نام آزمون: مثلثات

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - اگر θ زاویه‌ای در ربع سوم مثلثاتی باشد به طوری که $\sin\theta = -\frac{۲}{۳}$، آنگاه مقدار $\cot\theta + \tan\theta$ کدام است؟

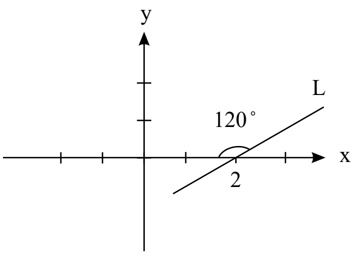
① $۱/۲\sqrt{۵}$

② $۲/۸\sqrt{۵}$

③ $۰/۹\sqrt{۵}$

④ $۰/۷\sqrt{۵}$

۲ - مطابق شکل زیر، اگر خط L از نقطهٔ $(۳, a)$ بگذرد، a کدام است؟



① ۲

② $\sqrt{۳}$

③ ۱

④ $\sqrt{۲}$

۳ - خطی که زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور xها ۴۵° بوده و از نقطه‌ی $(۳, ۲)$ عبور کند، محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

① ۱

② -۱

③ ۵

④ صفر

۴ - اگر $۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۱ - ۲m}{۳}$ باشد، حدود m کدام بازه است؟

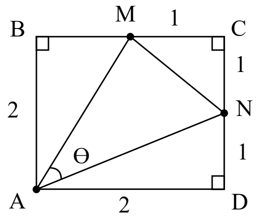
① $(۰, \frac{۱}{۴})$

② $(\frac{۱}{۲}, ۲)$

③ $(-۱, ۰)$

④ $(-۲, ۲)$

۵ - باتوجه به مربع بودن شکل زیر، حاصل $\sin\theta$ کدام است؟



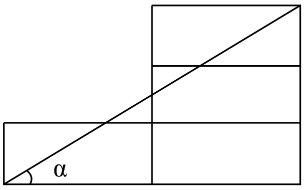
① $\frac{۱}{۳}$

② $\frac{۲}{۳}$

③ $\frac{۳}{۵}$

④ $\frac{۲}{۵}$

۶ - در شکل مقابل، هر کاشی یک مستطیل ۲×۱ است. مقدار $\cos\alpha$ چه عددی است؟



① $\frac{۳}{۵}$

② $\frac{۴}{۵}$

③ $\frac{۱۶}{۲۵}$

④ $\frac{۹}{۲۵}$

۷ - اگر $\sin\alpha\cos\alpha > ۰ , \cos\alpha\cot\alpha < ۰$ انتهای کمان در کدام ناحیه قرار دارد؟

① اول

② دوم

③ سوم

④ چهارم

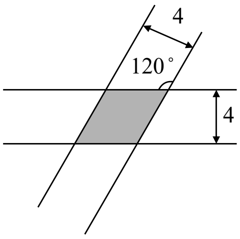
۸ - اگر $\tan x = \frac{a^۲ - ۱}{a} , cotx = \frac{۲a}{۱ - a}$ مقدار a کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$

② $-\frac{۱}{۲}$

③ $\frac{۳}{۲}$

④ $-\frac{۳}{۲}$



۹ - در شکل مقابل، خطوط موازی به فاصله‌ی ۴ از یکدیگر می‌باشند. مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

① $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

② $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$

③ $\frac{۳۲\sqrt{۳}}{۳}$

④ $\frac{۴۸\sqrt{۳}}{۳}$

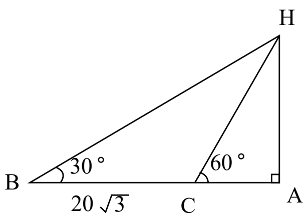
۱۰ - اگر $\tan\alpha > \cot\alpha, \tan\beta < \cot\beta$ آنگاه α, β کدام می‌توانند باشند؟

① $\alpha = ۴۰^\circ, \beta = ۵۰^\circ$

② $\alpha = ۵۰^\circ, \beta = ۴۰^\circ$

③ $\alpha = ۱۰^\circ, \beta = ۲۰^\circ$

④ $\alpha = ۲۰^\circ, \beta = ۱۰^\circ$



۱۱ - در شکل مقابل، اندازه‌ی AH کدام است؟

① ۶۰

② ۲۰

③ ۳۰

④ ۴۰

۱۲ - اگر $\sin\theta = -\frac{۳}{۵}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \frac{\cos\theta + \tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ کدام است؟

① $-\frac{۵}{۴۸}$

② $\frac{۵}{۴۸}$

③ $-\frac{۵}{۳}$

④ قابل تعیین نیست.

۱۳ - حاصل عبارت تعریف شدهٔ $(\cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha)(۱ + \tan^۲\alpha) + \tan^۲\alpha$ کدام است؟

① صفر
② ۱
③ ۲
④ ۳

۱۴ - حاصل عبارت تعریف شدهٔ A کدام است؟

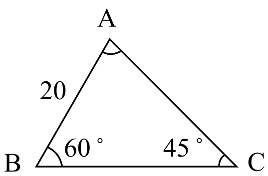
$$A = \frac{\sin x}{۱ + \cos x} + \frac{\cos x}{۱ + \sin x} + \tan x + \cot x$$

① ۲
② $\frac{۱}{\cos x} + \frac{۱}{\sin x}$
③ ۱
④ $\sin x + \cos x$

۱۵ - اگر $\cot\alpha = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\sin^۲\alpha - \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$ کدام است؟

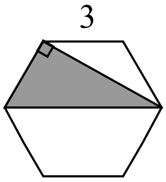
① $\frac{۷}{۱۱}$
② $\frac{۱۰}{۱۷}$
③ $\frac{۹}{۵}$
④ $\frac{۱۳}{۶}$

۱۶ - در شکل مقابل طول ضلع AC کدام است؟



① $۲۰\sqrt{۳}$
② $۲۰\sqrt{۲}$
③ $۲۰\sqrt{۶}$
④ $۱۰\sqrt{۶}$

۱۷ – مساحت قسمت هاشورخورده در شش‌ضلعی منتظم مقابل چقدر است؟



① $\frac{۹}{۲}$

② $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

③ ۳

④ $۳\sqrt{۳}$

۱۸ – شخصی از پایین یک برج ۵۰ متری، بالای یک برج دیگر را نسبت به افق با زاویهٔ ۶۰° می‌بیند. سپس از بالای همان برج ۵۰ متری، بالای آن برج دیگر را با زاویهٔ ۳۰° می‌بیند. اگر با چشم‌پوشی از قد شخص، چشم ناظر را هم‌سطح زمین در نظر بگیریم، ارتفاع برج دیگر چند متر است؟ (ارتفاع برج دیگر بیشتر از ۵۰ متر است.)

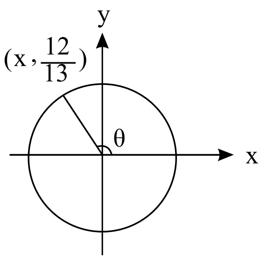
① ۶۵

② ۷۵

③ ۸۰

④ ۸۵

۱۹ – با توجه به دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، مقدار $\tan\theta$ کدام است؟



① $\frac{۱۲}{۵}$

② $-\frac{۵}{۱۲}$

③ $\frac{۵}{۱۲}$

④ $-\frac{۱۲}{۵}$

۲۰- اگر $\sqrt{۳} = \tan ۲۴۰^\circ$ باشد، حاصل $\dfrac{\sin ۲۴۰^\circ}{۱+\cos ۲۴۰^\circ}$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{۳}$

(۲) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$

(۳) $-\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$

(۴) $\sqrt{۳}$

۲۱- اگر $\tan x + \cot x = \dfrac{۵}{۲}$ باشد، حاصل $\tan^۲ x + \cot^۲ x$ کدام است؟

(۱) $\dfrac{۹}{۴}$

(۲) $\dfrac{۱۷}{۴}$

(۳) $\dfrac{۷}{۴}$

(۴) ۲

۲۲- اگر $\cot\alpha = ۲$ و $\cos\alpha < ۰$ باشد، حاصل $\sqrt{۵}(\cos\alpha - ۲\sin\alpha)$ کدام است؟

(۱) -۵

(۲) -۴

(۳) صفر

(۴) ۳

۲۳- حاصل $(\dfrac{۱}{۱-\sin x} - ۱)(\dfrac{۱}{\cos x} - \tan x)$ با فرض با معنی بودن هر کسر کدام است؟

(۱) $\tan x$

(۲) $-\tan x$

(۳) $-\cot x$

(۴) $\cot x$

۲۴ – معادلهٔ خطی که با خط $y = \sqrt{۳}x + ۴$ زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و از نقطهٔ $(-۱, ۱)$ می‌گذرد، کدام می‌تواند باشد؟

① $y = ۱$

② $۳y - \sqrt{۳}x - (۳ + \sqrt{۳}) = ۰$

③ $y + \sqrt{۳}x + (\sqrt{۳} - ۱) = ۰$

④ $۳y - \sqrt{۳}x + (۳ + \sqrt{۳}) = ۰$

۲۵ – اندازهٔ وتر و یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، به‌ترتیب $\frac{۱}{\cos ۴۰^\circ}$ و $\tan ۴۰^\circ$ می‌باشد. اندازهٔ ضلع دیگر آن چقدر است؟

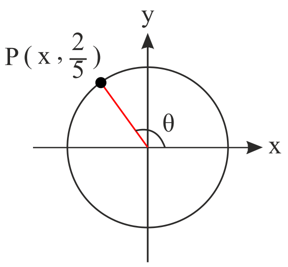
① ۱

② ۲

③ $\frac{۱}{\sin ۴۰^\circ}$

④ $\cot ۴۰^\circ$

۲۶ – اگر انتهای کمان روبه‌رو زاویهٔ θ روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل روبه‌رو، نقطه‌ای به مختصات $P(x, \frac{۲}{۵})$ باشد، $\cot\theta$ چند برابر $\sqrt{۲۱}$ است؟



① $\frac{۱}{۲}$

② $-\frac{۱}{۲}$

③ $\frac{۲}{۲۱}$

④ $-\frac{۲}{۲۱}$

۲۷ – حاصل عبارت $\frac{۱ - \sin ۱۵^\circ}{۱ + \sin ۱۵^\circ} - \frac{۱ + \sin ۱۵^\circ}{۱ - \sin ۱۵^\circ}$ کدام است؟

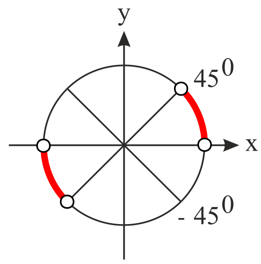
① $\frac{۴\cos ۱۵^\circ}{\sin^۲ ۱۵^\circ}$

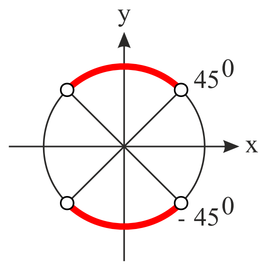
② $\frac{۴\sin ۱۵^\circ}{\cos^۲ ۱۵^\circ}$

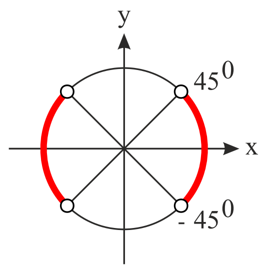
③ $\frac{۲\sin^۲ ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}$

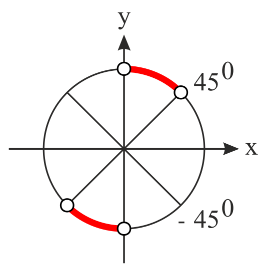
④ $\frac{۲\sin ۱۵^\circ}{\cos^۲ ۱۵^\circ}$

۲۸ - در کدام بخش از دایرهٔ مثلثاتی، نابرابری $\cot\alpha > \tan\alpha > 0$ برقرار است؟

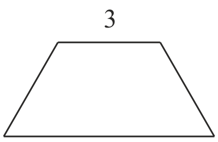
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۹ - اگر ذوزنقهٔ مقابل از نصف نمودن یک شش ضلعی منتظم به وجود آمده باشد، در این صورت مساحت آن کدام است؟



۱) $27\sqrt{3}$

۲) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$

۴) $27\sqrt{2}$

۳۰- اگر داشته باشیم $\cos\alpha + \cot\alpha < 0$ و $\cos^{3}\alpha \cdot \cot\alpha > 0$ آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$ در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی، کسینوس منفی است.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \frac{4}{9}+\cos^2\theta=1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\xrightarrow{\sqrt{}}\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\xrightarrow{\text{ربع سوم}}\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\[2ex] \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \cot\theta+\tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{4\sqrt{5}+5\sqrt{5}}{10}=\frac{9\sqrt{5}}{10}=0{,}9\sqrt{5}$$

۲ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

خط با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 60° می‌سازد. پس:

$$\text{شیب}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

پس معادلهٔ خط به فرم $y=\sqrt{3}x+h$ خواهد بود. از طرفی نقطهٔ $(2,0)$ روی خط واقع است. پس:

$$\Rightarrow 0=\sqrt{3}\times 2+h\Rightarrow h=-2\sqrt{3}$$

و معادلهٔ خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$$

حال مختصات $(3,a)$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$a=\sqrt{3}\times 3-2\sqrt{3}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

۳ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.
معادلهٔ خطی که با شیب m از نقطهٔ (x_0,y_0) می‌گذرد، به‌صورت $y-y_0=m(x-x_0)$ است.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{شیب}=m=\tan 45^\circ=1\\ (3,2)\quad\text{نقطه‌ی}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{معادله‌ی خط}: y-2=1\times(x-3)\Rightarrow y-2=x-3$$

$$\Rightarrow y=x-1\xrightarrow{x=0}y=-1$$

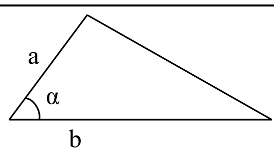
۴ ـ گزینه ۲ بازهٔ $(180^\circ, 270^\circ)$ ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی است و در این بازه داریم:

$$-1<\cos\alpha<0\Rightarrow -1<\frac{1-2x}{3}<0\xrightarrow{\times 3}-3<1-2x<0\xrightarrow{-1}-4<-2x<-1$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})}2>x>\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$$

۵ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: در هر مثلث دلخواه به فرم زیر داریم:



$$S=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\alpha$$

باتوجه به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABM}$، $\overset{\triangle}{ADN}$ و $\overset{\triangle}{MNC}$ داریم:

$$AM = AN = \sqrt{۵}\ ,\ \ MN = \sqrt{۲}$$

از طرفی داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۱}{۲}\times AM \times AN \times \sin\theta$$

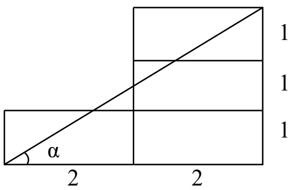
$$\xrightarrow{S_{\overset{\triangle}{AMN}}=S_{ABCD}-(S_{\overset{\triangle}{ABM}}+S_{\overset{\triangle}{ADN}}+S_{\overset{\triangle}{MNC}})} (۴-(۱+۱+\frac{۱}{۲})) = \frac{۱}{۲}\times\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}\times\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{\cancel{۲}} = \frac{\sqrt{۲۵}}{\cancel{۲}}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۳}{۵}$$

۶ ـ گزینه ۲

می‌دانیم:

> **در مثلث قائم‌الزاویه برای هر زاویهٔ حاده α داریم:** $\tan\alpha = \dfrac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$
>
> $۱+\tan^۲\alpha = \dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$



$$\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱+\tan^۲\alpha = ۱+\frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۶+۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \xrightarrow{\text{معکوس}} \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} \cos\alpha = \pm ۴ \xrightarrow{\text{حاده}:\alpha} \cos\alpha = \frac{۴}{۵}$$

۷ ـ گزینه ۳

می‌دانیم:

> $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
>
> **در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی، مقادیر سینوس و کسینوس منفی هستند.**

$$cos\alpha\cot\alpha < ۰ \Rightarrow \cos\alpha\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < ۰ \Rightarrow \frac{\cos^۲\alpha}{\sin\alpha} < ۰ \Rightarrow \frac{+}{\sin\alpha} < ۰ \Rightarrow \sin\alpha < ۰$$

در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی، مقادیر سینوس و کسینوس منفی هستند.

$$\sin\alpha\cos\alpha > ۰ \xrightarrow{\sin\alpha<۰} -\times\cos\alpha > ۰ \Rightarrow \cos\alpha < ۰$$

ناحیه‌ای از دایره که سینوس و کسینوس در آن منفی هستند، ناحیهٔ سوم است.

۸ ـ گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\tan x\times\cot x = ۱}$

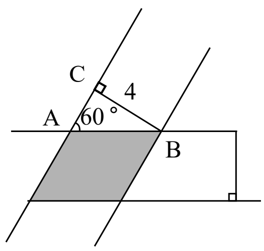
$$tanx\times\cot x = \frac{a^۲-۱}{a}\times\frac{۲a}{۱-a} = ۱ \Rightarrow \frac{(a-۱)(a+۱)}{a}\times\frac{۲a}{۱-a} = ۱$$

$$\Rightarrow -۲(a-۱) = ۱ \Rightarrow -۲a-۲ = ۱ \Rightarrow -۲a = ۳ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

۹ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\text{طول ارتفاع} \times \text{طول قاعده} = \text{مساحت متوازی الاضلاع}}$

ابتدا اندازهٔ ضلع متوازی‌الاضلاع را می‌یابیم:



$$\overset{\triangle}{ABC}\ : \sin ۶۰^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۴}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

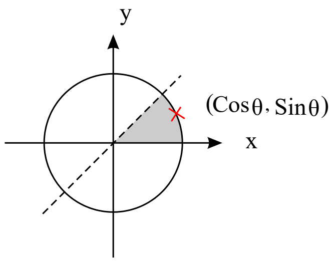
بنابراین طول ضلع این متوازی‌الاضلاع برابر $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$ است. با توجه به اینکه ارتفاع آن برابر ۴ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$S=\frac{8}{\sqrt{3}}\times 4=\frac{32}{\sqrt{3}}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$$

۱۰ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

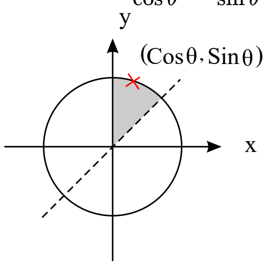
تمامی زوایای داده شده در گزینه‌ها در ربع اول می باشد، پس فقط به بررسی این ناحیه می‌پردازیم:

در نیمهٔ اول ربع اول $(0^\circ<\theta<45^\circ)$، داریم:



$$\sin\theta<\cos\theta\Rightarrow \sin^2\theta<\cos^2\theta\xrightarrow{\div\sin\theta\cos\theta>0}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow\tan\theta<\cot\theta$$

همچنین در نیمهٔ دوم ربع اول $(45^\circ<\theta<90^\circ)$، داریم:



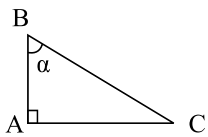
$$sin\theta>cos\theta\Rightarrow sin^2\theta>\cos^2\theta\xrightarrow{\div\sin\theta\cos\theta>0}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}>\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow\tan\theta>\cot\theta$$

با توجه به اینکه $\tan\beta<\cot\beta$ و $\tan\alpha>\cot\alpha$، نتیجه می‌گیریم α در نیمهٔ دوم و β در نیمهٔ اول ربع اول است. یعنی $\alpha>45^\circ$ و $\beta<45^\circ$، با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۱ - گزینه ۳

می‌دانیم:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل داریم:



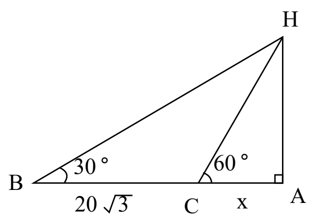
$$\sin\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}=\frac{AC}{BC}$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}=\frac{AC}{AB}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}=\frac{AB}{BC}$$

$$\cot\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}}=\frac{AC}{AB}$$

فرض کنیم $AC=x$ به کمک تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم:



$$A\overset{\Delta}{H}B\ :\tan 30^\circ=\frac{AH}{AB}=\frac{AH}{20\sqrt{3}+x}\Rightarrow AH=(20\sqrt{3}+x)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=20+\frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$A\overset{\Delta}{H}C\ :\tan 60^\circ=\frac{AH}{AC}=\frac{AH}{x}\Rightarrow AH=x\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{AH}{\sqrt{3}}$$

با جایگذاری این مقدار در $(*)$ داریم:

$$AH=20+\frac{AH}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}AH=20\Rightarrow AH=30$$

۱۲ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\,,\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

$$A=\frac{\cos\theta+\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\dfrac{\cos^2\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}\Rightarrow A=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\quad (I)$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\Rightarrow\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

$$\xrightarrow{(I)} A=\frac{1}{-\frac{3}{5}}+\frac{1}{\frac{16}{25}}=-\frac{5}{3}+\frac{25}{16}=\frac{-80+75}{48}=-\frac{5}{48}$$

۱۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)\,,\ 1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cot^2\theta}\,,\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)(1+\tan^2\alpha)+\tan^2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\underbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}_{1}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)+\tan^2\alpha$$

$$=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\tan^2\alpha=1-\tan^2\alpha+\tan^2\alpha=1$$

۱۴ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\,,\ \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\,,\ (a-b)(a+b)=a^2-b^2}$

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\\[2ex]\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{\cos x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}=\dfrac{\cos x(1-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\end{cases}$$

$$A=\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x+\cos x}{\sin x}+\frac{1-\sin x+\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$$

۱۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\,,\ \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha\,,\ \cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}\,,\ \tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}}$

ابتدا هر یک از عبارت‌ها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\alpha-\cot\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\xrightarrow{\text{تقسیم صورت و مخرج کسر بر }\sin\alpha}\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$$

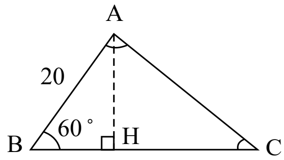
$$\text{کل عبارت}=(\tan\alpha-\cot\alpha)-\frac{\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=3}\text{کل عبارت}=3-\frac{1}{3}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=3-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{18-2-3}{6}=\frac{13}{6}$$

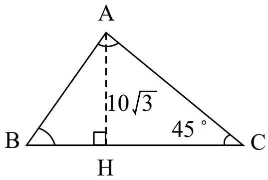
۱۶ - گزینه ۴ راه اول:

می‌دانیم: $\boxed{\sin\theta=\dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}\qquad\cos\theta=\dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}}$

با رسم ارتفاع AH داریم:



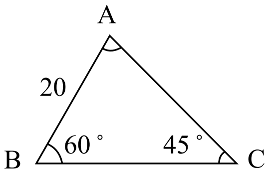
$$\sin ۶۰ = \frac{AH}{۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AH = ۱۰\sqrt{۳}$$



$$\sin ۴۵ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰\sqrt{۶}}{۲} = ۱۰\sqrt{۶}$$

راه دوم:

می‌دانیم: $\boxed{S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin\theta (\theta : AC,\ AB \text{ زاویهٔ بین})}$



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times AC \times BC \times \sin ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow AB \times \sin ۶۰ = BC \times \sin ۴۵ \Rightarrow ۲۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = BC \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow BC = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$

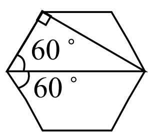
$$BC = ۲۰\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲۰\sqrt{۶}}{۲} = ۱۰\sqrt{۶}$$

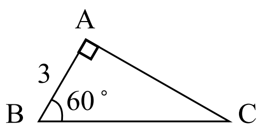
۱۷ - گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin\theta (AB, AC \text{ زاویهٔ بین } \theta) \\ n \text{ زوایای داخلی } \text{ ضلعی منتظم} = (n - ۲) \times ۱۸۰ \end{array}}$$

۶ ضلعی منتظم مجموع زوایای داخلی $= ۷۲۰^\circ \Rightarrow \frac{۷۲۰}{۶} = ۱۲۰^\circ$ هر زاویه داخلی





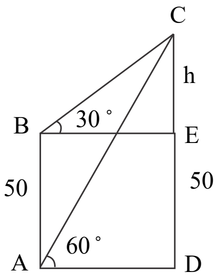
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{۳}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BC = ۶$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۸ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\tan\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}}$

در شکل مقابل در دو مثلث $A\overset{\Delta}{C}D$ و $B\overset{\Delta}{C}E$ داریم:



$$A\overset{\Delta}{C}D : \tan ۶۰^\circ = \frac{h+۵۰}{AD} \Rightarrow AD = \frac{h+۵۰}{\tan ۶۰}$$

$$B\overset{\Delta}{C}E : \tan ۳۰^\circ = \frac{h}{BE} \Rightarrow BE = \frac{h}{\tan ۳۰}$$

$$AD = BE \Rightarrow \frac{h+۵۰}{\tan ۶۰} = \frac{h}{\tan ۳۰} \Rightarrow \frac{h+۵۰}{\sqrt{۳}} = \frac{h}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}h = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(h+۵۰) \Rightarrow h = \frac{h}{۳} + \frac{۵۰}{۳} \Rightarrow h - \frac{h}{۳} = \frac{۵۰}{۳} \Rightarrow \frac{۲h}{۳} = \frac{۵۰}{۳} \Rightarrow ۲h = ۵۰ \Rightarrow h = ۲۵$$

ارتفاع ساختمان بلندتر: $h + ۵۰ = ۲۵ + ۵۰ = ۷۵$

۱۹ - گزینه ۴

می دانیم:

مختصات نقطهٔ $A(x,y)$ متناظر با زاویهٔ α روی دایرهٔ مثلثاتی به صورت $\begin{cases} y = \sin\alpha \\ x = \cos\alpha \end{cases}$ است.

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \quad , \quad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

داریم:

$$y_A = \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^۲ = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\alpha\ \text{ربع دوم}} \cos\alpha = -\frac{۵}{۱۳}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{\frac{-۵}{۱۳}} = -\frac{۱۲}{۵}$$

۲۰ - گزینه ۱

$$۱ + \tan^۲ ۲۴۰^\circ = \frac{۱}{\cos^۲ ۲۴۰^\circ} \Rightarrow ۱ + (\sqrt{۳})^۲ = ۱ + ۳ = ۴ = \frac{۱}{\cos^۲ ۲۴۰^\circ} \Rightarrow \cos^۲ ۲۴۰^\circ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos ۲۴۰^\circ = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{۲۴۰^\circ\ \text{در ربع سوم}} \cos ۲۴۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$

$$\sin^۲ ۲۴۰^\circ = ۱ - \cos^۲ ۲۴۰^\circ \Rightarrow \sin^۲ ۲۴۰^\circ = ۱ - \left(\frac{-۱}{۲}\right)^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin ۲۴۰^\circ = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{۲۴۰^\circ\ \text{در ربع سوم}} \sin ۲۴۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\frac{\sin ۲۴۰^\circ}{۱ + \cos ۲۴۰^\circ} = \frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۳}$$

۲۱ - گزینه ۲ می‌دانیم که $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲a \cdot b$ است.

$$\tan^۲ x + \cot^۲ x = (\tan x + \cot x)^۲ - ۲\tan x \cot x = \left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ - ۲ = \frac{۲۵}{۴} - ۲ = \frac{۱۷}{۴}$$

۲۲ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\begin{cases} \sin\theta < ۰ \\ \cos\theta < ۰ \end{cases} \text{ربع سوم} \quad , \quad \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \quad , \quad ۱ + \cot^۲\theta = \dfrac{۱}{\sin^۲\theta}}$

$$\frac{۱}{\sin^۲\theta} = ۱ + \cot^۲\theta \xrightarrow{\cot\theta = ۲} \frac{۱}{\sin^۲\theta} = ۱ + ۲^۲ \Rightarrow \frac{۱}{\sin^۲\theta} = ۵$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} \cot\theta > 0 \\ \cos\theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع سوم } \theta \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\theta \text{ ربع سوم}} \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}(\cos\theta - 2\sin\theta) = \sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \sqrt{5}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}(0) = 0$$

۲۳ - گزینه ۱

می دانیم: $\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$\left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right)\left(\frac{1-(1-\sin x)}{1-\sin x}\right) = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{1-\sin x}\right)$$
$$= \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{1-\sin x}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

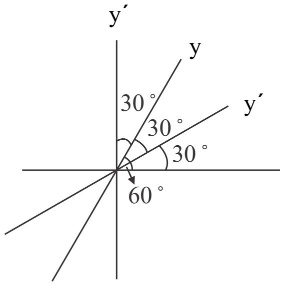
۲۴ - گزینه ۲

می دانیم:

$y = ax + b \Rightarrow a = \tan\theta$ (θ : زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد)
معادلهٔ خطی که با شیب m از نقطهٔ (x_0, y_0) می‌گذرد: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y = \sqrt{3}x + 4 \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

اگر خط مورد نظر را y' بنامیم، y' با y زاویهٔ 60° می‌سازد که یعنی با افق زاویهٔ 30° یا 90° می‌سازد. بنابراین:



$$\begin{cases} \theta_1 = 90 \xrightarrow{(-1,1)} x = -1 \quad \text{معادلهٔ خط} \\ \theta_2 = 30 \Rightarrow \begin{cases} \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ A(-1,1) \end{cases} \Rightarrow y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3y - \sqrt{3}x - \sqrt{3} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3y - \sqrt{3}x - (3 + \sqrt{3}) = 0$$

۲۵ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}$

با نوشتن رابطهٔ فیثاغورث در مثلث موردنظر داریم:

$$\frac{1}{\cos^2 40} = x^2 + \tan^2 40 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\cos^2 40} - \tan^2 40 = 1 + \tan^2 40 - \tan^2 40 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x>0} x = 1$$

۲۶ - گزینه ۲ راه اول:

می‌دانیم:

مختصات نقطهٔ $A(x,y)$ متناظر با زاویهٔ θ روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت $\begin{cases} y = \sin\theta \\ x = \cos\theta \end{cases}$ است
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ , \ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

داریم:

$$\sin\theta = \frac{2}{5}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{4}{25} = \frac{25-4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۵} \xrightarrow{\theta \text{ ربع سوم}} \cos\theta = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۵}$$

$$\cot = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{-\sqrt{۲}}{۵}}{\frac{۲}{۵}} = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۲} = \frac{-۱}{۲} \times \sqrt{۲۱} = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۲}$$

راه دوم:

می‌دانیم: $\boxed{۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}}$

$$\frac{۱}{\frac{۴}{۲۵}} = ۱ + \cot^۲\theta \Rightarrow \frac{۲۵}{۴} = ۱ + \cot^۲\theta \Rightarrow \cot^۲\theta = \frac{۲۵}{۴} - \frac{۴}{۴} = \frac{۲۱}{۴} \Rightarrow \cot\theta = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۲}$$

۲۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{۱ - \sin^۲\theta = \cos^۲\theta}$

داریم:

$$\frac{۱ + \sin ۱۵^\circ}{۱ - \sin ۱۵^\circ} - \frac{۱ - \sin ۱۵^\circ}{۱ + \sin ۱۵^\circ} = \frac{(۱ + \sin ۱۵)^۲ - (۱ - \sin ۱۵)^۲}{۱ - \sin^۲ ۱۵}$$

$$= \frac{۱ + \sin^۲ ۱۵ + ۲\sin ۱۵ - (۱ + \sin^۲ ۱۵ - ۲\sin ۱۵)}{\cos^۲ ۱۵} = \frac{۴\sin ۱۵}{\cos^۲ ۱۵}$$

۲۸ - گزینه ۱

می‌دانیم:

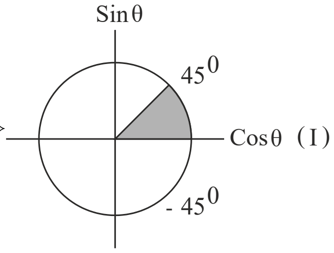
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ربع اول} \begin{cases} \sin\theta > ۰ \\ \cos\theta > ۰ \end{cases} \Rightarrow \tan\theta > ۰ ,\ \cot\theta > ۰ \\ \text{ربع سوم} \begin{cases} \sin\theta < ۰ \\ \cos\theta < ۰ \end{cases} \Rightarrow \tan\theta > ۰ ,\ \cot\theta > ۰ \end{array}}$$

با توجه به مثبت بودن $\tan\theta$ و $\cot\theta$، θ در ناحیهٔ اول یا سوم است:

$$\theta \text{ ربع اول} \begin{cases} \sin\theta > ۰ \\ \cos\theta > ۰ \end{cases}$$

$$\cot\theta > \tan\theta \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin} > \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \xrightarrow[\sin\theta\cos\theta > ۰]{\times \sin\theta\cos\theta} \cos^۲\theta > \sin^۲\theta$$

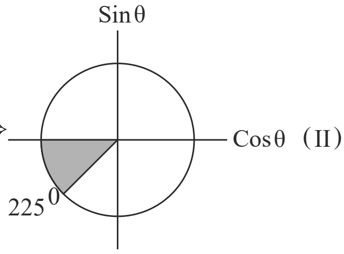
$$\xrightarrow[\text{ربع اول}]{\sqrt{\ }} \cos\theta > \sin\theta > ۰ \Rightarrow$$

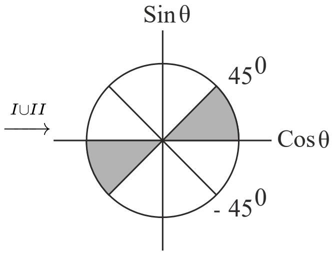


$$\theta \text{ ربع سوم} \begin{cases} \sin\theta < ۰ \\ \cos\theta < ۰ \end{cases}$$

$$\cot\theta > \tan\theta \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} > \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \xrightarrow[\sin\theta\cos\theta > ۰]{\times \sin\theta\cos\theta} \cos^۲\theta > \sin^۲\theta$$

$$\xrightarrow[\text{ربع سوم}]{\sqrt{\ }} \cos\theta < \sin\theta < ۰ \Rightarrow$$

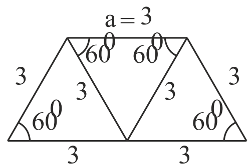




۲۹ - گزینه ۳

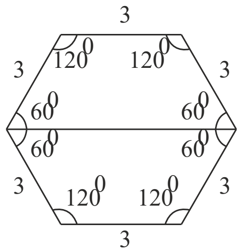
می‌دانیم: $\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}\ ,\ \sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}\ ,\ (n-۲)\times ۱۸۰ =$ مجموع زوایای داخلی n ضلعی منتظم

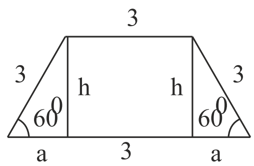
راه حل اول: ذوزنقهٔ داده شده همان نصف شش ضلعی منتظم است که از سه مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. پس مساحت آن برابر است با:



$$S = ۳\times\frac{۱}{۲}(a\times a\times\sin ۶۰^\circ) = ۳\times\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

راه دوم: با توجه به شکل روبه‌رو داریم:





$$\sin ۶۰ = \frac{h}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow h = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰ = \frac{a}{۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

ذوزنقه موردنظر از دو مثلث به ارتفاع h و قاعدهٔ a و یک مستطیل به طول ۳ و عرض h تشکیل می‌شود بنابراین برای به دست آوردن مساحت آن، مساحت هر قسمت را محاسبه و در نهایت با هم جمع می‌کنیم:

$$S = \underset{\text{۲ مثلث}}{\underset{\downarrow}{۲}} \times \underbrace{(\frac{۱}{۲}\times a\times h)}_{\substack{\downarrow\\ \text{مساحت هر مثلث}}} + (\underset{\text{مساحت مستطیل}}{\underset{\downarrow}{۳\times h}}) = \frac{۳}{۲}\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} + ۳\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۳}{۲}+\frac{۶}{۲})$$

$$= \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۹}{۲}) = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

۳۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\begin{cases}\sin\theta > ۰\\ \cos\theta < ۰\end{cases}$ ربع دوم $,\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

راه اوّل:

$$\cos^۳\alpha\cdot\cot\alpha > ۰ \Rightarrow \cos^۳\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > ۰ \Rightarrow \frac{\cos^۴\alpha}{\sin\alpha} > ۰ \xrightarrow{\cos^۴\alpha > ۰} \sin\alpha > ۰$$

$$(I)\quad \sin\alpha > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sin\alpha} > ۰ \Rightarrow ۱ + \frac{۱}{\sin\alpha} > ۰$$

$$\cos\alpha + \cot\alpha < ۰ \Rightarrow \cos\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < ۰ \Rightarrow \cos\alpha(۱+\frac{۱}{\sin\alpha}) < ۰ \xrightarrow{(I)} \cos\alpha < ۰$$

$$\begin{cases}\sin\alpha > ۰\\ \cos\alpha < ۰\end{cases} \Rightarrow \alpha \text{ ربع دوم}$$

راه حل دوم:

$$\cos^{3}\alpha \times \cot\alpha > 0 \rightarrow \underbrace{\cot\alpha\,,\,\cos\alpha}_{\text{هم علامت}} \quad (I)$$

$$\cos\alpha + \cot\alpha < 0 \xrightarrow{(I)} \underbrace{\cos\alpha\,,\,\cot\alpha}_{\text{هر دو منفی}}$$

چون $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ هر دو منفی هستند، پس α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۶ - ۲	۱۱ - ۳	۱۶ - ۴	۲۱ - ۲	۲۶ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۳	۱۲ - ۱	۱۷ - ۲	۲۲ - ۳	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۴	۱۳ - ۲	۱۸ - ۲	۲۳ - ۱	۲۸ - ۱
۴ - ۲	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۴	۲۰ - ۱	۲۵ - ۱	۳۰ - ۲