نام آزمون: مثلثات

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- انتهای کمان روبرو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد و ضلع انتهایی این زاویه، دایرهٔ مثلثاتی را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند، حاصل $A = \frac{\tan\alpha + ۸\sin\alpha}{\cos\alpha}$ کدام است؟

① $۴\sqrt{۱۵}$

② $-۴\sqrt{۱۵}$

③ $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$

④ $-\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$

۲- خط با شیب مثبت و عرض از مبدأ یک و خط $L_۲$ با شیب مثبت و عرض از مبدأ ۵، محور عرض‌ها را به‌ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کنند. خطوط $L_۱$ و $L_۲$ یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند به‌طوری که $AC = ۱۳$ است. اگر مساحت مثلث ABC ۲۴ باشد، شیب خط $L_۱$ کدام است؟

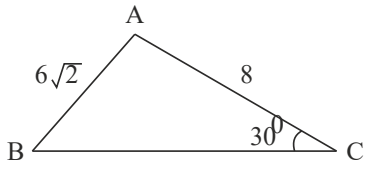
① $\frac{۱۲}{۵}$

② $\frac{۱۲}{۱۳}$

③ $\frac{۵}{۱۲}$

④ $\frac{۵}{۱۳}$

۳- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟



① $۸\sqrt{۳}$

② $۲(\sqrt{۱۴}+۲\sqrt{۳})$

③ $۴(\sqrt{۱۴}+۲\sqrt{۳})$

④ $۴\sqrt{۳}$

۴ - اگر برای زوایای α، β و θ تساوی $\sin\theta = \frac{\cos\beta - ۲\sin\alpha}{۵}$ برقرار باشد، $\sin\theta$ برابر با کدام مقدار نمی‌تواند باشد؟

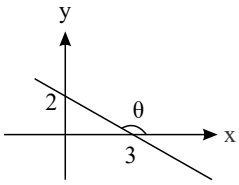
۱) $\frac{۴}{۷}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۷}{۱۰}$

۵ - با توجه به شکل مقابل، مقدار $\cos\theta$ کدام است؟



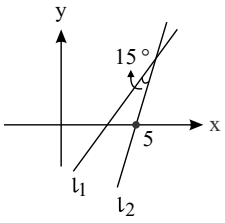
۱) $-\frac{۵}{۹}$

۲) $-\frac{۴}{۹}$

۳) $-\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$

۴) $-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$

۶ - مطابق شکل، خط $L_۱$ به معادلهٔ $\sqrt{۳}x - ۳y = ۵$ با خط $L_۲$ زاویهٔ ۱۵° می‌سازد. معادلهٔ خط $L_۲$ کدام است؟



۱) $y - \sqrt{۳}x + ۵\sqrt{۳} =$

۲) $y + \sqrt{۳}x - ۵\sqrt{۳} = ۰$

۳) $y = x - ۵$

۴) $y = x + ۵$

۷ - اگر α در ناحیهٔ دوم و $\sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$ باشد، معادلهٔ خطی که محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ قطع کند و با جهت مثبت آن زاویهٔ α بسازد، کدام است؟

۱) $۴y = ۶x - ۳$

۲) $۵y = ۶ - ۱۲x$

۳) $۵y = ۱۲x - ۶$

۴) $۴y = ۳ - ۶x$

۸ - ساده شده‌ی عبارت $(۱+\tan\alpha)(۱+\cot\alpha)-\frac{۱}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

۹ - اگر $۰^\circ \le \alpha < ۳۰^\circ$ و $\cos ۲\alpha = \frac{-۲m+۱}{۳}$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۴} < m < ۱$

(۲) $\frac{۱}{۴} < m \le ۱$

(۳) $-\frac{۱}{۴} \le m \le ۱$

(۴) $-\frac{۱}{۴} \le m < ۱$

۱۰ - طرف دیگر اتحاد مثلثاتی زیر کدام است؟

$$\frac{۲}{۱-(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲}=?$$

(۱) $۲(\tan\alpha+\cot\alpha)^۲$

(۲) $-\sin\alpha\cos\alpha$

(۳) $\tan\alpha+\cot\alpha$

(۴) $-(\tan\alpha+\cot\alpha)$

۱۱ - اگر برای زاویهٔ α داشته باشیم، $tan\alpha\cdot sin\alpha > ۰$ و $\sin\alpha-\cos\alpha > ۰$ حدود α برابر با کدام گزینهٔ زیر می‌تواند باشد؟

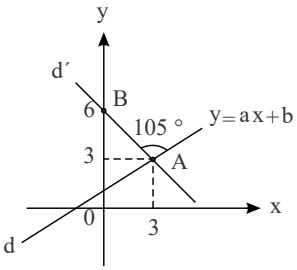
(۱) $۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$

(۲) $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$

(۳) $۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$

(۴) $۰ < \alpha < ۴۵^\circ$

۱۲ - در شکل مقابل مقدار $b(a+۱)$ کدام است؟



۱) -۶

۲) $\frac{۱۵}{۴}$

۳) ۲

۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۳ - مقدار عبارت $A=(\tan ۵^\circ-\cot ۵^\circ)(\tan ۶^\circ-\cot ۶^\circ)\dots(\tan ۸۱^\circ-\cot ۸۱^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۱\sqrt{۳}}{۷}$

۲) $۸۱\sqrt{۵}$

۳) $-۴\sqrt{۶}$

۴) صفر

۱۴ - اگر $\tan\alpha=\frac{۳}{۷}$، $\cos\alpha<۰$ و $\sin\alpha<۰$ باشد، حاصل عبارت $A=\sqrt{\frac{۵\sin\alpha-۲\cos\alpha}{۸\cos\alpha-۲\sin\alpha}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

۱۵ - در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین که طول ساق آن ۴ می‌باشد، طول قاعدهٔ بزرگ‌تر ۱۰ و زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ کوچک‌تر ۱۲۰ درجه است. مساحت ذوزنقه کدام است؟

① $۱۶\sqrt{۳}$

② $۱۲\sqrt{۳}$

③ $۱۰\sqrt{۳}$

④ $۸\sqrt{۳}$

۱۶ - خطی که با جهت منفی محور xها زاویهٔ ۱۳۵ درجه می‌سازد و از نقطهٔ $(-۳,۵)$ می‌گذرد، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

① ۸

② -۸

③ ۲

④ -۲

۱۷ - اگر انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\tan\alpha = -\frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\cos\alpha \cdot \cot\alpha$ کدام است؟

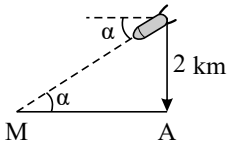
① $-\frac{۱۶}{۱۵}$

② $\frac{۱۶}{۱۵}$

③ $\frac{۸}{۵}$

④ $-\frac{۸}{۵}$

۱۸ - مطابق شکل، یک موشک در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین شلیک شده است. اگر زاویهٔ موشک با افق برابر α باشد و $\tan\alpha = ۰/۲۵$، موشک در فاصلهٔ چند کیلومتری از نقطهٔ A با زمین برخورد می‌کند؟



① ۱۶

② ۸

③ ۱۰

④ ۴

۱۹- اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$، مقدار $\cos\alpha - \sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$

۲) $-\frac{۷}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۵}$

۴) $-\frac{۱}{۵}$

۲۰- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ A قائمه و $\tan C = \frac{۵}{۱۲}$ است. حاصل $\cos B + \cos C$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۷}$

۲) $\frac{۱۷}{۱۳}$

۳) $\frac{۱۲}{۱۷}$

۴) $\frac{۱۷}{۱۲}$

۲۱- در یک متوازی‌الاضلاع یکی از اضلاع دو برابر دیگری است و یک زاویهٔ ۱۲۰° دارد. اگر مساحت آن $۹\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه محیط آن کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) $۱۲\sqrt{۳}$

۴) $۱۸\sqrt{۲}$

۲۲- مساحت یک ۶ ضلعی منتظم برابر با $۱۲\sqrt{۳}$ است. محیط آن برابر است با:

۱) ۱۲

۲) $۱۲\sqrt{۲}$

۳) $۱۲\sqrt{۳}$

۴) ۲۴

۲۳ - کدام نامساوی نادرست است؟

۱) $\cos ۵۰^\circ > \cos ۷۰^\circ$

۲) $\cos ۱۴۰^\circ < \cos ۱۷۵^\circ$

۳) $\cos ۱۸۰^\circ < \cos ۹۰^\circ$

۴) $\cos ۲۵۰^\circ > \cos ۲۱۰^\circ$

۲۴ - اگر $\cos x = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، مقدار $\cot x$ کدام است؟

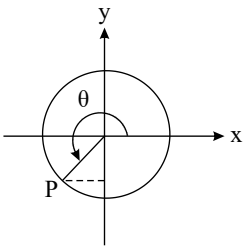
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{-۲}{۳}$

۴) $\frac{-\sqrt{۵}}{۲}$

۲۵ - در دایرهٔ مثلثاتی زیر $y_P = \frac{-۳}{۵}$ است. $\cot \theta$ چقدر است؟



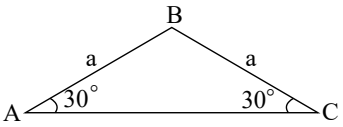
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۶ - مساحت مثلث متساوی‌الساقین زیر برابر $۱۶\sqrt{۳}$ است. در این صورت مقدار a کدام است؟



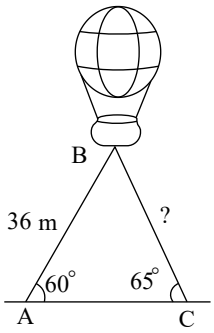
۱) ۸

۲) ۴

۳) $۴\sqrt{۳}$

۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۷ - یک بالن مطابق شکل زیر با دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب اول ۳۶ متر است. طول طناب دوم چقدر است؟ ($\sin 65^\circ \simeq 0/9$)



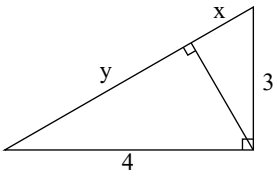
① $\frac{40\sqrt{3}}{3}$

② $20\sqrt{3}$

③ $18\sqrt{3}$

④ $\frac{50\sqrt{3}}{3}$

۲۸ - در شکل زیر، نسبت x به y کدام است؟



① $\frac{16}{9}$

② $\frac{9}{5}$

③ $\frac{9}{16}$

④ $\frac{5}{9}$

۲۹ - اگر $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\tan\theta + \cot\theta$ کدام گزینه است؟

① $\frac{12}{25}$

② $-\frac{12}{25}$

③ $\frac{25}{12}$

④ $-\frac{25}{12}$

۳۰ - فرض کنیم $\cos\beta = \frac{-4}{5}$ باشد، $180^\circ - \beta$ در کدام ربع‌های می‌تواند قرار بگیرد؟ ($0 < \beta < 360^\circ$)

① سوم یا چهارم

② اول یا چهارم

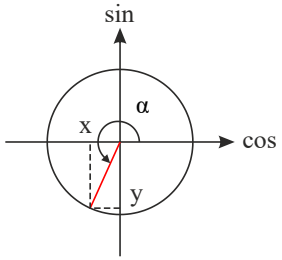
③ دوم یا سوم

④ اول یا دوم

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\begin{cases}\sin\theta<۰\\ \cos\theta<۰\end{cases}$ ربع سوم ، $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، رابطه فیثاغورس در دایره مثلثاتی $x^۲+y^۲=۱$



زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد و ضلع انتهایی آن دایرهٔ مثلثاتی را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند. بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس عرض نقطه برابر است با:

$$(\frac{۱}{۴})^۲+y^۲=۱^۲\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=\frac{۱۵}{۱۶}\xrightarrow[y<۰]{\alpha\text{ در ناحیهٔ سوم}}y=-\sqrt{\frac{۱۵}{۱۶}}=-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\sin\alpha=y=-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴},\ \cos\alpha=x=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}}{-\frac{۱}{۴}}=\sqrt{۱۵}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۱۵}+۸\times(-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴})}{-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۵}-۲\sqrt{۱۵}}{-\frac{۱}{۴}}=\frac{-\sqrt{۱۵}}{-\frac{۱}{۴}}=۴\sqrt{۱۵}$$

۲ ـ گزینه ۳

می‌دانیم:

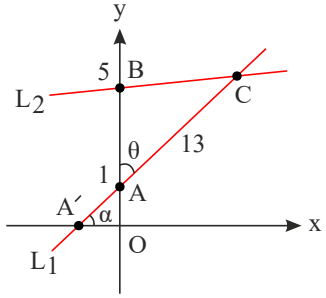
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot\sin\theta\quad(\theta:\text{زاویه بین }AC,\ AB)$$

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد $=\tan\alpha$

می‌دانیم مساحت مثلث از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot\sin\theta\Rightarrow ۲۴=\frac{۱}{۲}(۵-۱)\times ۱۳\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$



در مثلث $AA'O$ داریم:

$$\begin{cases}\hat{A}=\theta\ ,\ \sin\theta=\dfrac{OA'}{AA'}\\ \hat{A'}=\alpha\ ,\ \cos\alpha=\dfrac{OA'}{AA'}\end{cases}\Rightarrow\sin\theta=\cos\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$$

با توجه به اینکه شیب خط برابر است با تانژانت زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها، بنابراین کافیست $\tan\alpha$ را به دست آوریم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\xrightarrow{\tan\alpha>۰}\tan\alpha=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}-۱}=\sqrt{\frac{۱}{(\frac{۱۲}{۱۳})^۲}-۱}=\frac{۵}{۱۲}$$

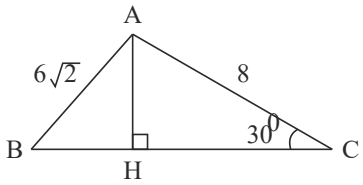
۳ ـ گزینه ۳

می‌دانیم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC\times\sin\theta\quad(\theta:\text{زاویه بین }AC,\ AB)$$

$$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}\ ,\ \cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم:



$$\sin۳۰^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۴$$

$$\cos۳۰^\circ=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{CH}{۸}\Rightarrow CH=۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow BH^۲=AB^۲-AH^۲=(۶\sqrt{۲})^۲-۴^۲=۳۶(۲)-۱۶=۷۲-۱۶=۵۶$$

$$\Rightarrow BH=\sqrt{۸\times۷}\Rightarrow BH=۲\sqrt{۱۴}$$

$$BC=BH+CH=۲\sqrt{۱۴}+۴\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin۳۰^\circ\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}(۸)(۲\sqrt{۱۴}+۴\sqrt{۳})\frac{۱}{۲}=۴(\sqrt{۱۴}+۲\sqrt{۳})$$

۴ ـ گزینه ۴

می‌دانیم: $-۱\le\cos\theta\le۱\ ,\ -۱\le\sin\theta\le۱$

برای هر زاویهٔ α و β می‌دانیم:

$$-۱\le\cos\beta\le۱\quad(I)$$

$$-۱\le\sin\alpha\le۱\Rightarrow-۲\le-۲\sin\alpha\le۲\quad(II)$$

$$\xrightarrow{(I)+(II)}-۳\le\cos\beta-۲\sin\alpha\le۳\xrightarrow{\times\frac{۱}{۵}}-\frac{۳}{۵}\le\underbrace{\frac{\cos\beta-۲\sin\alpha}{۵}}_{\sin\theta}\le\frac{۳}{۵}$$

$$-\frac{۳}{۵}\le\sin\theta\le\frac{۳}{۵}$$

با توجه به حدود بدست آمده برای $\sin\theta$، نمی‌تواند $-\frac{۷}{۱۰}$ باشد.

۵ ـ گزینه ۴

میدانیم:

شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد

شیب خط گذرا از نقاط $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ برابر است با

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

$$\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta$$

با توجه به شکل، خط از دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(۳,۰)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$m=\frac{۲-۰}{۰-۳}=\frac{-۲}{۳}$$

$$m=\tan\theta=\frac{-۲}{۳}$$

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱+(\frac{-۲}{۳})^۲=۱+\frac{۴}{۹}=\frac{۱۳}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow \cos^۲\theta=\frac{۹}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\xrightarrow{\theta \text{ ربع دوم}}\cos\theta=-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

۶ - گزینه ۳

می‌دانیم: شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد

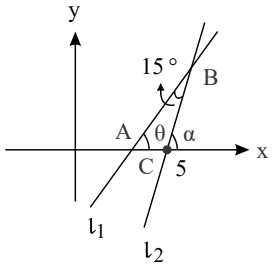
شیب خط گذرا از نقاط $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ برابر است با $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر با مجموع زوایای داخلی غیرمجاور است.

ابتدا به کمک شیب خط $L_۱$، زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها را تعیین می‌کنیم.

$$\sqrt{۳}x-۳y=۵\Rightarrow L_۱ \text{ شیب خط}: m_۱=\frac{-\sqrt{۳}}{-۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\theta=۳۰^\circ$$



در مثلث ABC، داریم:

$$\hat{\alpha}=\hat{A}+\hat{B}=۳۰^\circ+۱۵^\circ=۴۵^\circ\Rightarrow L_۲ \text{ شیب خط}: m_۲=\tan ۴۵^\circ=۱$$

چون خط $L_۲$ از نقطهٔ $(۵,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن عبارت است از:

$$y-۰=۱(x-۵)\Rightarrow y=x-۵$$

۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت شیب محور xها زاویهٔ α بسازد برابر است با $m=\tan\alpha$

$$\alpha\begin{cases}\sin\alpha>۰\\ \cos\alpha<۰\end{cases}\quad \text{ناحیه دوم}\qquad \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

معادلهٔ خط با شیب m گذرا از نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$: $y-y_۰=m(x-x_۰)$

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^۲=۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۲۵}{۱۶۹}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۵}{۱۳}\xrightarrow{\alpha \text{ ربع دوم}}\cos\alpha=-\frac{۵}{۱۳}$$

$$m=\tan\alpha=\frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{-\frac{۵}{۱۳}}=-\frac{۱۲}{۵}$$

$$y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow[(x_۰,y_۰)=(\frac{۱}{۲},۰)]{m=\frac{-۱۲}{۵}}y-۰=\frac{-۱۲}{۵}(x-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۱۲x}{۵}+\frac{۱۲}{۲\times۵}\Rightarrow ۵y=-۱۲x+۶\Rightarrow ۵y=۶-۱۲x$$

۸ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{cos^۲\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$$

$$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$$

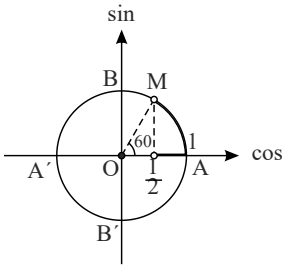
$$(۱+\tan\alpha)(۱+\cot\alpha)-\frac{۱}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=(۱+\tan\alpha)(۱+\frac{۱}{\tan\alpha})-\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=۱+\tan\alpha+\frac{۱}{\tan\alpha}+\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha}-\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=۱+\frac{\tan^۲+۱}{\tan\alpha}+۱-\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=۲+\frac{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}}{\tan\alpha}-\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=۲+\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=۲+\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=۲$$

۹ - گزینه ۴



$$۰^\circ \le \alpha < ۳۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ \le ۲\alpha < ۶۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \cos ۲\alpha \le ۱$$

$$\xrightarrow{\cos ۲\alpha = \frac{-۲m+۱}{۳}} \frac{۱}{۲} < \frac{-۲m+۱}{۳} \le ۱ \Rightarrow ۳ < -۴m + ۲ \le ۶$$

$$\xrightarrow{-۲} ۱ < -۴m \le ۴ \Rightarrow -\frac{۱}{۴} > m \ge -۱ \Rightarrow -۱ \le m < -\frac{۱}{۴}$$

۱۰ - گزینه ۴

می‌دانیم:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

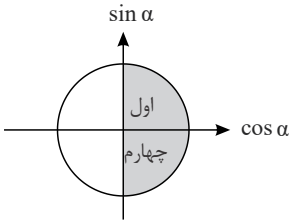
$$\frac{۲}{۱ - (\sin\alpha + \cos\alpha)^۲} = \frac{۲}{۱ - (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha + ۲\sin\alpha\cos\alpha)} = \frac{-\sin^۲\alpha - \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{-\sin^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -\tan\alpha - \cot\alpha = -(\tan\alpha + \cot\alpha)$$

۱۱ - گزینه ۳

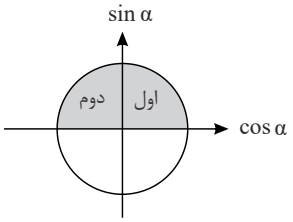
$$\tan\alpha\sin\alpha > ۰ \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \sin\alpha > ۰ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{\sin^۲\alpha} \cos\alpha > ۰$$

$\cos\alpha > ۰ \Rightarrow$ α ربع اول و چهارم $\quad (I)$

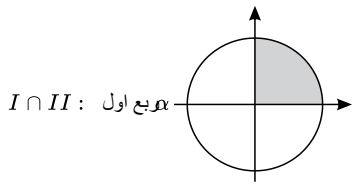


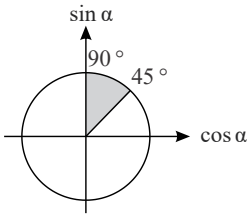
$$\sin\alpha - \cos\alpha > ۰ \Rightarrow \sin\alpha > \cos\alpha \xrightarrow{\cos\alpha > ۰} \sin\alpha > ۰$$

$\Rightarrow$ α ربع اول و دوم $\quad (II)$



$I \cap II$: α ربع اول





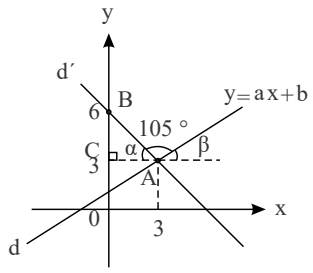
$$\sin\alpha > \cos\alpha \xrightarrow{\alpha \text{ ربع اول}} ۴۵^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$$

۱۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد برابر است با $m = \tan\alpha$

معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ b برابر است با $y = mx + b$

مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۳} = ۱ \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \alpha = ۴۵^\circ$$

زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور xها می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha + ۱۰۵^\circ + \beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha=۴۵^\circ} \beta = ۳۰^\circ$$

در اینصورت شیب خط d برابر است با:

$$m_d = \tan\beta = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

خط d از نقطهٔ $(۳,۳)$ عبور می‌کند. پس:

$$۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۳ + b \Rightarrow ۳ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow b(a+۱) = (۳ - \sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۱) = ۲$$

۱۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\tan ۴۵ = \cot ۴۵ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$A = (\tan ۵ - \cot ۵)(\tan ۶ - \cot ۶)\dots\underbrace{(\tan ۴۵ - \cot ۴۵)}_{\text{صفر}}\dots(\tan ۸۱ - \cot ۸۱) = ۰$$

۱۴ - گزینه ۴

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۷}\cos\alpha$$

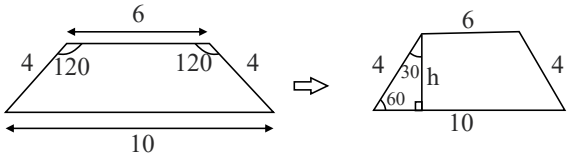
$$A = \sqrt{\frac{۵\sin\alpha - ۲\cos\alpha}{۸\cos\alpha - ۲\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{۵ \times \frac{۳}{۷}\cos\alpha - ۲\cos\alpha}{۸\cos\alpha - ۲ \times \frac{۳}{۷}\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{۱۵}{۷}\cos\alpha - \frac{۱۴}{۷}\cos\alpha}{\frac{۵۶}{۷}\cos\alpha - \frac{۶}{۷}\cos\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{۱}{۷}\cos\alpha}{\frac{۵۰}{۷}\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{۱}{۵۰}} = \sqrt{\frac{۲}{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$$

۱۵ - گزینه ۱

می‌دانیم: $S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{۲}$ و $\sin\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}$

مثلثات



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{h}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow h = ۲\sqrt{۳}$$

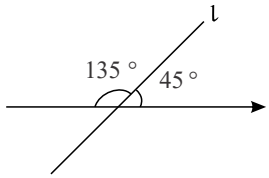
$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{(۱۰ + ۶) \times ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۱۶\sqrt{۳}$$

۱۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: **شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد برابر است با $\tan\alpha$**

معادلهٔ خط با شیب m و گذرا از نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ برابر است با: $y - y_۰ = m(x - x_۰)$

خطی که با جهت منفی محور xها زاویهٔ ۱۳۵ درجه می‌سازد، با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵ می‌سازد.



$$\Rightarrow m = \tan ۴۵ = ۱$$

$$y - ۵ = ۱(x + ۳) \Rightarrow y = x + ۸$$

طول تلاقی با محور xها $x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = -۸$

۱۷ - گزینه ۱

می‌دانیم:

ربع چهارم α $\begin{cases} \sin\alpha < ۰ \\ \cos\alpha > ۰ \end{cases}$

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha}$$

$$\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + \tan^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + \frac{۹}{۱۶}} = \frac{۱}{\frac{۱۶}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶}} = \frac{۱}{\frac{۲۵}{۱۶}} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

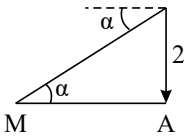
$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۴}{۵} \xrightarrow[\cos\alpha > ۰]{\alpha \text{ ربع چهارم}} \cos\alpha = \frac{۴}{۵}$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{-\frac{۳}{۴}} = \frac{-۴}{۳}$$

$$\cos\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{۴}{۵} \times \frac{-۴}{۳} = \frac{-۱۶}{۱۵}$$

۱۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: در مثلث قائم‌الزاویه داریم : $\tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$



$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{۲}{AM} = ۰/۲۵ \Rightarrow AM = ۸km$$

۱۹ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \ , \ ۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$۹۰ < \alpha < ۱۸۰ \rightarrow \text{ربع دوم } \{\sin\alpha > ۰ \ , \ \cos\alpha < ۰$$

$$\frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + \tan^۲\theta \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۶ + ۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶}$$

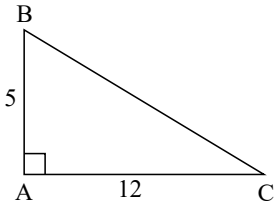
$$\cos^۲\theta = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۴}{۵} \xrightarrow{\alpha \text{ ربع سوم}} \cos\theta = \frac{-۴}{۵}$$

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow \sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta=۱-(\frac{-۴}{۵})^۲=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\sin^۲\theta=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow \sin\theta=\pm\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\alpha \text{ ربع سوم}}\sin\theta=\frac{۳}{۵}$$

$$\cos\theta-\sin\theta=\frac{-۴}{۵}-\frac{۳}{۵}=\frac{-۷}{۵}$$

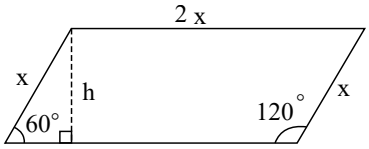
۲۰ - گزینه ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با فرض $AB=۵$ و $AC=۱۲$ مطابق شکل داریم:



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow BC=\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

$$\begin{cases}\cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{۵}{۱۳}\\ \cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{۱۲}{۱۳}\end{cases}\Rightarrow \cos B+\cos C=\frac{۵}{۱۳}+\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۱۷}{۱۳}$$

۲۱ - گزینه ۲ با رسم ارتفاع h در متوازی‌الاضلاع داریم:



$$\sin ۶۰^\circ=\frac{h}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{h}{x}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x$$

$$S=۲xh=۲x\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}x=\sqrt{۳}x^۲=۹\sqrt{۳}\Rightarrow x^۲=\frac{۹\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۹\Rightarrow x=\pm۳\Rightarrow x=۳$$

$$P=۲(x+۲x)=۶x=۶\times۳=۱۸$$

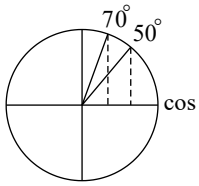
۲۲ - گزینه ۲ یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع a، از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است که مساحت هر کدام از آنها $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم}=۶(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴})=\frac{۳}{۲}a^۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{۳}{۲}a^۲\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۸\Rightarrow a=۲\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط ۶ ضلعی منتظم}=P: ۶a=۶(۲\sqrt{۲})=۱۲\sqrt{۲}$$

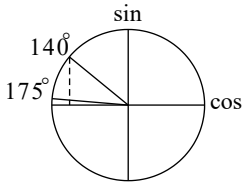
۲۳ - گزینه ۲ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:

درست (گزینهٔ ۱)



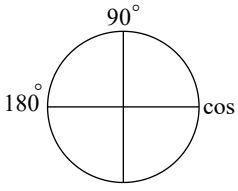
$\cos ۵۰^\circ>\cos ۷۰^\circ$

نادرست (گزینهٔ ۲)



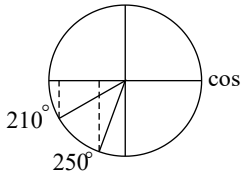
$\cos ۱۴۰^\circ>\cos ۱۷۵^\circ$

درست (گزینهٔ ۳)



$\cos ۱۸۰^\circ<\cos ۹۰^\circ$

درست (گزینهٔ ۴)



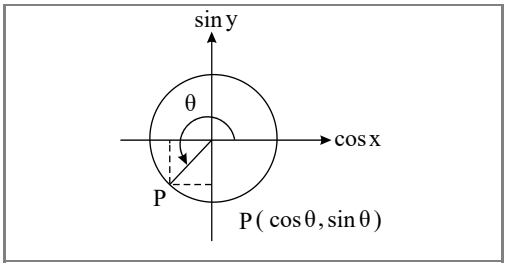
$\cos ۲۱۰^\circ<\cos ۲۵۰^\circ$

۲۴ - گزینه ۴

$$\cos x=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\Rightarrow \sin x=\pm\sqrt{۱-\frac{۵}{۹}}=\pm\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\pm\frac{۲}{۳}\xrightarrow[\sin x<۰]{x \text{ ربع چهارم}}\sin x=-\frac{۲}{۳}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{-\frac{۲}{۳}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۲۵ - گزینه ۲ می‌دانیم:

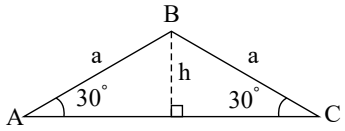


$$y_P = \frac{-۳}{۵}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = \pm\sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \pm\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \pm\frac{۴}{۵} \xrightarrow[\cos\theta < ۰]{\theta \text{ ربع سوم}} \cos\theta = -\frac{۴}{۵}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$$

۲۶ - گزینه ۱



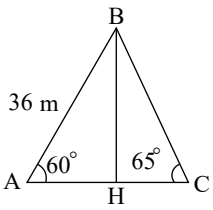
$$h = \frac{a}{۲} \Rightarrow \frac{AC}{۲} = \sqrt{a^۲ - \frac{a^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}a}{۲} \Rightarrow AC = \sqrt{۳}a$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳}a \times \frac{a}{۲} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۱۶\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶۴ \Rightarrow a = ۸$$

۲۷ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

با رسم ارتفاع BH داریم:



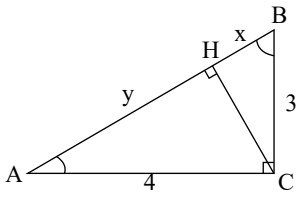
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۳۶} \Rightarrow BH = ۱۸\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow ۰/۹ = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{۰/۹} = ۱۸\sqrt{۳} \times \frac{۱۰}{۹} = ۲۰\sqrt{۳}$$

۲۸ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:



$$AB^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵ \Rightarrow x + y = ۵ \ (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC:\ \cos\hat{B} = \frac{۳}{۵} \\ \triangle BCH:\ \cos\hat{B} = \frac{x}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{x}{۳} \Rightarrow x = \frac{۹}{۵} \ (II)$$

$$\xrightarrow{(I)\ ,\ (II)} \frac{۹}{۵} + y = ۵ \Rightarrow y = ۵ - \frac{۹}{۵} = \frac{۲۵ - ۹}{۵} = \frac{۱۶}{۵}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۱۶}{۵}}=\frac{۹}{۱۶}$$

۲۹ ـ گزینه ۴

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}=(\frac{۱}{۵})^{۲}\Rightarrow\underbrace{\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta}_{۱}+۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow ۱+۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow ۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲۵}-۱\Rightarrow ۲\sin\theta\cos\theta=\frac{-۲۴}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{-۱۲}{۲۵}$$

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{۱}{\frac{-۱۲}{۲۵}}=\frac{-۲۵}{۱۲}$$

۳۰ ـ گزینه ۲

$$\cos\beta<۰\rightarrow\begin{cases}\text{ربع دوم}\beta\ \Rightarrow\ ۹۰^{\circ}<\beta<۱۸۰^{\circ}\ \Rightarrow\ ۰^{\circ}<۱۸۰^{\circ}-\beta<۹۰^{\circ}\Rightarrow\text{ ربع اول}\\ \text{ربع سوم}\beta\ \Rightarrow\ ۱۸۰^{\circ}<\beta<۲۷۰^{\circ}\ \Rightarrow\ -۹۰^{\circ}<۱۸۰^{\circ}-\beta<۰^{\circ}\Rightarrow\text{ ربع چهارم}\end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۳ - ۶	۳ - ۱۱	۲ - ۱۶	۲ - ۲۱	۱ - ۲۶
۳ - ۲	۲ - ۷	۳ - ۱۲	۱ - ۱۷	۲ - ۲۲	۲ - ۲۷
۳ - ۳	۱ - ۸	۴ - ۱۳	۲ - ۱۸	۲ - ۲۳	۳ - ۲۸
۴ - ۴	۴ - ۹	۴ - ۱۴	۲ - ۱۹	۴ - ۲۴	۴ - ۲۹
۴ - ۵	۴ - ۱۰	۱ - ۱۵	۲ - ۲۰	۲ - ۲۵	۲ - ۳۰