نام آزمون: مثلثات

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - معادلهٔ خطی که محور طول‌ها (xها) را در نقطه‌ای به طول -۱ قطع می‌کند و با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، کدام است؟

① $y = \sqrt{۳}x - \sqrt{۳}$

② $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

③ $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

④ $y = \sqrt{۳}x + \sqrt{۳}$

۲ - اگر $\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta + \frac{۱}{۱ + \cot^۲\theta}$ کدام است؟

① $\frac{۵}{۸}$

② $\frac{-۵}{۸}$

③ $\frac{۷}{۸}$

④ $\frac{-۷}{۸}$

۳ - حاصل عبارت تعریف‌شدهٔ $۲\tan^۲\theta - \frac{۱}{۱ + \sin\theta} + \frac{۱}{۱ - \sin\theta}$ کدام است؟

① -۱

② صفر

③ ۱

④ ۲

۴ - اگر $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$ و رابطهٔ $\sqrt{1+\tan^2\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}=0$ برقرار باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی واقع است؟

(۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

۵ - اگر $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$، آنگاه حاصل $\tan\theta+\cot\theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{9}{8}$
(۲) $\frac{8}{9}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{4}{9}$

۶ - تانژانت زاویهٔ حادهٔ بین دو ضلع از مثلثی به طول اضلاع ۶ و ۸ واحد، برابر ۰٫۷۵ است. مساحت مثلث کدام است؟

(۱) ۱۴٫۴
(۲) ۱۸
(۳) ۱۹٫۲
(۴) ۲۳٫۲

۷ - اگر $45^\circ<x<90^\circ$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $A=\sqrt{\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}-4+\cot x}$ کدام است؟

(۱) $\tan x$
(۲) $\cot x$
(۳) $2\tan x-\cot x$
(۴) $2\cot x-\tan x$

۸ - چه تعداد از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

الف) $\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\sin\theta}$

ب) $\frac{۱}{\cos x} - \frac{\cos x}{۱+\sin x} = \tan x$

ج) $\frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

د) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

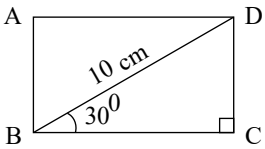
① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۹ - در شکل زیر، محیط مستطیل $ABCD$ کدام است؟



① $۱۰\sqrt{۳}$

② $۵(۱+\sqrt{۳})$

③ $۵\sqrt{۳}$

④ $۱۰(۱+\sqrt{۳})$

۱۰ - حاصل عبارت $A = \frac{۱ + \tan^۲۶۰^\circ + \sin^۲۶۰^\circ}{\cot ۴۵^\circ + \cos^۲۳۰^\circ}$ کدام است؟

① $\frac{۱۹}{۷}$

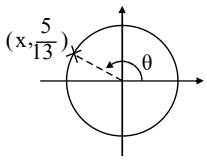
② $\frac{۱+۲\sqrt{۳}}{۳}$

③ $\frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۴}$

④ $\frac{۷}{۴}$

مثلثات

۱۱ - در دایره‌ی مثلثاتی شکل زیر، مقدار $\cot\theta$ کدام است؟



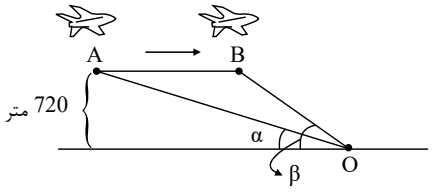
۱) $\frac{۵}{۱۲}$

۲) $-\frac{۵}{۱۲}$

۳) ۲٫۴

۴) $-۲٫۴$

۱۲ - مطابق شکل هواپیمای دشمن موازی سطح زمین در ارتفاع ۷۲۰ متری در حال حرکت است. اگر پدافند هوایی (نقطه‌ی O) این هواپیما را در دو لحظه‌ی مختلف با زاویه‌های α و β مشاهده کند. به‌طوری‌که $\tan\alpha = ۰٫۳$ و $\tan\beta = ۰٫۴$، هواپیما در این مدت چند متر حرکت کرده است؟



۱) ۴۰۰

۲) ۵۲۰

۳) ۶۰۰

۴) ۸۰۰

۱۳ - اگر $m = ۳\cot\theta$ و θ زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{m^۲ + ۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{\cos\theta}$

۲) $-(۳\cot\theta + ۳)$

۳) $۳\cos\theta$

۴) $\frac{-۳}{\sin\theta}$

۱۴ - حاصل عبارت $A = \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha + \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\sin\alpha + \cos\alpha$

۳) $۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

۴) $۱ + \cos^۲\alpha$

۱۵- اگر خط $y = x + ۱$ را حول محل تقاطع آن با محور طول‌ها ۱۵° در جهت مثبت مثلثاتی دوران دهیم، معادله‌ی خط به‌دست آمده کدام است؟

(۱) $۳y = \sqrt{۳}x + \sqrt{۳}$

(۲) $y = \sqrt{۳}x + \sqrt{۳}$

(۳) $۳y = \sqrt{۳}x + ۱$

(۴) $y = \sqrt{۳}x + ۱$

۱۶- مقدار $A = \sqrt{۱ - ۲\sin x \cos x} - \sqrt{۱ + ۲\sin x \cos x}$ به‌ازای $x = ۲۰۰^\circ$، کدام است؟

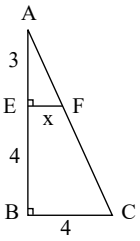
(۱) $۲\sin ۲۰۰^\circ$

(۲) $۲\cos ۲۰۰^\circ$

(۳) $-۲\sin ۲۰۰^\circ$

(۴) $-۲\cos ۲۰۰^\circ$

۱۷- باتوجه به اندازه‌های داده شده در شکل، x کدام است؟



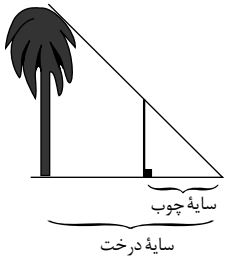
(۱) ۳

(۲) $\frac{۳}{۷}$

(۳) ۷

(۴) $\frac{۱۲}{۷}$

۱۸- برای محاسبه‌ی ارتفاع یک درخت، از یک قطعه چوب به طول یک متر که به‌صورت عمودی موازی درخت قرار دارد استفاده کرده‌ایم، به‌طوری که سایه‌ی چوب مطابق شکل منطبق بر سایه‌ی درخت است. در صورتی‌که طول سایه‌ی چوب ۴ متر و طول سایه‌ی درخت ۳۲ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

۱۹- خط $y - \sqrt{۳}x = ۵$ با جهت مثبت محور افقی چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) ۳۰°

۲) ۴۵°

۳) ۶۰°

۴) ۹۰°

۲۰- اگر انتهای کمان متناظر با زاویه‌ی x در ناحیه‌ی سوم باشد، حاصل $A = \sqrt{\frac{۱ + \tan^۲ x}{\tan^۲ x}} \times \sin x$ کدام است؟

۱) $\sin^۲ x$

۲) $\tan x$

۳) -۱

۴) ۱

۲۱- اگر $۳\sin\alpha + ۲\cos\beta = ۵$، آنگاه $\sin^۲\beta + \cos^۲\alpha$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۵

۴) ۲۵

۲۲- اگر α زاویه‌ای در ربع چهارم باشد، $\sin\alpha\cos\alpha$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

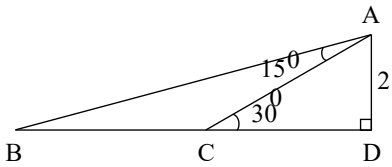
۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $-\frac{۱}{۴}$

۲۳ - در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۱) $۴\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

(۲) ۴

(۳) $۴\sqrt{۳}$

(۴) $۴\tan ۱۵^\circ$

۲۴ - اگر ضلع زاویه‌ی θ ، دایره‌ی مثلثاتی را در ربع سوم در نقطه‌ی P قطع کند و $\cos\theta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، مختصات نقطه‌ی P و $\cot\theta$ به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

(۱) $-۱, (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$

(۲) $۱, (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

(۳) $-۱, (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

(۴) $۱, (\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$

۲۵ - خط l به معادله‌ی $(m-۱)y + (۲m-۱)x = ۱$ با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد. این خط محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

(۱) $-\frac{۱}{۳}$

(۲) -۳

(۳) $\frac{۲}{۳}$

(۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۶ - حدود x کدام می‌تواند باشد تا $\sin x.\cos x < ۰$ باشد؟

(۱) $۱۸۰^\circ < x < ۳۶۰^\circ$

(۲) $۲۷۰^\circ < x < ۳۶۰^\circ$ یا $۹۰^\circ < x < ۱۸۰^\circ$

(۳) $۱۸۰^\circ < x < ۲۷۰^\circ$ یا $۰^\circ < x < ۹۰^\circ$

(۴) $۹۰^\circ < x < ۲۷۰^\circ$

۲۷ - حاصل عبارت زیر همواره برابر با کدام گزینه است؟

$۱ - \sin\alpha.\cos\alpha = ?$

(۱) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha$

(۲) $\sin^۲\alpha - \cos^۲\alpha$

(۳) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^۲ + \sin\alpha\cos\alpha$

(۴) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲$

۲۸ - حاصل عبارت A کدام است؟ $(\cos\theta \neq ۰)$

$A = (۱ + \sin\theta)(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta)(۱ - \sin\theta)^۲$

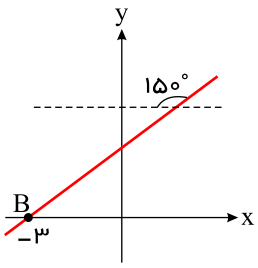
(۱) $\tan\theta\sin\theta$

(۲) $\cos^۲\theta$

(۳) $\frac{۱ + \sin^۲\theta}{\cos\theta}$

(۴) $\cos^۳\theta$

۲۹ - اگر نمایش معادله‌ی خط $ax - \sqrt{۳}y + c = ۰$ به صورت زیر باشد، حاصل $a.c$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) $\sqrt{۳}$

(۳) ۳

(۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۰- اگر $\tan ۵۰^\circ = a$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن ۱۲ و ۸ واحد و زاویه بین قطرهای آن ۵۰° می‌باشد، چند واحد مربع است؟

۱) $\frac{۹۶\sqrt{۱-a^۲}}{a}$

۲) $\frac{۹۶a}{\sqrt{۱+a^۲}}$

۳) $\frac{۴۸\sqrt{۱-a^۲}}{a}$

۴) $\frac{۴۸a}{\sqrt{۱+a^۲}}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

می‌دانیم: **شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد؛ برابر است با:** $\tan\alpha$

$$\begin{cases} \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} = a \\ y = ax + b \xrightarrow{(-۱,۰)} ۰ = -\sqrt{۳} + b \Rightarrow b = \sqrt{۳} \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۳}x + \sqrt{۳}$$

۲ - گزینه ۲ می‌دانیم: $۱ + \cot^۲\theta = \dfrac{۱}{\sin^۲\theta}$

$$A = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta + \frac{۱}{۱ + \cot^۲\theta} = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta + \sin^۲\theta = ۲\sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$
$$= ۲\sin^۲\theta - (۱ - \sin^۲\theta) = ۲\sin^۲\theta - ۱ + \sin^۲\theta = ۳\sin^۲\theta - ۱$$
$$\xrightarrow{\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۴}} ۳ \times \frac{۲}{۱۶} - ۱ = \frac{۶}{۱۶} - ۱ = \frac{-۱۰}{۱۶} = \frac{-۵}{۸}$$

۳ - گزینه ۴

$$\frac{۱}{۱ - \sin\theta} + \frac{۱}{۱ + \sin\theta} - ۲\tan^۲\theta = \frac{۱ + \sin\theta + ۱ - \sin\theta}{(۱ - \sin\theta)(۱ + \sin\theta)} - ۲\tan^۲\theta$$

$$= \frac{۲}{۱ - \sin^۲\theta} - \frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۲}{\cos^۲\theta} - \frac{۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{۲ - ۲\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}$$

$$= \frac{۲(۱ - \sin^۲\theta)}{\cos^۲\theta} = \frac{۲\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = ۲$$

۴ - گزینه ۴

می‌دانیم: $۱ + \tan^۲\alpha = \dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$، $\sqrt{a^۲} = |a|$

$$\sqrt{۱ + \tan^۲\alpha} - \frac{۱}{\cos\alpha} = ۰ \Rightarrow \sqrt{۱ + \tan^۲\alpha} = \frac{۱}{\cos\alpha} \Rightarrow \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}} = \frac{۱}{\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{۱}{\cos\alpha}\right| = \frac{۱}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha > ۰ \ (I)$$
$$\sin\alpha\cos\alpha < ۰ \xrightarrow{I} \sin\alpha < ۰ \ (II)$$
$$(I),(II): \begin{cases} \sin\alpha < ۰ \\ \cos\alpha > ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{ربع چهارم } \alpha$$

۵ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^۲\theta + \cos^۲\theta - ۲\sin\theta\cos\theta = \frac{۱}{۹}$$
$$\Rightarrow ۱ - ۲\sin\theta\cos\theta = \frac{۱}{۹} \Rightarrow ۲\sin\theta\cos\theta = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{۴}{۹}$$
$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^۲\theta + \cos^۲\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{۱}{\frac{۴}{۹}} = \frac{۹}{۴}$$

۶ - گزینه ۱

می‌دانیم: $۱ + \tan^۲\alpha = \dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$، $\sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}$، $S_{\triangle ABC} = \dfrac{۱}{۲}AB \cdot BC \cdot \sin\hat{B}$

$$\tan\alpha = ۰/۷۵ \Rightarrow ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + (\frac{۳}{۴})^۲ = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۴}{۵} \xrightarrow[\cos\alpha>۰]{\text{حاده } \alpha} \cos\alpha = \frac{۴}{۵}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha} = \pm\sqrt{۱ - (\frac{۴}{۵})^۲} = \pm\sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} = \pm\sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow[\sin\alpha>۰]{\text{حاده } \alpha} \sin\alpha = \frac{۳}{۵}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ \times \frac{۳}{۵} = ۱۴/۴$$

۷ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{aligned} ۱ + \tan^۲\alpha &= \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \\ ۱ + \cot^۲\alpha &= \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \\ \tan\alpha\cot\alpha &= ۱ \end{aligned}}$$

$$A = \sqrt{\frac{۱}{\sin^۲x} + \frac{۱}{\cos^۲x} - ۴} + \cot x$$

$$= \sqrt{(۱ + \cot^۲x) + (۱ + \tan^۲x) - ۴} + \cot x$$

$$= \sqrt{\cot^۲x + \tan^۲x + ۲ - ۴} + \cot x = \sqrt{\cot^۲x + \tan^۲x - ۲} + \cot x$$

$$= \sqrt{\cot^۲x + \tan^۲x - ۲\tan x\cot x} + \cot x = \sqrt{(\cot x - \tan x)^۲} + \cot x$$

$$= |\cot x - \tan x| + \cot x \xrightarrow[\cot x<\tan x]{۴۵^\circ<x<۹۰^\circ} \tan x - \cot x + \cot x = \tan x$$

۸ - گزینه ۳ بررسی سایر گزینه‌ها:

الف) نادرست زیرا:

$$\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۱}{\cos\theta}$$

ب) درست زیرا:

$$\frac{۱}{\cos x} - \frac{\cos x}{۱ + \sin x} = \frac{۱ + \sin x - \cos^۲x}{\cos x(۱ + \sin x)} = \frac{\sin x + (۱ - \cos^۲x)}{\cos x(۱ + \sin x)}$$

$$= \frac{\sin x + \sin^۲x}{\cos x(۱ + \sin x)} = \frac{\sin x(۱ + \sin x)}{\cos x(۱ + \sin x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ج) درست زیرا:

$$\frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

د) درست زیرا:

$$\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \underbrace{(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)}_{۱}(\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$

۹ - گزینه ۴

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CD}{۱۰} \Rightarrow CD = ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۵\ cm$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۱۰} \Rightarrow BC = \frac{۱۰ \times \sqrt{۳}}{۲} = ۵\sqrt{۳}$$

محیط مستطیل $= ۲(CD + BC) = ۲(۵ + ۵\sqrt{۳}) = ۲ \times ۵(۱ + \sqrt{۳}) = ۱۰(۱ + \sqrt{۳})$

۱۰ - گزینه ۱ می دانیم: $\cot ۴۵^\circ = ۱$ ، $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ، $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ ، $\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$$A = \frac{۱ + (\sqrt{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۱ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = \frac{۱ + ۳ + \frac{۳}{۴}}{۱ + \frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۴ + ۱۲ + ۳}{۴}}{\frac{۴ + ۳}{۴}} = \frac{۱۹}{۷}$$

۱۱ - گزینه ۴ مختصات هر نقطه مانند P که روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، عبارتست از:

$$P\left|\begin{matrix}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{matrix}\right.$$

پس در نقطه‌ی $P\left|\begin{matrix}x\\ \frac{۵}{۱۳}\end{matrix}\right.$ ، $\sin\theta$ برابر با $\frac{۵}{۱۳}$ است. برای یافتن کتانژانت θ، چنین عمل می‌کنیم:

$$۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}\Rightarrow ۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\frac{۲۵}{۱۶۹}}=\frac{۱۶۹}{۲۵}$$

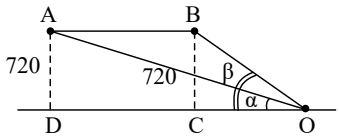
$$\Rightarrow \cot^۲\theta=\frac{۱۶۹}{۲۵}-۱\Rightarrow \cot^۲\theta=\frac{۱۶۹-۲۵}{۲۵}=\frac{۱۴۴}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}\cot\theta=\pm\frac{۱۲}{۵}\xrightarrow{\text{ربع دوم}}\cot\theta=\frac{-۱۲}{۵}=-۲/۴$$

۱۲ - گزینه ۳

در هر مثلث قائم‌الزاویه : $\tan\theta=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$

شکل را چنین تکمیل می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{OAD}:\tan\alpha=۰/۳$$

$$\Rightarrow\frac{۷۲۰}{OD}=۰/۳\Rightarrow OD=\frac{۷۲۰}{۰/۳}=۲۴۰۰$$

$$\overset{\Delta}{OBC}:\tan\beta=۰/۴\Rightarrow\frac{۷۲۰}{OC}=۰/۴$$

$$\Rightarrow OC=\frac{۷۲۰}{۰/۴}=۱۸۰۰$$

مسافت طی شده:

$$\Rightarrow AB=OD-OC=۲۴۰۰-۱۸۰۰=۶۰۰$$

۱۳ - گزینه ۴

$$۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

$$A=\sqrt{(۳\cot\theta)^۲+۹}=\sqrt{۹\cot^۲\theta+۹}=\sqrt{۹(۱+\cot^۲\theta)}$$

$$=۳\sqrt{۱+\cot^۲\theta}=۳\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲\theta}}=۳\times\frac{۱}{|\sin\theta|}\left.\begin{matrix}\\ \\ \theta:\text{ ناحیه‌ی سوم}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=۳\times\frac{۱}{-\sin\theta}=\frac{-۳}{\sin\theta}$$

۱۴ - گزینه ۱

$$A=\sin^۴\alpha+\cos^۴a+\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$$=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+\frac{۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}{\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱}}=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\underbrace{(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)}_{۱}{}^۲=۱$$

۱۵ - گزینه ۲

۱) شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد

۲) معادله‌ی خطی که با شیب m از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}x_۰\\ y_۰\end{matrix}\right.$ می‌گذرد عبارتست از $y-y_۰=m(x-x_۰)$

زاویه‌ای که با محور xها می‌سازد:

$$y=x+۱\Rightarrow\text{شیب}=۱\Rightarrow\tan\alpha=۱\Rightarrow\alpha=۴۵^\circ$$

اگر این خط را ۱۵° در جهت مثبت دوران دهیم، زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور xها ۶۰° می‌شود؛ پس:

$$\text{شیب جدید}=\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

از طرفی نقطه‌ی تلاقی خط $y=x+۱$ با محور x عبارتست از:

$$y=۰\Rightarrow x+۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۰\end{matrix}\right.$$

پس معادله‌ی خط جدید می‌شود:

$$y-۰=\sqrt{۳}(x+۱)\Rightarrow y=\sqrt{۳}x+\sqrt{۳}$$

۱۶ - گزینه ۱

$$\boxed{\begin{array}{l}۱)\ \sin^۲x+\cos^۲x=۱\\ ۲)\ \sqrt{x^۲}=|x|\end{array}}$$

$$A=\sqrt{\sin^۲x+\cos^۲x-۲\sin x\cos x}-\sqrt{\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x}$$

$$=\sqrt{(\sin x-\cos x)^۲}-\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}=|\sin x-\cos x|-|\sin x+\cos x|$$

زاویه‌ی ۲۰۰° در ربع سوم است و کسینوس آن از سینوس آن کوچک‌تر است (چون منفی‌تر است):

$$\cos ۲۰۰<\sin ۲۰۰\Rightarrow \sin ۲۰۰-\cos ۲۰۰>۰\Rightarrow \left|\underbrace{\sin ۲۰۰-\cos ۲۰۰}_{+}\right|=\sin ۲۰۰-\cos ۲۰۰$$

از طرفی $\sin ۲۰۰$ و $\cos ۲۰۰$ هر دو منفی هستند:

$$\begin{matrix}\sin ۲۰۰<۰\\ \cos ۲۰۰<۰\end{matrix}\Rightarrow \sin ۲۰۰+\cos ۲۰۰<۰\Rightarrow \left|\underbrace{\sin ۲۰۰+\cos ۲۰۰}_{-}\right|=-\sin ۲۰۰-\cos ۲۰۰$$

پس داریم:

$$A=\sin ۲۰۰-\cos ۲۰۰-(-\sin ۲۰۰-\cos ۲۰۰)$$
$$=\sin ۲۰۰-\cos ۲۰۰+\sin ۲۰۰+\cos ۲۰۰=۲\sin ۲۰۰$$

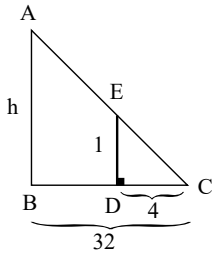
۱۷ - گزینه ۴ دو مثلث $\overset{\Delta}{AEF}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ باهم متشابهند و داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{۳}{۳+۴}=\frac{x}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۷}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x=\frac{۴\times ۳}{۷}=\frac{۱۲}{۷}$$

۱۸ - گزینه ۲

به شکل مقابل توجه کنید:



دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{CDE}$ متشابهند و داریم:

$$\frac{CD}{BC}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow \frac{۴}{۳۲}=\frac{۱}{h}\Rightarrow h=\frac{۳۲}{۴}=۸$$

۱۹ - گزینه ۱

شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$۳y=\sqrt{۳}x+۵\xrightarrow{\div ۳} y=\underbrace{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}_{\text{شیب}}x+\frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

۲۰ - گزینه ۳ $\boxed{۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}}$

$$A=\sqrt{\frac{۱+\tan^۲x}{\tan^۲x}}\times\sin x=\sqrt{\frac{\frac{۱}{\cos^۲x}}{\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}}}\times\sin x=\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲x}}\times\sin x=\frac{۱}{|\sin x|}\times\sin x$$

در ربع سوم، $\sin x$ منفی است. پس:

$$A = \frac{۱}{-\sin x} \times \sin x = -۱$$

۲۱ - گزینه ۱

بیشترین مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ برابر با ۱ است

$۳\sin\alpha + ۲\cos\beta = ۵ \Rightarrow$ بیشترین مقدار خود را اختیار کرده اند. $\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = ۱ \\ \cos\beta = ۱ \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow ۱^۲ + cos^۲\alpha \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۰ \Rightarrow \cos\alpha = ۰ \\ \sin^۲\beta + \cos^۲\beta = ۱ \Rightarrow \sin^۲\beta + ۱^۲ = ۱ \Rightarrow \sin^۲\beta = ۰ \Rightarrow \sin\beta = ۰ \end{cases}$$

$$\sin^۲\beta + \cos^۲\beta = ۰^۲ + ۰^۲ = ۰$$

۲۲ - گزینه ۴ محدوده‌ی $\sin\alpha\cos\alpha$ را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\overbrace{(\sin\alpha + \cos\alpha)^۲}^{\text{نامنفی}} = ۱ + ۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow ۱ + ۲\sin\alpha\cos\alpha \geq ۰ \Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha \geq -۱ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha \geq -\frac{۱}{۲}$$

$$\underbrace{(\sin\alpha - \cos\alpha)^۲}_{\text{نامنفی}} = ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha \geq ۰ \Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha \leq ۱ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{۱}{۲}$$

پس در حالت کلی داریم: $(*) \quad -\frac{۱}{۲} \leq \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{۱}{۲}$

اما α در ربع چهارم است؛پس $\sin\alpha$ منفی و$\cos\alpha$ مثبت است؛در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha$ خواهدبود.بنابراین رابطه‌ی $*$ به‌صورت $-\frac{۱}{۲} \leq \sin\alpha\cos\alpha \leq ۰$ در می آید و از میان گزینه ها فقط گزینه‌ی ۴ در این شرایط صدق می‌کند.

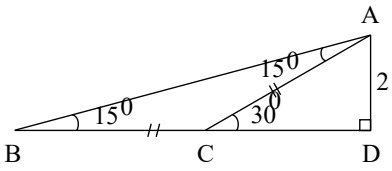
۲۳ - گزینه ۲

$$\overset{\Delta}{ADC} : \sin ۳۰^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : C\widehat{A}D = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABD} : \widehat{B} = ۹۰^\circ - \widehat{A} = ۹۰^\circ - (۶۰^\circ + ۱۵^\circ) = ۱۵^\circ$$

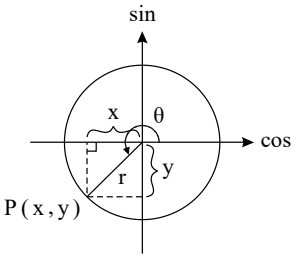
پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و شکل به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow AC = BC = ۴$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC \times AD = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۴$$

۲۴ - گزینه ۲ شکل زیر را تشکیل می‌دهیم:



$$x = \cos\theta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ = r^۲ \xrightarrow{r=۱} \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + y^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی سوم}} y = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow P(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \Rightarrow \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۱$$

۲۵ - گزینه ۲ اگر خطی با جهت مثبت محور xها زاویه α بسازد، شیب آن $\tan\alpha$ است.

$$(m-۱)y + (۲m-۱)x = ۱ \Rightarrow (m-۱)y = -(۲m-۱)x + ۱$$

$$\xrightarrow{\times(m-۱)} y = -\frac{۲m-۱}{m-۱}x + \frac{۱}{m-۱}$$

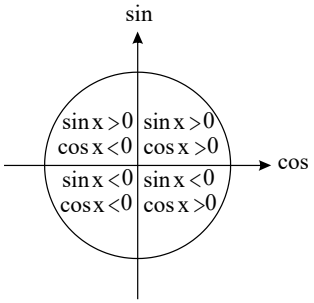
$$\text{شیب خط} = -\frac{۲m-۱}{m-۱} = \tan ۴۵ = ۱ \Rightarrow -۲m + ۱ = m - ۱ \Rightarrow -۳m = -۲ \Rightarrow m = \frac{۲}{۳}$$

پس معادله‌ی خط بصورت زیر در می‌آید:

$-\frac{۱}{۳}y+\frac{۱}{۳}x=۱ \xrightarrow{x=۰} -\frac{۱}{۳}y=۱ \Rightarrow y=-۳$ محل تقاطع خط با محور yها:

۲۶ - گزینه ۲

x در ربع دوم یا چهارم واقع است $\Rightarrow \cos x, \sin x$ مختلف العلامت اند $\Rightarrow \sin x \cos x < ۰$



۲۷ - گزینه ۳

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

$$۱-\sin\alpha\cos\alpha=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲+\sin\alpha\cos\alpha$$

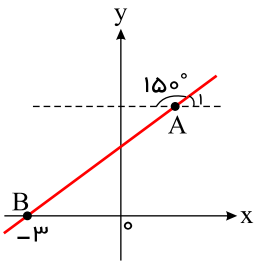
۲۸ - گزینه ۴

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\underbrace{(۱+\sin\theta)}_{\text{مزدوج}}(\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})\underbrace{(۱-\sin\theta)}_{\text{مزدوج}}(۱-\sin\theta)$$

$$=(\underbrace{۱-\sin^۲\theta}_{\cos^۲\theta})(\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta})(۱-\sin\theta)=\frac{\cos^۲\theta\overbrace{(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)}^{\text{مزدوج}}}{\cos\theta}=\cos\theta\times\cos^۲\theta=\cos^۳\theta$$

۲۹ - با توجه به شکل داریم گزینه ۳:



$$۱۵۰^\circ+\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ=۳۰^\circ$$

$$=m=\tan\hat{A}_۱=\tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \text{شیب خط}$$

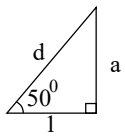
$$y-y_B=m(x-x_B) \Rightarrow y-۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-(-۳))$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-y+\sqrt{۳}=۰\\ ax-\sqrt{۳}y+c=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-\sqrt{۳}y+۳=۰\\ ax-\sqrt{۳}y+c=۰\end{cases}$$

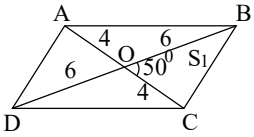
$$\Rightarrow a=۱\ ,\ c=۳ \Rightarrow a.c=۳$$

۳۰ - گزینه ۴ مساحت مثلثی به اضلاع a و b که زاویه بین آنها θ است از رابطه $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ به دست می‌آید

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و با توجه به این که $\tan۵۰^\circ=\frac{a}{۱}$ داریم:



$$d=\sqrt{a^۲+۱}$$
$$\sin۵۰^\circ=\frac{a}{\sqrt{a^۲+۱}}$$



$$S_۱=S_{BCO}=\frac{۱}{۲}(۴)(۶)\sin۵۰^\circ=۱۲\times\left(\frac{a}{\sqrt{۱+a^۲}}\right)$$

$$S_{ABCD}=۴S_۱=۴\times\frac{۱۲a}{\sqrt{۱+a^۲}}=\frac{۴۸a}{\sqrt{۱+a^۲}}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۴	۱۶ - ۱	۲۱ - ۱	۲۶ - ۲
۲ - ۲	۷ - ۱	۱۲ - ۳	۱۷ - ۴	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۴	۸ - ۳	۱۳ - ۴	۱۸ - ۲	۲۳ - ۲	۲۸ - ۴
۴ - ۴	۹ - ۴	۱۴ - ۱	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۱	۱۵ - ۲	۲۰ - ۳	۲۵ - ۲	۳۰ - ۴