



$$|-a| = a \rightarrow a \geq 0 \quad (۴)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۳)} 1 \leq b \leq ۲$$

$$\xrightarrow{(۱),(۴)} 0 \leq a \leq 1$$

۲۲ - گزینه ۳

$$A = \sqrt[۲]{1 - \sqrt{۲}} \times \sqrt[۶]{۳ + ۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۲]{1 - \sqrt{۲}} \times \sqrt[۶]{(1 + \sqrt{۲})^۳} = \sqrt[۲]{1 - \sqrt{۲}} \times \sqrt[۲]{1 + \sqrt{۲}}$$

$$= \sqrt[۲]{(1 - \sqrt{۲})(1 + \sqrt{۲})} = \sqrt[۲]{1 - ۲} = \sqrt[۲]{-1} = -1$$

۲۳ - گزینه ۲

$$\begin{cases} a(a^۲ + ۳ab) = a^۳ + ۳a^۲b = ۷ \\ b(b^۲ + ۳ab) = b^۳ + ۳ab^۲ = ۲۰ \end{cases}$$

$$a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ = ۲۷ \rightarrow (a + b)^۳ = ۲۷ \rightarrow a + b = ۳$$

۲۴ - گزینه ۳

$$\begin{cases} \sqrt[۵]{x \times x^{\frac{1}{۲}}} = \sqrt[۵]{x^{\frac{۳}{۲}}} \\ \sqrt[۵]{y \times y^{\frac{1}{۲}}} = \sqrt[۵]{y^{\frac{۳}{۲}}} \end{cases} \rightarrow A = \sqrt[۵]{x^{\frac{۳}{۲}} \times y^{\frac{۳}{۲}}} = \sqrt[۵]{(xy)^{\frac{۳}{۲}}} = (xy)^{\frac{۳}{۱۰}}$$

$$\begin{cases} y^{\frac{۳}{۲}}x = ۸1 \rightarrow y \times x^{\frac{1}{۲}} = ۸1 \\ x^{\frac{۳}{۲}}y = ۳ \rightarrow x \times y^{\frac{1}{۲}} = ۳ \end{cases} \rightarrow (xy^{\frac{1}{۲}})(yx^{\frac{1}{۲}}) = ۳ \times ۸1 \rightarrow (xy)^{\frac{۳}{۲}} = ۲۴۳(I)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین (I) را به توان } \frac{1}{5} \text{ می‌رسانیم.}} \left[(xy)^{\frac{۳}{۲}} \right]^{\frac{1}{5}} = (۲۴۳)^{\frac{1}{5}} \rightarrow A = (xy)^{\frac{۳}{۱۰}} = (۳^5)^{\frac{1}{5}} = ۳$$

۲۵ - گزینه ۲

$$\frac{۲}{\sqrt{x} - ۲} \times \frac{\sqrt{x} + ۲}{\sqrt{x} + ۲} = \frac{۲\sqrt{x} + ۴}{x - ۴}$$

$$\frac{۲}{\sqrt{x} + ۲} \times \frac{\sqrt{x} - ۲}{\sqrt{x} - ۲} = \frac{۲\sqrt{x} - ۴}{x - ۴}$$

$$A = \frac{۲}{\sqrt{x} - ۲} + \frac{۲}{\sqrt{x} + ۲} + \frac{۴}{x - ۴} = \frac{۲\sqrt{x} + ۴}{x - ۴} + \frac{۲\sqrt{x} - ۴}{x - ۴} + \frac{۴}{x - ۴}$$

$$= \frac{۲\sqrt{x} + ۴ + ۲\sqrt{x} - ۴ + ۴}{x - ۴} = \frac{۴\sqrt{x} + ۴}{x - ۴} = \frac{۴(\sqrt{x} + 1)}{x - ۴}$$

۲۶ - گزینه ۴

$$x^۶ - 1 = (x^۳ - 1)(x^۳ + 1) = (x - 1)(x^۲ + x + 1)(x + 1)(x^۲ - x + 1)$$

$$= (x^۲ - 1)(x^۲ + x + 1)(x^۲ - x + 1)$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x^۲ + x + 1) = x^۳ - 1 \\ (x + 1)(x^۲ - x + 1) = x^۳ + 1 \end{cases}$$

۲۷ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\left(\sqrt[۶]{۵} - 1 \right) \left(\sqrt[۶]{۵^۲} - \sqrt[۶]{۵} + 1 \right) \left(\sqrt[۶]{۵^۲} + \sqrt[۶]{۵} + 1 \right) \left(\sqrt[۶]{۵} + 1 \right)$$

$$= \left((\sqrt[۶]{۵})^۳ - 1 \right) \left((\sqrt[۶]{۵})^۳ + 1 \right)$$

$$= \left(\sqrt[۳]{۵} - 1 \right) \left(\sqrt[۳]{۵} + 1 \right) = ۵ - 1 = ۴$$

۲۸ - گزینه ۴ می‌دانیم: اعداد بزرگتر از ۱ هرچه به توان بزرگتری می‌رسند، بزرگتر می‌شوند.

$$0 < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a^۳} \Rightarrow 0 < a^{\frac{1}{۳}} < a^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow a \text{ عددی بزرگتر از یک است.}$$



گزینه ۴ نادرست است. $\Rightarrow a$ با توان بزرگ تر باید بزرگ تر شود.

۲۹ - گزینه ۲

$$1) 4^{975} = 4^{\frac{75}{100}} = 4^{\frac{3}{4}} = (2^2)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

$$2) (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt[3]{5 - 4\sqrt{5} + 4} = \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$3) (9 + 4\sqrt{5})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$(1) \times (2) \times (3) = 2\sqrt{2} \times \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} \times \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2\sqrt{2} \times \sqrt[3]{(9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})}$$

$$= 2\sqrt{2} \times \sqrt[3]{81 - 80} = 2\sqrt{2}$$

۳۰ - گزینه ۱ می دانیم: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$$A = \underbrace{(1 + \sqrt{3})^3}_a + \underbrace{(1 - \sqrt{3})^3}_b = \underbrace{(1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})^3}_2 - \underbrace{3(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}_{1-3} \underbrace{(1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})}_2$$

$$= 2^3 - 3 \times (-2) \times 2 = 8 + 12 = 20$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۳	۷ - ۱	۱۲ - ۳	۱۷ - ۴	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۴	۸ - ۳	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۳	۱۴ - ۴	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۳	۱۵ - ۳	۲۰ - ۴	۲۵ - ۲	۳۰ - ۱