نام آزمون: مثلثات

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱- اگر زاویه‌ی α به گونه‌ای باشد که $(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲ < ۱$. آنگاه چه تعداد از نسبت‌های مثلثاتی $\sin\alpha$، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ مثبت هستند؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲- اگر $\cos^۲\alpha=\frac{۲}{a}$ ، $\cot^۲\alpha=۵a$ و a عددی حقیقی و مثبت باشد، حاصل $\cot^۲\alpha-\cos^۲\alpha$ کدام است؟

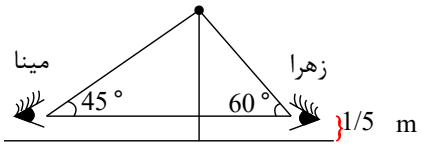
(۱) $۳a$

(۲) ۳

(۳) ۱۰

(۴) $\frac{a}{۳}$

۳- زهرا و مینا که قد هر کدام ۱٫۵ متر است، به فاصله‌ی $۲۷+۹\sqrt{۳}$ متری از یکدیگر در یک نمایشگاه ایستاده‌اند. بین این دو نفر یک تیرک قرار دارد. زهرا و مینا سر تیرک را مطابق شکل با زاویه‌های ۶۰° و ۴۵° نسبت به افق می‌بینند. ارتفاع تیرک چقدر است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۱۵٫۵

(۳) ۲۷

(۴) ۲۸٫۵

۴- اگر نقطه‌ی $P(x_p, \frac{۱}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی و در ربع دوم باشد و θ زاویه‌ای باشد که OP با جهت مثبت محور xها می‌سازد، آن‌گاه $A = \sin\theta + \tan^۲\theta$ کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

① $\frac{۱}{۶}$

② $\frac{-۲\sqrt{۳}+۳}{۶}$

③ $\frac{-۲\sqrt{۳}+۱}{۳}$

④ $\frac{۵}{۶}$

۵- حاصل عبارت $A = \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha + (\sqrt{۲}\sin\alpha\cos\alpha)^۲$ همواره کدام است؟

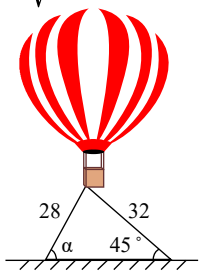
① -۱

② صفر

③ ۱

④ $۱ + \tan^۲\alpha$

۶- یک بالن مطابق شکل زیر، توسط دو طناب به طول‌های ۲۸ و ۳۲ متر به زمین بسته شده است. مقدار سینوس زاویه‌ی α کدام است؟ $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$



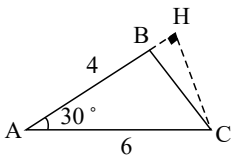
① ۰/۷۵

② ۰/۸

③ ۰/۸۵

④ ۰/۹

۷- در مثلث ABC، $\widehat{A} = ۳۰^\circ$ و $AC = ۶$ و $AB = ۴$ است. در این صورت طول ارتفاع CH کدام است؟



① ۳

② $۳\sqrt{۲}$

③ ۴

④ $۳\sqrt{۳}$

۸ - حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{۳\sin ۳۰^\circ \tan ۴۵^\circ - \cos^۲ ۴۵^\circ}{\cot ۶۰^\circ \times \cos ۳۰^\circ}$$

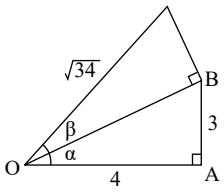
① ۲

② $\frac{۱}{۲}$

③ $\frac{۲}{۳}$

④ $\frac{۳}{۲}$

۹ - با توجه به شکل زیر، حاصل عبارت $\tan\alpha + \cot\beta$ کدام است؟



① $\frac{۲۷}{۲۰}$

② $\frac{۱۳}{۲۵}$

③ $\frac{۲۹}{۱۵}$

④ $\frac{۲۹}{۱۲}$

۱۰ - اگر قطر بزرگ یک شش‌ضلعی منتظم برابر با ۶ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟

① $۲۷\sqrt{۳}$

② $\frac{۲۷}{۲}\sqrt{۳}$

③ $۱۸\sqrt{۳}$

④ $۲۴\sqrt{۳}$

۱۱ - در مثلث ABC اگر $AB = ۱۰$، $\cos\hat{B} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ و مساحت مثلث ۲۰ باشد، BC کدام است؟

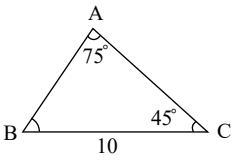
① ۱۶

② ۱۸

③ ۱۲

④ ۱۴

۱۲ - در مثلث زیر طول ضلع AC کدام است؟



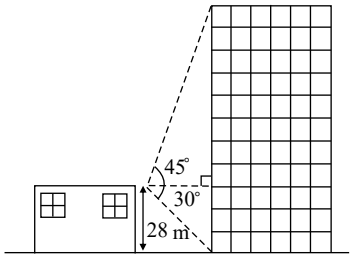
(۱) $۵(\sqrt{۳}-۱)$

(۲) $۵(\sqrt{۳}+۱)$

(۳) $۵\sqrt{۶}(\sqrt{۳}-۱)$

(۴) $۵\sqrt{۶}(\sqrt{۳}+۱)$

۱۳ - در شکل مقابل اگر ارتفاع ساختمان کوتاه‌تر ۲۸ متر باشد، ارتفاع برج چند متر است؟



(۱) $۲۹\sqrt{۳}$

(۲) $۲۸\sqrt{۳}$

(۳) $۲۸(۱+\sqrt{۳})$

(۴) ۵۶

۱۴ - اگر $\tan\alpha=-\frac{۵}{۶}$ باشد، حاصل $(۱-\frac{۱}{\cos^۲\alpha})(\frac{۱}{\sin^۲\alpha}-۱)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $-\frac{۲۵}{۳۶}$

(۳) -۱

(۴) $-\frac{۳۶}{۲۵}$

۱۵ - عبارت $A=۱-\frac{\cos^۲x}{۱+\sin x}$ با کدام گزینه برابر است؟ $(\sin x\neq -۱)$

(۱) $\cos x$

(۲) $\sin x$

(۳) $-\sin x$

(۴) $-\cos x$

۱۶- اگر $۰ < m < ۲$ و $\sin\alpha = ۱ - \frac{m}{۲}$ باشد، α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی واقع است؟

(۱) اول یا دوم

(۲) سوم یا چهارم

(۳) دوم یا سوم

(۴) اول یا چهارم

۱۷- اگر $\frac{۳}{\cos x} + \frac{۲}{\sin x} = ۰$ باشد، مقدار $\tan x - \cot x$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱۳}{۶}$

(۲) $\frac{۵}{۶}$

(۳) $\frac{-۵}{۶}$

(۴) $\frac{-۱۳}{۶}$

۱۸- اگر $\tan\theta = a$ باشد، حاصل $-\sin^۴\theta + \cos^۴\theta$ بر حسب a کدام است؟ $(a \neq ۰)$ $\frac{۱}{۱ + \cot^۲\theta}$

(۱) $a^۲$

(۲) $a^۲ + ۱$

(۳) $\frac{۱}{a^۲ + ۱}$

(۴) $\frac{۱}{a^۲}$

۱۹- اگر $\sin x + \cos x = \frac{۲}{۳}$ باشد، آنگاه حاصل $A = (۱ - \sin x)(۱ - \cos x)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{۱}{۱۸}$

(۲) $\frac{۱}{۱۸}$

(۳) $\frac{۱}{۸۱}$

(۴) $-\frac{۱}{۸۱}$

۲۰ - اگر روی دایرهٔ مثلثاتی، انتهای کمان‌های 60°، 120° و 300° را به هم وصل کنیم، مثلث ABC تشکیل می‌شود، مساحت مثلث ABC کدام است؟

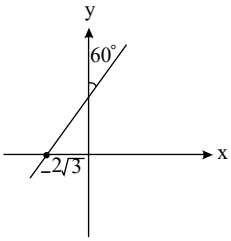
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\sqrt{3}$

۳) ۲

۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۱ - معادلهٔ خط زیر کدام است؟



۱) $x = \sqrt{3}(y-2)$

۲) $3y + \sqrt{3}x = -6$

۳) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$

۴) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + 2$

۲۲ - اگر $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ و $\sin\alpha + \cos\alpha < 0$ باشد، در این صورت $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{49}$

۲) $\frac{49}{25}$

۳) ۱

۴) $\frac{7}{5}$

۲۳- نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳}, \frac{\sqrt{۸}}{۳})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد. تانژانت زاویه‌ای که OP با راستای مثبت محور x می‌سازد، چقدر است؟ (مبدأ مختصات است)

① $\sqrt{۸}$

② $\frac{\sqrt{۸}}{۹}$

③ $\frac{\sqrt{۸}}{۸}$

④ $\frac{\sqrt{۸}}{۳}$

۲۴- خط $x - y = ۲$ با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی θ می‌سازد. $sin\theta$ کدام است؟

① $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

② $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

③ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

④ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۵- حاصل $\frac{۱ - \cos ۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ}$ چند برابر $\frac{\sin ۱۰^\circ}{۱ + \cos ۱۰^\circ}$ است؟

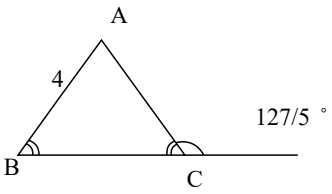
① ۱

② -۱

③ $\sqrt{۲}$

④ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۶ - در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC چند واحد مربع است؟ $(\sin ۷۵^\circ = ۰/۹۶)$



(۱) ۱۵/۳۶

(۲) ۷/۶۸

(۳) ۳/۸۴

(۴) ۶/۸۶

۲۷ - حاصل $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}$ کدام است؟

(۱) $\tan\alpha$

(۲) $\cot\alpha$

(۳) $\sin\alpha$

(۴) $\cos\alpha$

۲۸ - حاصل عبارت $A=\frac{\tan^۲x}{۱+\tan^۲x}+\frac{\cot^۲x}{۱+\cot^۲x}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) صفر

(۴) $\tan^۲x+\cot^۲x$

۲۹ - خط d با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و محور طول‌ها را در $x=-۳$ قطع می‌کند. خط d از کدام یک از نقاط زیر عبور نمی‌کند؟

(۱) $(\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳})$

(۲) $(۳\sqrt{۳}, \sqrt{۳}+۳)$

(۳) $(-\sqrt{۳}, \sqrt{۳}-۱)$

(۴) $(۳, ۲\sqrt{۳})$

۳۰- اگر $\sin\theta \cdot \cos\theta < 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

(۱) فقط چهارم

(۲) دوم یا سوم

(۳) دوم یا چهارم

(۴) سوم یا چهارم

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲ < ۱ \Rightarrow \underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱} + ۲\sin\alpha\cos\alpha < ۱ \Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha < ۱ - ۱$

$\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha < ۰ \xrightarrow{\div ۲} \sin\alpha\cos\alpha < ۰ \Rightarrow$ **مختلف‌العلامه هستند** $\cos\alpha, \sin\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin\alpha > ۰ \\ \cos\alpha < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha < ۰ \\ \cot\alpha < ۰ \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\alpha > ۰ \\ \sin\alpha < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha < ۰ \\ \cot\alpha < ۰ \end{cases} \end{cases}$$

پس در هر حالت، ۳ تا از نسبت‌های مثلثاتی منفی و یکی از آن‌ها مثبت است.

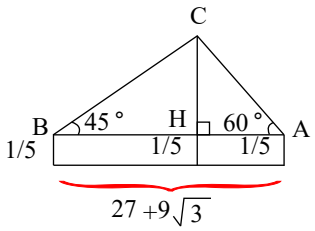
۲ - گزینه ۳

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cot^۲\alpha - \cos^۲\alpha = \frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha} - \cos^۲\alpha = \frac{\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha(۱ - \sin^۲\alpha)}{\sin^۲\alpha}$$
$$= \cos^۲\alpha \times \frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha} = \frac{۲}{a} \times ۵a = ۱۰$$

۳ - گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} \cot ۶۰^\circ = \dfrac{AH}{CH} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} = \dfrac{AH}{CH} \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}CH \\ \cot ۴۵^\circ = \dfrac{BH}{CH} \Rightarrow ۱ = \dfrac{BH}{CH} \Rightarrow BH = CH \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus}$$



$$\underbrace{AH + BH}_{AB} = CH + \frac{\sqrt{۳}}{۲}CH = CH(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۳}CH$$

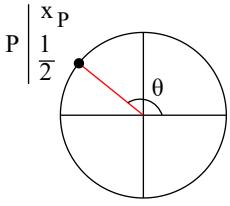
$$\xrightarrow{AB = ۲۷ + ۹\sqrt{۳}} ۲۷ + ۹\sqrt{۳} = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{۳}CH \Rightarrow CH = \frac{۳(۲۷ + ۹\sqrt{۳})}{۳ + \sqrt{۳}} = \frac{۳ \times ۹(۳ + \sqrt{۳})}{۳ + \sqrt{۳}} = ۲۷$$

ارتفاع تیرک $= ۲۷ + ۱٫۵ = ۲۸٫۵$

۴ - گزینه ۴

اگر نقطه‌ی $P\left|\begin{matrix} x_p \\ y_p \end{matrix}\right.$ نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، $y_p = \sin\theta$ و $x_p = \cos\theta$ خواهد بود.

دایره را ببینید:



داریم:

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \Rightarrow x_p^۲ + y_p^۲ = ۱ \xrightarrow{y_p = \frac{۱}{۲}} x_p^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow x_p^۲ + \frac{۱}{۴} = ۱ \Rightarrow x_p^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_p = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ x_p = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

چون P در ربع دوم است، مقدار منفی را می‌پذیریم.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \tan^۲\theta = \frac{۱}{۳}$$

$$A = \sin\theta + \tan^۲\theta = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۳+۲}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

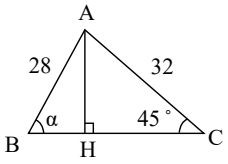
۵ - گزینه ۳

برای هر زاویه‌ی x داریم: $\sin^۲x + \cos^۲x = ۱$

$$A = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$\Rightarrow A = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ = ۱^۲ = ۱$$

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم: در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم: $sin\alpha = \frac{\text{طول ضلع روبه‌رو}}{\text{طول وتر}}$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHC داریم:



$$\sin\hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \frac{AH}{۳۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۳} = \frac{AH}{۳۲} \Rightarrow AH = ۱۶\sqrt{۲}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH نیز داریم:

$$\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۲۸} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۶ \times ۱/۴}{۲۸} = ۰/۸$$

۷ - گزینه ۱

میدانیم: مساحت هر مثلث از رابطه‌ی روبرو بدست می‌آید: $S = \frac{۱}{۲} \times$ حاصل‌ضرب دو ضلع $\times \sin$ (زاویه‌ی بین آن دو ضلع)

مساحت مثلث را از دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB \cdot AC \cdot \sin\hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \sin ۳۰^\circ = ۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB \cdot CH = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times CH = ۲CH$$
$$\Rightarrow ۲CH = ۶ \Rightarrow CH = ۳$$

۸ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$, $\cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$, $\tan ۴۵^\circ = ۱$, $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

$$A = \frac{۳ \times \frac{۱}{۲} \times ۱ - (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۶}} = \frac{۱}{\frac{۳}{۶}} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

۹ - گزینه ۴ می‌دانیم: در هر مثلث قائم‌الزاویه: $\tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$, $\cot\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}}$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB داریم:

$$OA^۲ + AB^۲ = OB^۲ \Rightarrow ۴^۲ + ۳^۲ = OB^۲ \Rightarrow OB = ۵$$

به‌همین طریق در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC نیز داریم:

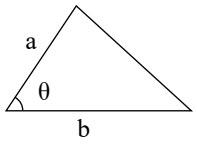
$$OB^۲ + BC^۲ = OC^۲ \Rightarrow BC^۲ = OC^۲ - OB^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۳۴ - ۲۵ \Rightarrow BC = ۳$$

در نتیجه:

$$\tan\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{۳}{۴},\cot\beta=\frac{OB}{BC}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow\tan\alpha+\cot\beta=\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۳}=\frac{۲۹}{۱۲}$$

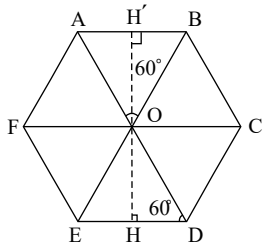
۱۰ - گزینه ۲

می‌دانیم: مساحت هر مثلث دلخواه به شکل روبرو عبارتست از:



$$S=\frac{۱}{۲}\times a\times b\times\sin\theta$$

هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.



$$BE=۶\Rightarrow BO=AO=\frac{BE}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم}=۶\times(\frac{۱}{۲}\times AO\times BO\times\sin۶۰^\circ)=۶\times(\frac{۱}{۲}\times۳\times۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۲۷}{۲}\sqrt{۳}$$

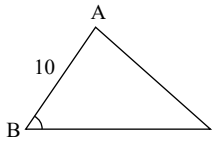
۱۱ - گزینه ۱

می‌دانیم: برای هر زاویهٔ دلخواه x داریم: $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$

مساحت هر مثلث دلخواه برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع ضرب در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

مثلث حاصل، به صورت زیر است:

برای زاویهٔ B داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\cos\hat{B}=\frac{۱۵}{۴}\\ \sin^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{B}=۱\end{array}\right\}\Rightarrow\sin^۲\hat{B}+(\frac{\sqrt{۱۰}}{۴})^۲=۱\Rightarrow\sin^۲\hat{B}+\frac{۱۵}{۱۶}=۱$$

$$\Rightarrow\sin^۲\hat{B}=۱-\frac{۱۵}{۱۶}=\frac{۱}{۱۶}\xrightarrow{\surd}\sin\hat{B}=\pm\frac{۱}{۴}\xrightarrow{۰<\hat{B}<۱۸۰^\circ}\sin\hat{B}=\frac{۱}{۴}$$

از طرفی:

$$S=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times\sin\hat{B}\Rightarrow۲۰=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times BC\times\frac{۱}{۴}\Rightarrow۲۰=\frac{۵}{۴}BC\Rightarrow BC=\frac{۲۰}{\frac{۵}{۴}}\Rightarrow BC=۱۶$$

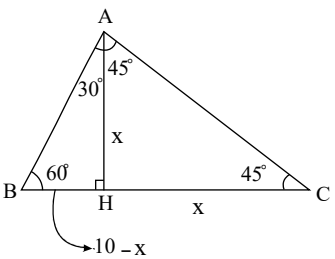
۱۲ - گزینه ۳

می‌دانیم:در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\sin\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}\quad,\quad\tan\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و CH را x می‌نامیم؛ واضح است که طول BH برابر با $۱۰-x$ خواهد بود.

داریم:



$$AH=CH=x$$

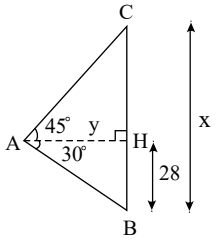
$$\tan۳۰^\circ=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱۰-x}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}+۳}{۳}=\frac{۱۰}{x}\Rightarrow x=\frac{۳۰}{۳+\sqrt{۳}}=۵(۳-\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AC=\frac{CH}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{۵(۳-\sqrt{۳})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۵(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶})=۵(\sqrt{۱۸}-\sqrt{۶})=۵\sqrt{۶}(\sqrt{۳}-۱)$$

۱۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: در هر مثلث قائم‌الزاویه: $\tan\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$

ارتفاع برج را x در نظر می‌گیریم و داریم:



$$BC=x, AH=y$$

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{۲۸}{y}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲۸}{y}\Rightarrow y=۲۸\sqrt{۳}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{CH}{y}\Rightarrow ۱=\frac{CH}{y}\Rightarrow CH=y=۲۸\sqrt{۳}$$

$$x=BC=BH+CH=۲۸+۲۸\sqrt{۳}=۲۸(۱+\sqrt{۳})$$

۱۴ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}\ ,\ ۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\ ,\ ۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

راه‌حل اول:

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{-\frac{۵}{۶}}=-\frac{۶}{۵}$$

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+(-\frac{۵}{۶})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\frac{۲۵}{۳۶}$$

$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow ۱+(-\frac{۶}{۵})^۲=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow\frac{۱}{\sin^۲\alpha}=۱+\frac{۳۶}{۲۵}$$

پس:

$$(\frac{۱}{\sin^۲\alpha}-۱)(۱-\frac{۱}{\cos^۲\alpha})=(۱+\frac{۳۶}{۲۵}-۱)(۱-(۱+\frac{۲۵}{۳۶}))=\frac{۳۶}{۲۵}\times(-\frac{۲۵}{۳۶})=-۱$$

راه دوم:

$$\begin{cases}۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow\frac{۱}{\sin^۲\alpha}-۱=\cot^۲\alpha\\ ۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=-\tan^۲\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\frac{۱}{\sin^۲\alpha}-۱)(۱-\frac{۱}{\cos^۲\alpha})=-\tan^۲\alpha\cot^۲\alpha=-۱$$

۱۵ - گزینه ۲

می‌دانیم: برای هر زاویهٔ دلخواه x داریم: $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$

$$A=۱-\frac{\cos^۲x}{۱+\sin x}=۱-\frac{۱-\sin^۲x}{۱+\sin x}=۱-\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱+\sin x}=۱-(۱-\sin x)=\sin x$$

۱۶ - گزینه ۱ مقدار $\sin x$ را روی نامساوی $۰<m<۲$ می‌سازیم:

$$۰<m<۲\xrightarrow{\times(-۱)}-۲<-m<۰\xrightarrow{\div ۲}-۱<-\frac{m}{۲}<۰\xrightarrow{+۱}۰<\underbrace{۱-\frac{m}{۲}}_{\sin\alpha}<۱$$

$\Rightarrow ۰<\sin\alpha<۱\ \Rightarrow$ α در ربع اول یا دوم واقع است.

۱۷ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ ,\ \cot x=\frac{۱}{\tan x}$

مثلثات

$$\frac{۲}{\sin x}+\frac{۳}{\cos x}=۰ \Rightarrow \frac{۲}{\sin x}=-\frac{۳}{\cos x} \Rightarrow ۲\cos x=-۳\sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan x=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow \cot x=\frac{۱}{\tan x}=-\frac{۳}{۲}$$

پس:

$$\tan x-\cot x=-\frac{۲}{۳}-(-\frac{۳}{۲})=-\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}=\frac{-۴+۹}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

۱۸ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱ \quad , \quad ۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta} \quad , \quad ۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$

$$\frac{۱}{۱+\cot^۲\theta}-\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=\frac{۱}{\frac{۱}{\sin^۲\theta}}+(\cos^۴\theta-\sin^۴\theta)$$

$$=\sin^۲\theta+\underbrace{(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)}_{۱}(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta-\sin^۲\theta=\cos^۲\theta$$

از طرفی: $\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta=۱+a^۲ \Rightarrow \cos^۲\theta=\frac{۱}{۱+a^۲}$

۱۹ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$

$$\sin x+\cos x=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{(\ )^۲} \underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱}+۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

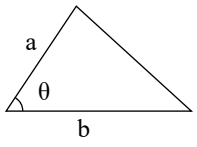
$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}-۱=-\frac{۵}{۹} \xrightarrow{\div ۲} \sin x\cos x=-\frac{۵}{۱۸}$$

$$A=(۱-\sin x)(۱-\cos x)=۱-\sin x-\cos x+\sin x\cos x$$

$$=۱-(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x=۱-\frac{۲}{۳}+(-\frac{۵}{۱۸})=\frac{۱۸-۱۲-۵}{۱۸}=\frac{۱}{۱۸}$$

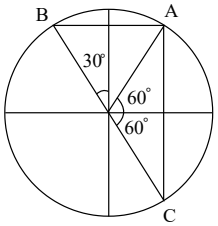
۲۰ - گزینه ۱

می‌دانیم: مساحت هر مثلث دلخواه به شکل روبرو برابر است با:



$$S=\frac{۱}{۲}\times a\times b\times \sin\theta$$

چون BC قطر است.

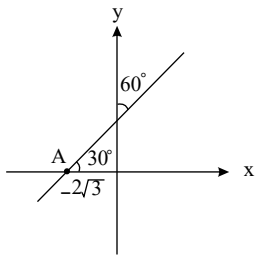


بنابراین $A=۹۰^\circ$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=۲\cos ۶۰^\circ \\ \overrightarrow{AC}=۲\sin ۶۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}AB=۲\times\frac{۱}{۲}=۱ \\ AC=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\end{cases} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{۱}{۲}\times ۱\times\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۱ - گزینه ۱ می‌دانیم: شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

مطابق شکل، ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:



$$m=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}, A=(-۲\sqrt{۳},۰)$$

معادلهٔ خط: $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+h \xrightarrow{A \text{ نقطهٔ}} ۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times(-۲\sqrt{۳})+h$

$$\Rightarrow -۲+h=۰ \Rightarrow h=۲$$

$$y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+۲ \Rightarrow \sqrt{۳}y=x+۲\sqrt{۳} \Rightarrow x=\sqrt{۳}y-۲\sqrt{۳} \Rightarrow x=\sqrt{۳}(y-۲)$$

۲۲ - گزینه ۲ $\tan\alpha$ در ناحیه‌های اول و سوم مثبت است. در ناحیهٔ اول $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مثبت هستند. پس انتهای زاویهٔ α در ناحیهٔ اول نیست، چون $\sin\alpha+\cos\alpha<0$. بنابراین انتهای زاویهٔ α باید در ناحیهٔ سوم قرار داشته باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

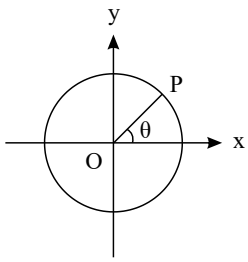
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2}=\frac{1}{\frac{25}{16}}\xrightarrow{\cos\alpha<0}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\cos\alpha\times\tan\alpha=-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{5}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5})^2=(-\frac{7}{5})^2=\frac{49}{25}$$

۲۳ - گزینه ۱

می‌دانیم: ۱- اگر نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار داشته باشد، مختصات آن عبارتست از:



$P(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$

۲- $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$P(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{8}}{3})\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{3}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{8}}{3}\end{cases}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}}=\sqrt{8}$$

۲۴ - گزینه ۳ می‌دانیم: شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$x-y=2\Rightarrow y=x-2\Rightarrow\ \text{شیب}=1\Rightarrow\tan\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

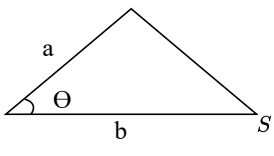
۲۵ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\frac{\frac{1-\cos10^\circ}{\sin10^\circ}}{\frac{\sin10^\circ}{1+\cos10^\circ}}=\frac{(1-\cos10^\circ)(1+\cos10^\circ)}{\sin10^\circ\times\sin10^\circ}=\frac{1-\cos^210^\circ}{\sin^210^\circ}=\frac{\sin^210^\circ}{\sin^210^\circ}=1$$

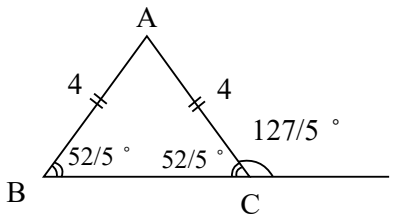
۲۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: در مثلث متساوی‌الساقین، زوایای مجاور به قاعده با هم برابرند.

مساحت هر مثلث دلخواه به فرم روبرو برابر است با:



$S=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\theta$



ابتدا اندازهٔ زاویهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\hat{B}=\hat{C}\Rightarrow AB=AC=4$$

$\hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۱۲۷٫۵^\circ = ۵۲٫۵^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}} \hat{B} = ۵۲٫۵^\circ$

$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = ۱۸۰^\circ - (۵۲٫۵^\circ + ۵۲٫۵^\circ) = ۷۵^\circ$

از طرفی:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ \times ۰٫۹۶ = ۷٫۶۸$$

۲۷ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \ , \ tan\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$

$$\frac{۱ + \tan \alpha}{۱ + \cot \alpha} = \frac{۱ + \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{۱ + \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\dfrac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

۲۸ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{sin^۲x + \cos^۲x = ۱ \ , \ ۱ + \cot^۲x = \frac{۱}{\sin^۲x} \ , \ ۱ + \tan^۲x = \frac{۱}{\cos^۲x}}$

$$A = \frac{\tan^۲x}{۱ + \tan^۲x} + \frac{\cot^۲x}{۱ + \cot^۲x} = \frac{\tan^۲x}{\dfrac{۱}{\cos^۲x}} + \frac{\cot^۲x}{\dfrac{۱}{\sin^۲x}} = \frac{\dfrac{\sin^۲x}{\cos^۲x}}{\dfrac{۱}{\cos^۲x}} + \frac{\dfrac{\cos^۲x}{\sin^۲x}}{\dfrac{۱}{\sin^۲x}} = \sin^۲x + \cos^۲x = ۱$$

۲۹ - گزینه ۱

می‌دانیم: شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

شیب $= \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow$ معادلهٔ خط : $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳} x + h$

خط محور xها را در $x = -۳$ قطع می‌کند، یعنی نقطهٔ $(-۳, ۰)$ روی خط قرار دارد. این مختصات را در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow[y=۰]{x=-۳} ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times (-۳) + h \Rightarrow -\sqrt{۳} + h = ۰ \Rightarrow h = \sqrt{۳}$$

پس معادلهٔ خط به صورت زیر است:

$$y = \frac{\sqrt{۳}}{۳} x + \sqrt{۳}$$

و از میان نقاط داده شده، مختصات گزینهٔ ۱ در معادله صدق نمی‌کند.

۳۰ - گزینه ۳ چون حاصل‌ضرب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ منفی است، آنها مختلف‌العلامت هستند؛ یعنی θ در ربع دوم یا چهارم واقع است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۲	۱۱ - ۱	۱۶ - ۱	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۳	۷ - ۱	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۲	۲۷ - ۱
۳ - ۴	۸ - ۱	۱۳ - ۳	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۱
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۲	۲۴ - ۳	۲۹ - ۱
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۲	۲۰ - ۱	۲۵ - ۱	۳۰ - ۳