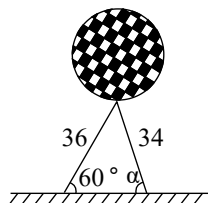




علی هاشمی

۱- یک بالن اطلاعاترسانی مطابق شکل زیر توسط دو طناب به طول‌های ۳۴ و ۳۶ متر به زمین بسته شده است. مقدار سینوس زاویه α تقریباً کدام است؟



$(\sqrt{3} \approx 1,7)$

- ۱) ۰,۸۵
- ۲) ۰,۸۷
- ۳) ۰,۸۸
- ۴) ۰,۹

۲- حاصل عبارت $\frac{2\cos^2 45^\circ + 4\sin^2 60^\circ}{2 - 3\cot 30^\circ \times \tan 30^\circ}$ کدام است؟

- ۱) -۴
- ۲) ۵
- ۳) $-\frac{1}{2}$
- ۴) $\frac{4}{3}$

۳- اگر $30^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{2m-1}{4}$ باشد، حدود m کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۲) $\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$
- ۳) $\frac{3}{2} < m \leq \frac{5}{2}$
- ۴) $\frac{1}{2} < m \leq 1$

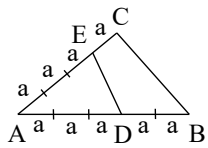


۴- در مثلث ABC ، زاویه B حاده بوده و $AB = 8$ و $BC = 13$ است. در صورتی که مساحت مثلث $26\sqrt{3}$ باشد، اندازه زاویه B چقدر است؟

- ① 30°
- ② 45°
- ③ 60°
- ④ 75°

۵- اگر $\tan \theta = \frac{a+3}{b}$ و $\cot \theta = \frac{2}{a-1}$ باشد، کدام رابطه بین a و b برقرار است؟ ($a \neq 1, b \neq 0$)

- ① $b = \frac{a+3}{a-1}$
- ② $a = \frac{b+3}{b}$
- ③ $b = \frac{a^2 + 2a - 3}{2}$
- ④ $a = \frac{b+6}{b-2}$



۶- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

- ① $\frac{20}{9}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{3}{5}$
- ④ $\frac{4}{5}$

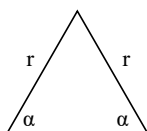
۷- معادله خطی که با جهت مثبت محور x زاویه 60° می‌سازد و عرض از مبدأ آن ۲ است، کدام است؟

- ① $y = 2 - \sqrt{3}x$
- ② $y - \sqrt{3}x = 2$
- ③ $y + \sqrt{3}x = 3$
- ④ $y = 3 + \sqrt{3}x$



۸- اگر $\sin 2\alpha > 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ باشد، آن گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی است؟ ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$)

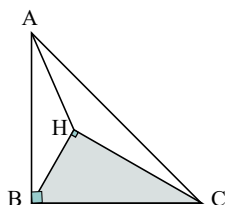
- اول ①
- دوم ②
- سوم ③
- چهارم ④



۹- اگر مساحت مثلث متساوی الساقین روبه‌رو برابر با $\frac{r^2}{3}$ باشد، حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟

- ① $\frac{5}{3}$
- ② $\frac{\sqrt{15}}{3}$
- ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- ④ $\frac{1}{3}$

۱۰- در هرم شکل مقابل، $\widehat{HBC} = 75^\circ$ و $\widehat{ACB} = 60^\circ$ است. اگر طول ضلع HB برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، اندازه AB کدام است؟



$$(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4})$$

- ① $\sqrt{3} - 1$
- ② $3 - \sqrt{3}$
- ③ $1 + \sqrt{3}$
- ④ $3 + \sqrt{3}$



۱۱- اگر $\frac{\tan^3 \theta - 1}{\tan \theta - 1} - \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sqrt{2}$ و انتهای کمان θ در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\sin \theta$ کدام است؟

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

② $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

۱۲- اگر $\cos x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + 2 \tan x$ کدام است؟

① $\frac{4}{3}$

② $\frac{3}{4}$

③ ۲

④ ۱

۱۳- اگر $\tan \alpha = \sqrt{7}$ باشد، حاصل $\frac{\sqrt{20} \sin \alpha}{(\sqrt{5} - 1) \sin \alpha + \sqrt{7} \cos \alpha}$ کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴



۱۴- اگر $\sin x + \cos x = \frac{2}{5}$ باشد، حاصل عبارت $A = \tan x + \cot x$ کدام است؟

① $-\frac{21}{50}$

② $-\frac{50}{21}$

③ $\frac{29}{50}$

④ $\frac{50}{29}$

۱۵- کدام اتحاد مثلثاتی صحیح است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند.)

① $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

② $2 \cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$

③ $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

④ $\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$

۱۶- ساده شده عبارت $A = (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta)^2 (1 + \tan^2 \theta)^2 - (\tan^2 \theta - 1)^2$ کدام است؟

① $\tan^4 \theta - 1$

② $2(\tan^4 \theta + 1)$

③ $2 \tan^4 \theta$

④ صفر

۱۷- چه تعداد از موارد زیر، یک اتحاد مثلثاتی را نشان می‌دهند؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند.)

الف) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = 2 \sin^2 \theta - 1$

ب) $\sin^2 \theta \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$

پ) $\cos^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$

① ۳

② ۲

③ ۱

④ صفر



۱۸- حاصل عبارت $A = \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}$ همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند).

- ① $1 + \tan^2 x$
- ② $1 + \tan^3 x$
- ③ $1 + \tan^4 x$
- ④ $1 + \tan^6 x$

۱۹- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، AB و AC دو ساق مثلث و اندازه زاویه B برابر 75° است. اگر مساحت این مثلث ۲۵ واحد مربع باشد، اندازه ساق AB کدام است؟

- ① ۱۵
- ② ۲۰
- ③ ۲۵
- ④ ۱۰

۲۰- اگر $\tan \theta + \cot \theta < 0$ باشد، آن‌گاه θ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- ① اول یا دوم
- ② سوم یا چهارم
- ③ اول یا چهارم
- ④ دوم یا چهارم

۲۱- دو مثلث ABC و EFG در نظر بگیرید به طوری که $AB = \frac{1}{2}EF$ و $AC = 3EG$ باشد و زاویه‌های A و E برابر باشند، آن‌گاه نسبت

مساحت $\triangle ABC$ به مساحت $\triangle EFG$ کدام است؟

- ① $\frac{2}{3}$
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



۲۲- اگر خط $12 = 3x - 4y$ با جهت مثبت محور x زاویه α را بسازد، آن گاه مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{5}$
- ② $\frac{4}{5}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ $\frac{1}{2}$

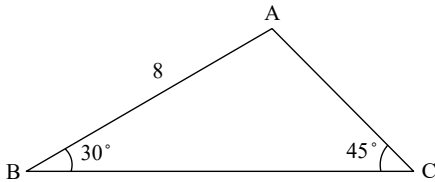
۲۳- اگر $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ باشد، حاصل عبارت تعریف شده $\cos \alpha - \sin^2 \alpha$ همواره کدام است؟

- ① صفر
- ② ۱
- ③ -۱
- ④ $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۲۴- عبارت $A = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ همواره با کدام گزینه برابر است؟ (عبارت

تعریف شده است.)

- ① $1 - \tan^2 \alpha$
- ② $1 + \tan^2 \alpha$
- ③ $1 - \tan \alpha$
- ④ $1 + \tan \alpha$



۲۵- مساحت مثلث زیر کدام است؟

- ① $8(1 + \sqrt{3})$
- ② $\frac{8\sqrt{3} + 12}{3}$
- ③ ۸
- ④ $\frac{16\sqrt{3} + 24}{3}$



۲۶- اگر داشته باشیم $\tan \theta < 0$ و $\cos \theta \cot \theta < 0$ ، زاویه θ در کدام ناحیه مثلثاتی واقع شده است؟

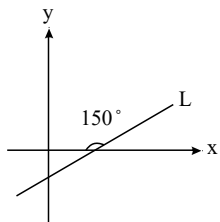
- ① اول
- ② دوم
- ③ سوم
- ④ چهارم

۲۷- حاصل عبارت تعریف شده $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha (\cot \alpha + \tan \alpha)$ کدام گزینه است؟

- ① $\sin \alpha$
- ② -1
- ③ صفر
- ④ 1

۲۸- اگر $\tan \theta = 2$ و انتهای زاویه θ در ناحیه سوم محورهای مختصات واقع باشد، مجموع مؤلفه‌های اول و دوم نقطه P (محل برخورد انتهای زاویه θ با دایره مثلثاتی) کدام است؟

- ① $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$
- ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
- ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- ④ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$



۲۹- اگر نمودار خط $L: 3x + ay = 4$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

- ① $-\sqrt{3}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ $3\sqrt{3}$
- ④ $-3\sqrt{3}$



۳۰- اگر x در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\cos x = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $2 \tan x - 5 \cot x$ برابر کدام است؟

- ① $-\sqrt{5}$
- ② $\sqrt{5}$
- ③ ۰
- ④ $2\sqrt{5}$

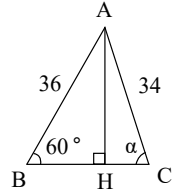


پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و در مثلث قائم‌الزاویه AHC ، سینوس α را تشکیل می‌دهیم:

$$\triangle AHC : \sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{34}$$



برای محاسبه سینوس α ، مقدار AH باید معلوم شود؛ به سراغ مثلث AHB می‌رویم:

$$\triangle AHB : \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin 60^\circ = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \approx 18 \times 1,7$$

حال با این مقدار بدست آمده برای AH ، سینوس α را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{18 \times \cancel{1,7}}{\cancel{34}} = \frac{18}{20} = 0,9$$

۲ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{2\cos^2 45^\circ + 3\sin^2 60^\circ}{2 - 3\cot 30^\circ \times \tan 30^\circ} = \frac{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 - 3 \times 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{4}}{-1} = \frac{1 + 3}{-1} = -4$$

۳ - گزینه ۳

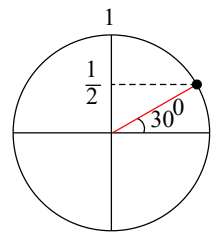
برای هر زاویه α : $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ یعنی حداکثر سینوس آن ۱ و حداقل آن -۱ است.

وقتی α در بازه $[30^\circ, 90^\circ]$ است، تغییرات آن محدودتر می‌شود. دایره را ببینید.

$$30^\circ < \alpha \leq 90^\circ \xrightarrow{\sin(\cdot)} \frac{1}{2} < \sin \alpha \leq 1$$

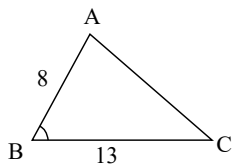
$$\sin \alpha = \frac{r \cdot m - 1}{r} \xrightarrow{\times r} \frac{1}{2} < \frac{r \cdot m - 1}{r} \leq 1 \xrightarrow{\times r} r < r \cdot m - 1 \leq r$$

$$\xrightarrow{+1} r < r \cdot m \leq r + 1 \xrightarrow{\div r} \frac{r}{r} < m \leq \frac{r+1}{r}$$



۴ - گزینه ۳ می‌دانیم: مساحت هر مثلث عبارت‌اند از: (زاویه بین آن دو ضلع) \times حاصل‌ضرب دو ضلع $\times \frac{1}{2}$

شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} \Rightarrow 26\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 8 \times 13 \times \sin \hat{B} \Rightarrow 26\sqrt{3} = 52 \sin \hat{B}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{26\sqrt{3}}{52} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

۵ - گزینه ۴ می‌دانیم که $\tan \theta$ و $\cot \theta$ معکوس هم هستند؛ یعنی:



$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \Rightarrow \frac{a+3}{b} = \frac{1}{\frac{2}{a-1}} \Rightarrow \frac{a+3}{b} = \frac{a-1}{2} \Rightarrow 2a+6 = ab-b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - ab = -6 - b \Rightarrow a(2-b) = -6 - b \Rightarrow a = \frac{-6-b}{2-b} = \frac{b+6}{b-2} \\ 2a+6 = b(a-1) \Rightarrow b = \frac{2a+6}{a-1} \end{cases}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\frac{1}{2} \times 5a \times 4a \times \sin A}{\frac{1}{2} \times 3a \times 3a \times \sin A} = \frac{20}{9}$$

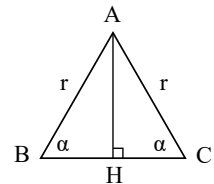
$$\text{شیب خط} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{معادله خط: } y - 2 = \sqrt{3}(x - 0) \\ y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow y - \sqrt{3}x = 2$$

$$\sin 2\alpha > 0 \Rightarrow 0^\circ < 2\alpha < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad (I)$$

$$\sin \alpha \tan \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ ربع اول} \\ \alpha \text{ ربع چهارم} \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) : 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ ربع اول } \alpha$$



$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot BH \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} r \cdot (r \cos \alpha) \sin \alpha$$

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABH} = r^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{r^2}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \xrightarrow[\sin \alpha + \cos \alpha > 0]{\alpha \text{ حاده}} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\triangle HBC : \hat{HBC} = 75^\circ, \hat{BHC} = 90^\circ \Rightarrow \hat{HCB} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(\hat{HCB}) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{HB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{BC}$$

آرایش گزینه‌ها نشان می‌دهد که باید a را بر حسب b و یا b را بر حسب a بدست آوریم.

۶ - گزینه ۱ سینوس زاویه بین آن‌ها \times حاصلضرب دو ضلع \times مساحت مثلث $= \frac{1}{2}$

۷ - گزینه ۲

شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه θ بسازد برابر $\tan \theta$ است
معادله خطی که با شیب m از نقطه (x_0, y_0) بگذرد، عبارتست از $y - y_0 = m(x - x_0)$

عرض از مبدأ ۲ است. یعنی خط از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد.

۸ - گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin \alpha > 0 \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 180^\circ$

۹ - گزینه ۲

می‌دانیم: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}$

بنابراین $HB = r \cdot \cos \alpha$

پس داریم:

برای به دست آوردن $\sin \alpha + \cos \alpha$ از اتحاد مربع دو جمله‌ای کمک می‌گیریم.

۱۰ - گزینه ۴



$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2BC} \Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \Rightarrow BC = \sqrt{3}+1$$

$$\triangle ABC : \tan(\hat{A}CB) = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AB}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow AB = 3 + \sqrt{3}$$

۱۱ - گزینه ۴

$$\frac{\tan^r \theta - 1}{\tan \theta - 1} - \frac{1}{\cos^r \theta} = \sqrt{2}$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$1 - \tan^r \theta = \frac{1}{\cos^r \theta}$$

می دانیم:

$$\frac{(\tan \theta - 1)(\tan^r \theta + \tan \theta + 1)}{(\tan \theta - 1)} - (1 + \tan^r \theta) = \sqrt{2}$$

$$\cancel{\tan^r \theta} + \tan \theta + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\tan^r \theta} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{2}$$

$$1 + \tan^r \theta = \frac{1}{\cos^r \theta} \Rightarrow 1 + 2 = \frac{1}{\cos^r \theta} \Rightarrow \frac{1}{3} = \cos^r \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{matrix} \text{ربع سوم} \\ \cos \theta < 0 \end{matrix} \rightarrow \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^r \theta = 1 - \cos^r \theta = 1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^r = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{matrix} \text{ربع سوم} \\ \sin \theta < 0 \end{matrix} \rightarrow \sin \theta = -\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

۱۲ - گزینه ۳

$$\frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + 2 \tan x = \frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + \frac{2 \sin x}{\cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \sin x + 2 \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x}$$

$$= \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2 + 2 \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

۱۳ - گزینه ۲

$$\tan \alpha = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{20} \sin \alpha}{(\sqrt{5}-1) \sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{5} \cos \alpha}{(\sqrt{5}-1) \sqrt{5} \cos \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{5} \cos \alpha \times \sqrt{20}}{\sqrt{5} \cos \alpha (\sqrt{5}-1+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2$$

۱۴ - گزینه ۲

$$(\sin x + \cos x)^r = \frac{4}{25} \Rightarrow \sin^r x + \cos^r x + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{25} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-21}{25} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-21}{50}$$

$$A = \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{-50}{21}$$

۱۵ - گزینه ۳ بررسی گزینه ها:

$$1) \text{ نادرست: } 1 + \cot^r \theta = 1 + \frac{\cos^r \theta}{\sin^r \theta} = \frac{\cos^r \theta + \sin^r \theta}{\sin^r \theta} = \frac{1}{\sin^r \theta}$$

$$2) \text{ نادرست: } (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$



۳) درست: $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

۴) نادرست: $\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

۱۶ - گزینه ۴

$$(\cos^r \theta - \sin^r \theta)^r (1 + \tan^r \theta)^r - (\tan^r \theta - 1)^r$$

$$= \left((\cos^r \theta - \sin^r \theta) \underbrace{(\cos^r \theta + \sin^r \theta)} \right)^r \left(\frac{1}{\cos^r \theta} \right)^r - (\tan^r \theta - 1)^r$$

$$= \left(\frac{\cos^r \theta - \sin^r \theta}{\cos^r \theta} \right)^r - (\tan^r \theta - 1)^r = (1 - \tan^r \theta)^r - (-1 + \tan^r \theta)^r = 0$$

۱۷ - گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

الف) درست زیرا:

$$\sin^r \theta - \cos^r \theta = \underbrace{(\sin^r \theta + \cos^r \theta)}_1 (\sin^r \theta - \cos^r \theta) = \sin^r \theta - \cos^r \theta$$

$$= \sin^r \theta - (1 - \sin^r \theta) = \sin^r \theta - 1 + \sin^r \theta = 2 \sin^r \theta - 1$$

ب) درست زیرا:

$$\tan^r \theta - \sin^r \theta = \frac{\sin^r \theta}{\cos^r \theta} - \sin^r \theta = \frac{\sin^r \theta - \sin^r \theta \cos^r \theta}{\cos^r \theta}$$

$$= \frac{\sin^r \theta (1 - \cos^r \theta)}{\cos^r \theta} = \frac{\sin^r \theta \times \sin^r \theta}{\cos^r \theta} = \sin^r \theta \tan^r \theta$$

پ) نادرست زیرا:

$$\cos^r \theta - \cot^r \theta = \cos^r \theta - \frac{\cos^r \theta}{\sin^r \theta} = \frac{\cos^r \theta \sin^r \theta - \cos^r \theta}{\sin^r \theta}$$

$$= \frac{\cos^r \theta (\sin^r \theta - 1)}{\sin^r \theta} = -\frac{\cos^r \theta \cos^r \theta}{\sin^r \theta} = -\cot^r \theta \cos^r \theta$$

۱۸ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

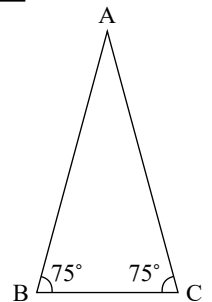
$$A = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^r - 3 \tan^r x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) = (1 + \tan^2 x)^r - 3 \tan^r x (1 + \tan^2 x)$$

$$A = 1 + 3 \tan^2 x + 3 \tan^4 x + \tan^6 x - 3 \tan^r x - 3 \tan^r x - 3 \tan^r x = 1 + \tan^6 x$$

۱۹ - گزینه ۴ می‌دانیم: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$

$$\begin{cases} 25 = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} \\ \hat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ \end{cases} \xrightarrow{AB=AC} 25 = \frac{1}{2} (AB)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 100 \Rightarrow AB = 10$$



۲۰ - گزینه ۴

$$\tan \theta + \cot \theta < 0 \rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 0 \rightarrow \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} < 0 \rightarrow \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} < 0$$

$$\rightarrow \sin \theta \cos \theta < 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \rightarrow \text{ربع دوم} \\ \sin \theta < 0, \cos \theta > 0 \rightarrow \text{ربع چهارم} \end{cases}$$



۲۱ - گزینه ۲

می‌دانیم: فرمول مساحت مثلث برابر است با: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \hat{A}$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EFG}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} EF \cdot EG \cdot \sin \hat{E}} \stackrel{\hat{A}=\hat{E}, AB=\frac{1}{2}EF}{AC=2EG} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} EF \cdot 2EG \cdot \sin \hat{E}}{\frac{1}{2} \cdot EF \cdot EG \cdot \sin \hat{E}} = \frac{3}{2}$$

۲۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه θ سازد برابر است با: $\tan \theta$

$$3x - 4y = 12 \rightarrow 4y = 3x - 12 \rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

۲۳ - گزینه ۳

می‌دانیم: $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \cos \alpha - \sin^2 \alpha = |\cos \alpha| \cos \alpha - \sin^2 \alpha$$

$180^\circ < \alpha < 270^\circ$

$$-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = -1$$

۲۴ - گزینه ۲

$$A = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

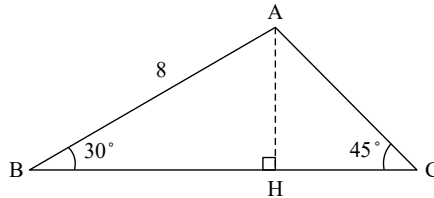
$$= \frac{1 - \sin^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

۲۵ - گزینه ۱

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = 4 \\ \tan 45^\circ = \frac{AH}{CH} \Rightarrow 1 = \frac{AH}{CH} \Rightarrow AH = CH \\ \tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{BH} \Rightarrow BH = 4\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow CH = 4$$

$$\Rightarrow BC = CH + BH = 4 + 4\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{4 \times (4 + 4\sqrt{3})}{2} = \frac{4 \times 4(1 + \sqrt{3})}{2} = 8(1 + \sqrt{3})$$

۲۶ - گزینه ۴

۱) $\tan \theta < 0 \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < 0 \Rightarrow \sin \theta$ و $\cos \theta$ غیر هم علامتند

۲) $\cos \theta \times \cot \theta < 0 \Rightarrow \cos \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} < 0 \Rightarrow \sin \theta$ منفی است.

\Rightarrow از بین ربع‌های دوم و چهارم، ربع چهارم را می‌پذیریم.

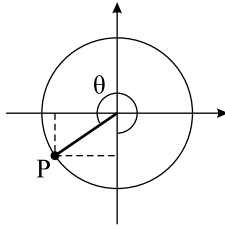


۲۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha (\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha) - \cot^2 \alpha - 1 = 0$$

۲۸ - گزینه ۱

شکل مقابل را برای مسئله رسم می‌کنیم:



نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی با مختصات به فرم $\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)$ است.

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \Rightarrow \sin \theta = 2 \cos \theta \quad (*) \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{از طرفی} \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{(*)} \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow P \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right) \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه‌ها} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$$

۲۹ - گزینه ۴ می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه α بسازد برابر است با: $\tan \alpha$

$$L: 3x + ay = 4 \Rightarrow ay = -3x + 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{a}x + \frac{4}{a}$$

$$\frac{-3}{a} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{-9}{\sqrt{3}} = -\frac{9\sqrt{3}}{3} = -3\sqrt{3}$$

۳۰ - گزینه ۱

می‌دانیم: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow[\sin x > 0]{\text{ربع اول } x} \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$2 \tan x - 5 \cot x = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} - 5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۴	۱۶ - ۴	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۲	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۲	۱۸ - ۴	۲۳ - ۳	۲۸ - ۱
۴ - ۳	۹ - ۲	۱۴ - ۲	۱۹ - ۴	۲۴ - ۲	۲۹ - ۴
۵ - ۴	۱۰ - ۴	۱۵ - ۳	۲۰ - ۴	۲۵ - ۱	۳۰ - ۱