
علی هاشمی

نام آزمون: مثلثات

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ – حاصل $\dfrac{2\sin 30^\circ \cos 30^\circ}{1-\cos 60^\circ}$ **کدام است؟**

① $\cos 45^\circ$

② $\cot 30^\circ$

③ $\sin 60^\circ$

④ $\cot 60^\circ$

۲ – مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $54\sqrt{3}$ **است. طول ضلع این شش ضلعی کدام است؟**

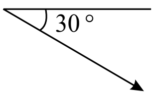
① $3\sqrt{3}$

② $6\sqrt{3}$

③ ۳

④ ۶

۳ – یک موشک از ارتفاع ۲۰۰۰ متری با زاویه‌ی 30° **نسبت به افق به سمت زمین شلیک می‌شود. در صورتی که زاویه تغییر نکند، پس از پیمودن چند متر این موشک به زمین برخورد می‌کند؟**



① ۲۰۰۰

② $2000\sqrt{3}$

③ ۴۰۰۰

④ $4000\sqrt{3}$

۴ – مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC **که در آن** $\widehat{B}=90^\circ$**، از کدام یک از رابطه‌های زیر به دست نمی‌آید؟**

① $S=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin\widehat{A}$

② $S=\dfrac{1}{2}\times AC\times BC\times \cos\widehat{A}$

③ $S=\dfrac{1}{2}\times BC\times AC\times \tan\widehat{A}$

④ $S=\dfrac{1}{2}(BC)^2\times \cot\widehat{A}$

۵ - در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $\widehat{C}=۹۰^\circ$ و $\cos\widehat{A}=\frac{۱۲}{۱۳}$ و $BC=۱۰$ می‌باشد. محیط مثلث ABC کدام است؟

① ۴۸
② ۶۰
③ ۷۰
④ ۷۲

۶ - اضلاع متوازی‌الاضلاعی به طول ۱۱ و ۱۲ واحد است. در صورتی که زاویه‌ی بین این دو ضلع ۱۲۰° باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

① $۲۲\sqrt{۳}$
② $۶۶\sqrt{۳}$
③ $۲۲\sqrt{۲}$
④ $۶۶\sqrt{۲}$

۷ - شخصی با قد $۱/۵$ متر برای به دست آوردن اندازه‌ی میله‌ی پرچم، طوری مقابل پرچم ایستاده که سایه‌ی شخص و سایه‌ی میله‌ی پرچم روی هم می‌افتند و انتهای هر دو سایه در یک نقطه است. اگر پرتوهای موازی خورشید، با سطح زمین زاویه‌ی ۶۰° بسازند و فاصله‌ی افقی شخص و میله‌ی پرچم ۶ متر باشد، ارتفاع میله‌ی پرچم تقریباً چند متر است؟ $(\sqrt{۳}\simeq ۱/۷)$

① $۱۲/۹$
② $۱۱/۷$
③ $۱۱/۵$
④ $۱۱/۲$

۸ - اگر قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم برابر با $۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت شش ضلعی منتظم کدام است؟

① ۶
② $۶\sqrt{۳}$
③ ۱۲
④ $۱۲\sqrt{۳}$

۹- اگر $\tan x = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۴\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

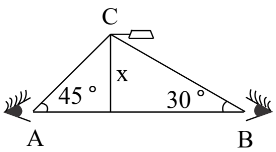
① $\frac{۱}{۳}$

② ۳

③ ۲

④ $\frac{۴}{۳}$

۱۰- دو نفر مطابق شکل با قد یکسان، یک تیر چراغ برق را از نقاط A و B به ترتیب با زوایای ۳۰° و ۴۵° می‌بینند. اگر فاصله A تا B برابر ۱۸ متر باشد. ارتفاع تیر چراغ برق (x) کدام است؟



① $۱۸(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$

② $۹(\sqrt{۳} + ۱)$

③ $۱۸(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})$

④ $۹(\sqrt{۳} - ۱)$

۱۱- حاصل عبارت $A = \frac{۲\tan ۳۰^\circ}{۱ - \cot^۲ ۶۰^\circ} + ۴\cos^۲ ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ - \tan ۶۰^\circ$ کدام است؟

① $۱ + \sqrt{۳}$

② $۱ - \sqrt{۳}$

③ ۱

④ $\sqrt{۳}$

۱۲- آرش می‌خواهد ارتفاع ساختمانی را که طول سایه‌ی آن بر روی زمین ۱۰ متر است، حساب کند. قد آرش ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او ۰/۵ متر است. ارتفاع ساختمان چند متر است؟

① ۲۵

② ۲۰

③ ۱۵

④ ۳۰

۱۳ - شش ضلعی منتظمی در داخل دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت بین شش ضلعی و دایره‌ی محیطی کدام است؟ $(\pi = ۳)$

① $۲۷\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\right)$

② $۲۷\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\right)$

③ $۲۷\left(\frac{۳-\sqrt{۳}}{۲}\right)$

④ $۲۷\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}\right)$

۱۴ - چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

الف) در دایرهٔ مثلثاتی زوایایی وجود دارد که تانژانت و کتانژانت آنها مختلف‌العلامت باشند.

ب) در هر دور از دایرهٔ مثلثاتی دو زاویهٔ مثبت وجود دارد که کسینوس آنها برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

ج) در دایرهٔ مثلثاتی هرچه زاویه بزرگ‌تر باشد، مقدار سینوس آن بزرگ‌تر می‌شود.

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳

۱۵ - اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $A = |\sin x - \cos x|$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

② $\frac{۱}{۴}$

③ $\frac{۳۱}{۱۶}$

④ $\frac{\sqrt{۳۱}}{۴}$

۱۶- اگر $۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$ و $\tan\theta = -\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{۱ - ۲\sin\theta}{\cos^۲\theta}$ کدام است؟

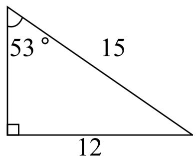
① $\frac{۱۰ - ۲۰\sqrt{۰/۱}}{۳}$

② $\frac{۱۰ + ۲۰\sqrt{۰/۱}}{۳}$

③ $\frac{۱۰ + ۲۰\sqrt{۰/۱}}{۹}$

④ $\frac{۱۰ - ۲۰\sqrt{۰/۱}}{۹}$

۱۷- پارسا برای اندازه‌گیری نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۵۳° ، ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه‌ی ۵۳° رسم کرد. بعد با اندازه‌گیری طول دو ضلع مثلث به شکل زیر، توانست $\sin ۵۳^\circ$ را محاسبه کند. اگر او می‌خواست $\tan ۳۷^\circ$ را محاسبه کند، کدام گزینه را به دست می‌آورد؟



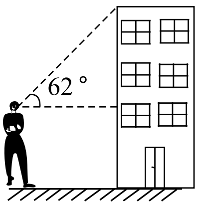
① $\frac{۳}{۵}$

② $\frac{۴}{۵}$

③ $\frac{۳}{۴}$

④ $\frac{۴}{۳}$

۱۸- مطابق شکل زیر، شخصی با قد $۲۰۰cm$ در فاصلهٔ افقی $۵m$ از یک ساختمان قرار دارد. اگر این شخص با زاویهٔ ۶۲° نسبت به افق، لبهٔ بالای ساختمان را ببیند، ارتفاع ساختمان چند متر است؟ $(\tan ۶۲^\circ \simeq ۲)$

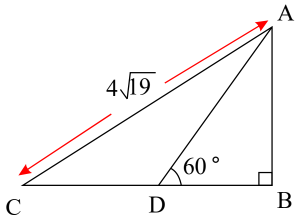


① ۱۰

② ۱۲

③ ۷/۵

④ ۴/۵

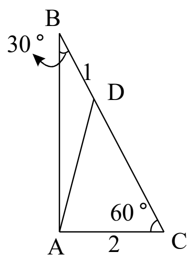


۱۹ – اگر در مثلث ABC از شکل زیر، $AB = ۴\sqrt{۳}$ باشد، مساحت مثلث ACD کدام است؟

① $۸\sqrt{۳}$
② $۱۲\sqrt{۳}$
③ $۲۴\sqrt{۳}$
④ $۲۸\sqrt{۳}$

۲۰ – مقدار عددی عبارت مثلثاتی $A = ۲\sin^{۲}۳۰^{\circ} - \cos ۶۰^{\circ} + \tan ۴۵^{\circ}\sin^{۲}۶۰^{\circ}$ کدام است؟

① صفر
② ۱٫۲۵
③ ۰٫۷۵
④ ۰٫۸



۲۱ – در مثلث زیر، اگر مساحت مثلث ABC برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت مثلث ABD برابر کدام گزینه است؟ $(BD = ۱)$

① $\sqrt{۳}$
② $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
③ $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
④ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۲۲ – در کدام یک از گزینه‌ها، همه‌ی مقادیر داده شده تعریف شده هستند؟

① $\cot ۱۸۰^{\circ}, \frac{۱}{\cos ۰^{\circ}}, \tan ۳۶۰^{\circ}$
② $\cot ۲۷۰^{\circ}, \frac{۱}{\sin ۱۸۰^{\circ}}, \tan ۰^{\circ}$
③ $\cot ۹۰^{\circ}, \frac{۱}{\cos ۰^{\circ}}, \tan ۱۸۰^{\circ}$
④ $\cot ۹۰^{\circ}, \frac{۱}{\cos ۱۸۰^{\circ}}, \tan ۹۰^{\circ}$

۲۳ – حاصل عبارت $\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}-\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ کدام است؟

۱) $4\cot\theta\cos\theta$

۲) $\frac{4\tan\theta}{\cos\theta}$

۳) $\frac{2}{\cos^2\theta}$

۴) $2\sin\theta$

۲۴ – نقطه‌ی P روی محیط دایره‌ی مثلثاتی و در ربع چهارم قرار دارد. کدام گزینه می‌تواند مختصات نقطه‌ی P باشد؟

۱) $(\frac{2}{5},-\frac{3}{5})$

۲) $(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$

۳) $(\frac{3}{8},-\frac{\sqrt{7}}{8})$

۴) $(\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{2}{3})$

۲۵ – اگر $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$

۲) 3

۳) $-\frac{4}{3}$

۴) $\frac{2}{5}$

۲۶ – کدام یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

۱) $\sin 10^\circ > \sin 70^\circ$

۲) $\cos 10^\circ < \cos 70^\circ$

۳) $\sin 150^\circ > \sin 10^\circ$

۴) $\cos(-90^\circ) < \cos 150^\circ$

۲۷- اگر بیشترین مقدار عبارت $A = (2a+1) - 3\sin x$ برابر ۸ باشد، a کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۲۸- اگر بدانیم $\tan 330 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\sin 240 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$، حاصل عبارت $A = \sin 330^\circ + \cos 240^\circ$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -1

(۳) $-\sqrt{3}$

(۴) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

۲۹- اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\cos(\widehat{A} - \widehat{B}) + \sin(\frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{C}) = 2$، نوع مثلث ABC کدام است؟

(۱) قائم‌الزاویه غیر متساوی‌الساقین

(۲) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

(۳) متساوی‌الاضلاع

(۴) مختلف‌الاضلاع با یک زاویه بزرگتر از 90°

۳۰- اگر $30^\circ < \theta < 135^\circ$ و $\sin\theta = \frac{3m-2}{4}$، آنگاه حدود m کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{4}{3} < m \leq 2$

(۳) $\frac{1}{2} < m \leq 1$

(۴) $0 \leq m < 2$

پاسخنامه تشریحی

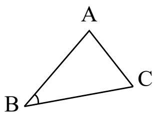
۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}\ ,\quad \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}\ ,\quad \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}\ ,\quad \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}}$

$$\frac{۲\sin ۳۰^\circ \cos ۳۰^\circ}{۱ - \cos ۶۰^\circ} = \frac{۲ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳} = \cot ۳۰^\circ$$

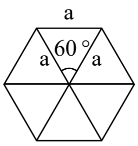
۲ - گزینه ۴ راه‌حل اول:

نکته: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin \hat{B}$$



مطابق شکل روبه‌رو، مساحت هر شش‌ضلعی منتظم، ۶ برابر مساحت یک متساوی‌الاضلاع است، پس اگر طول شش‌ضلعی را a در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$S = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = ۳a^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مساحت شش ضلعی برابر $۵۴\sqrt{۳}$ است، بنابراین:

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۵۴\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

راه‌حل دوم:

نکته: مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

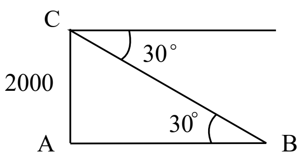
یکی شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. بنابراین مطابق نکته داریم:

$$۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۵۴\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

۳ - گزینه ۳ می‌دانیم:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، سینوس هر زاویه‌ی حاده برابر است با $\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}$ سینوس زاویهٔ ۳۰° برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

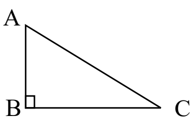
شکل زیر را برای مسیر موشک تشکیل می‌دهیم.



مطابق شکل، مسافتی که موشک طی می‌کند تا به زمین برخورد کند، برابر طول BC است؛ و BC وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC است. پس نسبت مثلثاتی مناسب برای زاویه‌ی B، سینوس است، چون هم ضلع روبرو به آن معلوم است و هم طول وتر را وارد محاسبات می‌کند:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ = \frac{۲۰۰۰}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲۰۰۰}{BC} \Rightarrow BC = ۴۰۰۰$$

۴ - گزینه ۳ نکته: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



مساحت : $S = \frac{۱}{۲}AB \times BC$

$$\sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC} \ ,\quad \cos \widehat{A} = \frac{AB}{AC} \ ,\quad \cot \widehat{A} = \frac{AB}{BC} \ ,\quad \tan \widehat{A} = \frac{BC}{AB}$$

باتوجه به نکته داریم:

$$۱)\sin\widehat{A}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow BC=AC\times\sin\widehat{A}$$

با جایگذاری در فرمول مساحت داریم: $S=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC\times\sin\widehat{A}$

$$۲)\cos\widehat{A}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AB=AC\times\cos\widehat{A}$$

با جایگذاری در فرمول مساحت داریم: $S=\frac{۱}{۲}BC\times AC\times\cos\widehat{A}$

$$۳)\tan\widehat{A}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow BC=AB\times\tan\widehat{A}$$

با جایگذاری در فرمول مساحت داریم: $S=\frac{۱}{۲}(AB)^{۲}\times\tan\widehat{A}$

$$۴)\cot\widehat{A}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AB=BC\times\cot\widehat{A}$$

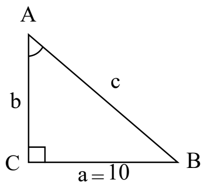
با جایگذاری در فرمول مساحت داریم:

پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ رابطه‌های درستی برای مساحت بوده و گزینه‌ی ۳ رابطه‌ای نادرست است.

۵ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\text{در هر مثلث قایم‌الزاویه}:\ \cos\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}}$

$$\cos\widehat{A}=\frac{\text{طول ضلع قائمه‌ی مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{طول وتر}}=\frac{b}{c}=\frac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow b=\frac{۱۲}{۱۳}c \qquad (۱)$$



طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}\xrightarrow{(۱)}c^{۲}=(۱۰)^{۲}+(\frac{۱۲}{۱۳}c)^{۲}$$

$$c^{۲}=۱۰۰+\frac{۱۴۴}{۱۶۹}c^{۲}\Rightarrow ۱۶۹c^{۲}=۱۶۹۰۰+۱۴۴c^{۲}\Rightarrow ۲۵c^{۲}=۱۶۹۰۰$$

$$\Rightarrow c^{۲}=\frac{۱۶۹۰۰}{۲۵}=\frac{۱۶۹\times\cancel{۱۰۰}^{۴}}{\cancel{۲۵}_{۱}}\Rightarrow c=۱۳\times۲=۲۶$$

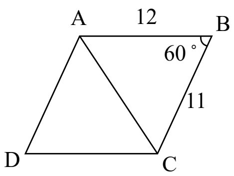
$$\xrightarrow{(۱)}b=\frac{۱۲}{۱۳}\times۶=۲۴\Rightarrow\begin{cases}a=۱۰\\b=۲۴\\c=۲۶\end{cases}$$

محیط مثلث $=۱۰+۲۴+۲۶=۶۰$

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم:

در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور، مکمل‌اند.
مساحت هر مثلث از رابطه‌ی (زاویه‌ی بین آن‌ها) $\sin$ ×حاصل‌ضرب دو ضلع $\times\frac{۱}{۲}=S$ بدست می‌آید

شکل زیر را برای مسئله رسم می‌کنیم و دقت می‌کنیم که زاویه‌ی حاده متوازی‌الاضلاع ۶۰° است (یعنی مکمل ۱۲۰°).

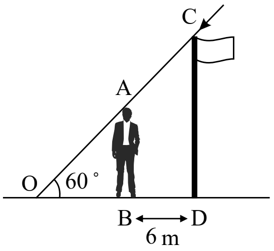


$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times\sin\widehat{B}=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۱۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳۳\sqrt{۳}$$

مساحت متوازی‌الاضلاع، دو برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است:

$$S=۲\times۳۳\sqrt{۳}=۶۶\sqrt{۳}$$

۷ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\text{در هر مثلث قائم‌الزاویه برای هر زاویه‌ی حاده داریم}:\ \tan\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}}$



$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AB}{OB} \Rightarrow OB = \frac{AB}{\sqrt{۳}} = \frac{۱/۵}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

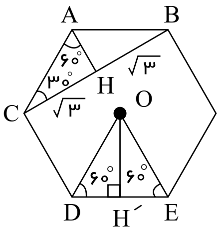
$$\tan ۶۰^\circ = \frac{CD}{OD} \Rightarrow CD = OD \cdot \tan ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow CD = (OB + BD)\tan ۶۰^\circ = (\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۶) \times \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۳}{۲} + ۶\sqrt{۳} \simeq ۱۱/۷m$$

۸ ـ گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{S = \frac{۱}{۲} \times \text{حاصل‌ضرب دو ضلع} \times \sin\text{(زاویه‌ی بین آن دو ضلع)}}$ مساحت هر مثلث عبارت‌اند از:

$$\left.\begin{array}{l} CH = \frac{۱}{۲}BC = \sqrt{۳} \\ CH = AC \sin ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow AC = ۲$$



متساوی‌الاضلاع : $\overset{\triangle}{ODE}$: $OD = DE = AC = ۲ \Rightarrow OH' = OD \sin ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$

$$S_{\overset{\triangle}{ODE}} = \frac{۱}{۲}OH' \times DE = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳} \times ۲ = \sqrt{۳}$$

مساحت شش‌ضلعی منتظم $= ۶ \times S_{\overset{\triangle}{ODE}} = ۶\sqrt{۳}$

۹ ـ گزینه ۳ چون در فرض مسئله مقدار $\tan x$ داده شده است، صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan x$ بدست آید:

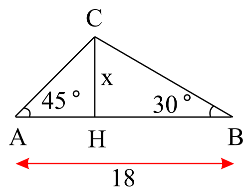
$$\frac{۴\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \xlongequal{\div \cos x} \frac{۴\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}$$

$$= \frac{۴ - \tan x}{\tan x + ۱} = \frac{۴ - \frac{۲}{۳}}{\frac{۲}{۳} + ۱} = \frac{\frac{۱۰}{۳}}{\frac{۵}{۳}} = ۲$$

۱۰ ـ گزینه ۴

فرض: $AB = ۱۸$

$$\Rightarrow AH + BH = ۱۸ \quad (*)$$



از طرفی:

$$۱)\ \tan ۴۵^\circ = \frac{x}{AH} \Rightarrow ۱ = \frac{x}{AH} \Rightarrow AH = x$$

$$۲)\ \tan ۳۰^\circ = \frac{x}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{x}{BH} \Rightarrow BH = \frac{x}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۳x}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}x$$

این مقادیر را در رابطه (*) قرار می‌دهیم:

$$x+\sqrt{3}x=18\Rightarrow(1+\sqrt{3})x=18\Rightarrow x=\frac{18}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{18(1-\sqrt{3})}{1-3}=\frac{18(1-\sqrt{3})}{-2}=-9(1-\sqrt{3})=9(\sqrt{3}-1)$$

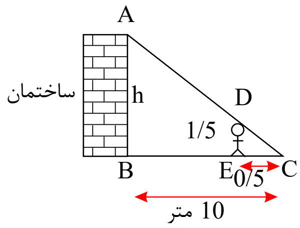
۱۱ ـ گزینه ۳

می‌دانیم: $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$A=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}}+4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

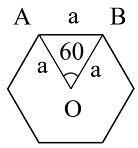
$$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$$

۱۲ ـ گزینه ۴ دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{CDF}$ متشابهند:



$$\frac{1{,}5}{h}=\frac{0{,}5}{10}\Rightarrow h=\frac{10\times 1{,}5}{0{,}5}=30$$

۱۳ ـ گزینه ۱ هر شش ضلعی منتظم به ضلع a، شامل ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a است.

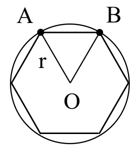


$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{1}{2}\times a\times a\times\ \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times a\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

پس مساحت ۶ ضلعی عبارتست از:

$$S_{\text{شش ضلعی}}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\overset{a=3}{=\!=}\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

از طرفی در دایره، شعاع برابر با OA است داریم:



$$r=OA=a\ \Rightarrow S_{\text{دایره}}=\pi r^2=\pi a^2\overset{\pi=3}{=\!=}3a^2\overset{a=3}{=\!=}27$$

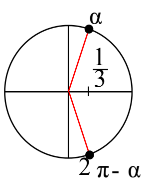
و تفاضل این مساحت عبارتست از:

$$27-\frac{27\sqrt{3}}{2}=27\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=27\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$$

۱۴ ـ گزینه ۲ گزینهٔ (الف) نادرست؛ می‌دانیم که تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگرند و دو عدد که معکوس هم باشند، هم علامتند.

گزینهٔ (ب) درست؛ دایره را ببینید:

α , $2\pi-\alpha$ دو زاویهٔ مثبت هستند که کسینوس آنها $\frac{1}{3}$ است.



گزینهٔ (ج) نادرست؛ در ربع اول با افزایش زاویه، سینوس آن بزرگ‌تر می‌شود اما در ربع دوم سینوس کاهش می‌یابد و همین امر گزینه را رد می‌کند.

۱۵ ـ گزینه ۴

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{4}\xrightarrow{(\ )^2}(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{16}\Rightarrow\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}+2\sin x\cos x=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x = \frac{۱}{۱۶} - ۱ \Rightarrow ۲\sin x\cos x = -\frac{۱۵}{۱۶}$$

خواستهٔ مسئله را A می‌نامیم:

$$A = |\sin x - \cos x| \xrightarrow{(\ )^۲} A^۲ = \overbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}^{۱} - \overbrace{۲\sin x\cos x}^{-\frac{۱۵}{۱۶}}$$

$$\Rightarrow A^۲ = ۱ + \frac{۱۵}{۱۶} = \frac{۳۱}{۱۶} \xrightarrow{\sqrt{\ }} |A| = \pm\frac{\sqrt{۳۱}}{۴} \xrightarrow{A>۰} A = \frac{\sqrt{۳۱}}{۴}$$

۱۶ - گزینه ۳ معنی $۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$ آنست که θ در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی واقع است و در ربع چهارم، $\cos\theta$ مثبت و $\sin\theta$ منفی است. می‌دانیم:

$$\frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + \tan^۲\theta \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + (-\frac{۱}{۳})^۲ = ۱ + \frac{۱}{۹} = \frac{۱۰}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \cos^۲\theta = \frac{۹}{۱۰} \xrightarrow{\sqrt{\ }} |\cos\theta| = \sqrt{\frac{۹}{۱۰}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \xrightarrow{\cos\theta>۰} \cos\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

برای محاسبهٔ $\sin^۲\theta$ از رابطهٔ $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ استفاده می‌کنیم که سینوس را به کسینوس مربوط می‌کند:

$$\sin^۲\theta = ۱ - \cos^۲\theta = ۱ - \frac{۹}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{\sqrt{\ }} |\sin\theta| = \sqrt{\frac{۱}{۱۰}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{۱}{۱۰}} \xrightarrow{\sin\theta<۰} \sin\theta = -\sqrt{\frac{۱}{۱۰}} = -\sqrt{۰/۱}$$

حال مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

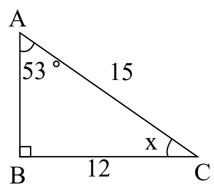
$$A = \frac{۱ - ۲\sin\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۱ - ۲\times(-\sqrt{۰/۱})}{(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})^۲}$$

$$= \frac{۱ + ۲\sqrt{۰/۱}}{\frac{۹}{۱۰}} = \frac{۱۰}{۹}(۱ + ۲\sqrt{۰/۱}) = \frac{۱۰ + ۲۰\sqrt{۰/۱}}{۹}$$

۱۷ - گزینه ۳ در این مثلث یک زاویه ۹۰° و دیگری ۵۳° است؛ پس زاویه‌ی دوم که آن را x می‌نامیم عبارتست از:

$$x = ۱۸۰ - (۹۰ + ۵۳) = ۱۸۰ - ۱۴۳ = ۳۷^\circ$$

و این همان زاویه‌ایست که می‌خواهیم تانژانت آن را محاسبه کنیم:



$$\tan x = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

برای این منظور باید ضلع مقابل به $\widehat{x}$ یعنی AB را محاسبه کنیم:

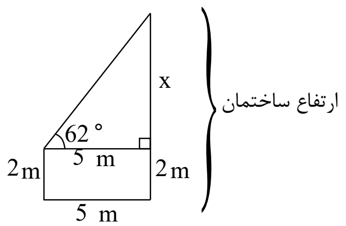
قضیه‌ی فیثاغورس: $۱۵^۲ = AB^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow ۲۲۵ = AB^۲ + ۱۴۴ \Rightarrow AB^۲ = ۲۲۵ - ۱۴۴ = ۸۱$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{۸۱} = ۹$$

$$\Rightarrow \tan\widehat{x} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۱۸ - گزینه ۲

شکل هندسی این مسئله به‌صورت روبه رو است:



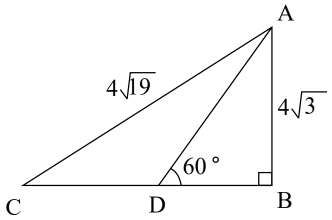
اگر x را محاسبه کنیم، ارتفاع ساختمان به‌صورت $۲ + x$ متر به‌دست خواهد آمد؛ از تانژانت ۶۲° که در مسئله داده شده شروع می‌کنیم:

$$\tan ۶۲^\circ \simeq ۲ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \frac{x}{۵} = ۲ \Rightarrow x = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

ارتفاع ساختمان $= x + ۲ = ۱۰ + ۲ = ۱۲$ متر

۱۹ - گزینه ۳

شکل را ببینید:



برای محاسبهٔ مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$ باید ارتفاع AB و قاعدهٔ CD معلوم باشد. $AB = ۴\sqrt{۳}$ است؛ می‌ماند CD که برای محاسبهٔ آن چنین عمل می‌کنیم:

$$\overset{\triangle}{ABC} : AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow (۴\sqrt{۱۹})^۲ = (۴\sqrt{۲})^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۱۶ \times ۱۹ = ۱۶ \times ۳ + BC^۲$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۱۶ \times ۱۹ - ۱۶ \times ۳ = ۱۶(۱۹ - ۳) = ۱۶ \times ۱۶ \xrightarrow{\sqrt{}} BC = ۱۶$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : \tan ۶۰^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۴\sqrt{۳}}{BD} \Rightarrow BD = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = ۴$$

$$CD = BC - BD = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$

$$S_{\overset{\triangle}{ACD}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times CD = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times ۱۲ = ۶ \times ۴\sqrt{۳} = ۲۴\sqrt{۳}$$

۲۰ - گزینه ۳

مقادیر $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ ، $\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ ، $\tan ۴۵^\circ = ۱$ و $\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را در A جایگزین می‌کنیم:

$$A = ۲ \times (\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} + ۱ \times (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ = ۲ \times \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} + ۱ \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

۲۱ - گزینه ۲

$$\overset{\triangle}{ABC} : \tan ۶۰^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{AB}{۲} \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ عبارتست از:

$$S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BD \times \sin \widehat{B}$$
$$= \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۳} \times ۱ \times \sin ۳۰ = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۲ - گزینه ۳ مقادیر $\cot ۱۸۰^\circ$ و $\tan ۹۰^\circ$ تعریف نشده‌اند و $\sin ۱۸۰^\circ = ۰$ بوده و در نتیجه $\frac{۱}{\sin ۱۸۰^\circ}$ تعریف نشده است.

۲۳ - گزینه ۲

$$\frac{۱ + \sin\theta}{۱ - \sin\theta} - \frac{۱ - \sin\theta}{۱ + \sin\theta} = \frac{(۱ + \sin\theta)^۲ - (۱ - \sin\theta)^۲}{(۱ - \sin\theta)(۱ + \sin\theta)}$$

$$= \frac{۱ + ۲\sin\theta + \sin^۲\theta - (۱ - ۲\sin\theta + \sin^۲\theta)}{۱ - \sin^۲\theta} = \frac{۱ + ۲\sin\theta + \sin^۲\theta - ۱ + ۲\sin\theta - \sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}$$

$$= \frac{۴\sin\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۴}{۱} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{۱}{\cos\theta} = ۴\tan\theta \times \frac{۱}{\cos\theta} = \frac{۴\tan\theta}{\cos\theta}$$

۲۴ - گزینه ۴ نقطهٔ P روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، هرگاه طول آن برابر $\cos\theta$ و عرض آن برابر با $\sin\theta$ باشد؛ یعنی مختصات آن به فرم $P\left|\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}\right.$ باشد؛ در نتیجه باید بین طول و عرض آن رابطه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ برقرار باشد.

علاوه بر آن در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی، سینوس منفی و کسینوس مثبت است.

با شرایط فوق، از بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی چهارم در شرایط مسئله صدق می‌کند.

$$P\left|\begin{array}{l}\frac{\sqrt{۵}}{۳}>۰\\ -\frac{۲}{۳}<۰\end{array}\right. \quad , \quad \left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^{۲}+\left(-\frac{۲}{۳}\right)^{۲}=\frac{۵}{۹}+\frac{۴}{۹}=\frac{۹}{۹}=۱$$

۲۵ - گزینه ۳ راه اول: می‌دانیم: ۱- بین سینوس و کسینوس رابطه‌ی $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ برقرار است.

۲- در ناحیه‌ی دوم، سینوس مثبت و کسینوس منفی است؛ در نتیجه تانژانت منفی خواهد بود.

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha=۱-\left(-\frac{۳}{۵}\right)^{۲}=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۲۵-۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}}\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\pm\frac{۴}{۵}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{۴}{۵} \quad ?\\ \sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\quad \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=-\frac{۴}{۳}$$

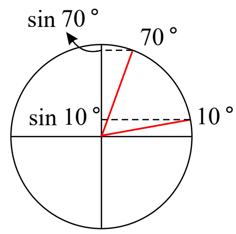
راه دوم: $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\left(-\frac{۳}{۵}\right)^{۲}}=\frac{۱}{\frac{۹}{۲۵}}\Rightarrow\tan^{۲}\alpha=\frac{۲۵}{۹}-۱=\frac{۲۵-۹}{۹}=\frac{۱۶}{۹}$$

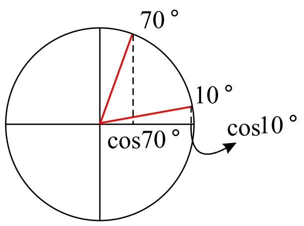
$$\xrightarrow{\sqrt{}}\begin{cases}\tan\alpha=\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۴}{۳}\quad \text{غیر قابل قبول}\\ \tan\alpha=-\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}=-\frac{۴}{۳}\quad ?\end{cases}$$

۲۶ - گزینه ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

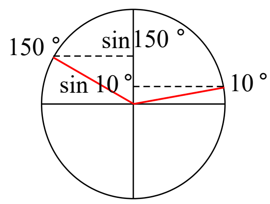
۱) $\sin ۷۰>\sin ۱۰$ (نادرست)



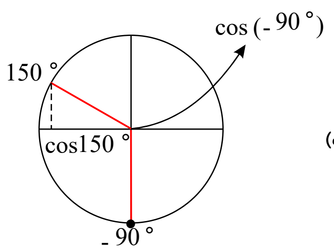
۲) $\cos ۱۰>\cos ۷۰$ (نادرست)



۳) $\sin ۱۵۰>\sin ۱۰$ (درست)



۴) $\cos ۱۵۰<\cos(-۹۰)$ (نادرست)



۲۷ - گزینه ۱ به ازای هر زاویه‌ی x داریم: $-۱\leq\sin x\leq۱$

بر روی نامساوی‌های بالا، عبارت $(۲a+۱)-۳\sin x$ را می‌سازیم:

$$-۱\leq\sin x\leq۱\xrightarrow{\times(-۳)}۳\geq-۳\sin x\geq-۳\xrightarrow{+(۲a+۱)}$$

$$\underbrace{(۲a+۱)+۳}_{\text{بیشترین مقدار}}\geq(۲a+۱)-۳\sin x\geq(۲a+۱)-۳$$

$$\Rightarrow۲a+۱+۳=۸\Rightarrow۲a=۸-۳-۱\Rightarrow۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

۲۸ - گزینه ۲

$$\boxed{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\ ,\quad ۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}}$$

$$1+\tan^2 ۳۳۰^\circ = \frac{۱}{\cos^2 ۳۳۰} \Rightarrow ۱ + (-\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ = \frac{۱}{\cos^2 ۳۳۰^\circ} \Rightarrow ۱ + \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{\cos^2 ۳۳۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cos^2 ۳۳۰} = ۱ + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \cos^2 ۳۳۰ = \frac{۳}{۴}$$

از طرفی: $\sin^2 ۳۳۰^\circ + \cos^2 ۳۳۰^\circ = ۱ \Rightarrow \sin^2 ۳۳۰ = ۱ - \cos^2 ۳۳۰ = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} \begin{cases} \sin ۳۳۰ = \frac{۱}{۲} \\ \sin ۳۳۰ = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

چون زاویه‌ی ۳۳۰° در ربع چهارم واقع است، سینوس آن منفی است، پس $\sin ۳۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$ را می‌پذیریم.

$\cos ۲۴۰^\circ$ را چنین محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^2 ۲۴۰ + \cos^2 ۲۴۰ = ۱ \Rightarrow (-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ + \cos^2 ۲۴۰ = ۱ \Rightarrow \cos^2 ۲۴۰ = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} \begin{cases} \cos ۲۴۰ = \frac{۱}{۲} \\ \cos ۲۴۰ = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

و چون زاویه‌ی ۲۴۰ در ربع سوم است، کسینوس آن منفی است. پس $\cos ۲۴۰ = -\frac{۱}{۲}$ را بر می‌گزینیم.

$$\sin ۳۳۰^\circ + \cos ۲۴۰^\circ = -\frac{۱}{۲} + (-\frac{۱}{۲}) = -۱$$

۲۹ - گزینه ۳ بیشترین مقدار سینوس و کسینوس برابر ۱ است. بنابراین مجموع این دو نسبت زمانی ۲ است که هر یک برابر با ۱ باشند:

$$\cos(A-B) = ۱ \Rightarrow A - B = ۰ \Rightarrow A = B$$

$$\sin(\tfrac{B}{۲} + C) = ۱ \Rightarrow \tfrac{B}{۲} + C = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{C} = ۹۰ - \tfrac{B}{۲}$$

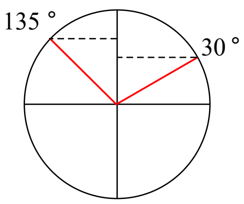
از طرفی: $A + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B + B + ۹۰ - \frac{B}{۲} = ۱۸۰$

$$\Rightarrow ۲B - \frac{B}{۲} = ۱۸۰ - ۹۰ \Rightarrow ۱/۵B = ۹۰ \Rightarrow B = \frac{۹۰}{۱/۵} = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = ۶۰^\circ \\ \widehat{C} = ۶۰^\circ \end{cases}$$

پس مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۳۰ - گزینه ۲

زاویه‌ی θ در حرکت از ۳۰° تا ۱۳۵°، از ۹۰° می‌گذرد، یعنی $\sin \theta$ در این مسیر، حداکثر خود را تجربه می‌کند، یعنی حداکثر $\sin \theta$ برابر با یک است. از طرفی:



یعنی کمترین مقدار سینوس در این شرایط برابر با $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ است. پس:

$$\frac{۱}{۲} < \sin\theta \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۳m - ۲}{۴} \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۲ < ۳m - ۲ \le ۴$$

$$\xrightarrow{+۲} ۴ < ۳m \le ۶ \xrightarrow{\div ۳} \tfrac{۴}{۳} < m \le ۲$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۶ - ۲	۱۱ - ۳	۱۶ - ۳	۲۱ - ۲	۲۶ - ۳
۲ - ۴	۷ - ۲	۱۲ - ۴	۱۷ - ۳	۲۲ - ۳	۲۷ - ۱
۳ - ۳	۸ - ۲	۱۳ - ۱	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۳	۱۴ - ۲	۱۹ - ۳	۲۴ - ۴	۲۹ - ۳
۵ - ۲	۱۰ - ۴	۱۵ - ۴	۲۰ - ۳	۲۵ - ۳	۳۰ - ۲