نام آزمون: مجموعه الگو دنباله

سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی هاشمی

۱ - جمله‌ی دهم دنباله‌ی هندسی $۱, ۲, ۴, ۸, \cdots$ کدام است؟

① ۵۱۲

② ۲۵۶

③ ۱۲۸

④ ۲۲۸

۲ - اگر $A = [-۳, ۱]$ ، $B = (-۲, ۲]$ و $C = [۰, ۳)$ باشند، مجموعه‌ی $A - (B \cap C)$ کدام است؟

① $[-۳, ۰)$

② $[۰, ۲]$

③ $[۰, ۱]$

④ $[-۳, ۰]$

۳ - اگر $A = [-۲, ۲)$ ، $B = [۰, +\infty)$ و $C = (-۳, ۱]$ باشند و مجموعه‌ی $(A - C) \cap B$ را به صورت بازه‌ی (a, b) نمایش دهیم، مقدار $b - a$ کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۴ - از میان ۲۰ دانش‌آموز یک کلاس، ۷ نفر فقط فوتبال و ۴ نفر فقط والیبال بازی می‌کنند، اگر ۳ دانش‌آموز در هیچ کدام از دو رشته بازی نکنند، چند دانش‌آموز فوتبال بازی می‌کنند؟

① ۱۳

② ۷

③ ۱۰

④ ۱۶

۵- اگر $n(A)=۱۰$، $n(B)=۱۵$، $n(A\cup B)=۱۸$ و $n(U)=۳۳$ باشند، حاصل $n(A'\cup B')$ چند است؟ (U مجموعه‌ی مرجع است.)

۱) ۲۶
۲) ۷
۳) ۱۵
۴) ۱۹

۶- اگر $A=(۱,۲]$، $B=[-۱,۱]$ و $C=(۱,۳)$ باشند، آنگاه چند عدد طبیعی در بازه‌ی $I=(A'\cap B)\cup C$ فاصله قرار می‌گیرد؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۷- چه تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی می‌باشند؟

الف) مجموعهٔ اعداد گویای بین دو عدد صفر و $\frac{۱}{۲}$

ب) مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{W}\,|\,x\in(-\infty,۱۰)\cap[۱,+\infty)\}$

ج) مجموعهٔ $B=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,۲^{x}\geq ۸\}$

د) مجموعهٔ تمام دایره‌هایی که مرکز آنها $(-۱,۲)$ باشد.

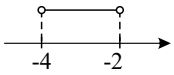
ه) مجموعهٔ $C=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,\frac{۱۰}{x}\in\mathbb{N}\right\}$

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۸- مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مرجع ۱۵ عضوی U هستند و $n(A')=۲n(A)$. اگر $A\cap B=\varnothing$ باشد، مجموعهٔ B حداکثر چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۹- اگر بازه‌های $A=[-۲,۵)$ ، $B=(-\infty,۱)$ و $C=(a,۳]$ مفروض باشند؛ آنگاه نمایش هندسی بازه‌ی $(B-A)\cap(A\cup C)$ به صورت



خواهد بود، در این صورت a کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۴

(۴) -۵

۱۰- اگر $۰<a<۱$ باشد، مجموعه‌ی $(-\frac{۱}{a},\frac{۱}{a})\cap(-\frac{۱}{a^۲},\frac{۱}{a^۲})$ کدام است؟

(۱) $(-\frac{۱}{a},\frac{۱}{a})$

(۲) $(-\frac{۱}{a^۲},\frac{۱}{a^۲})$

(۳) $(-۲,۲)$

(۴) $(-\frac{۱}{a^۲},\frac{۱}{a})$

۱۱- در مجموعه‌ی مرجع R، اگر مجموعه‌ی A متناهی و مجموعه‌ی B نامتناهی باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر حتماً متناهی است؟

(۱) B'

(۲) $(A-B)\cup(B-A)$

(۳) $A'-B$

(۴) $A\cap B$

۱۲- اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه ناتهی و $A\cap B=\varnothing$ باشد، متمم مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ همواره کدام است؟

(۱) $B-A$

(۲) $A\cup B$

(۳) $A-B$

(۴) $B'-A$

۱۳- $۳n(A) = ۲n(B) = ۵n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A) - n(A \cap B)}{n(A \cup B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۱۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۴- اگر $A = (۲, +\infty)$ ، $B = [-۵, ۵)$ و $C = (-\infty, ۶]$ باشند، آنگاه حاصل $C - (B \cap A)$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $(-\infty, ۲)$

۲) $(-\infty, ۲] \cup (۵, ۶]$

۳) $(-\infty, ۲]$

۴) $(-\infty, ۲] \cup [۵, ۶]$

۱۵- در یک کلاس ۴۵ نفری، تعداد ۲۲ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۵ نفر عضو تیم بسکتبال هستند و ۱۲ نفر هم عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند. چند نفر از اعضای این کلاس فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

۱) ۲۲

۲) ۱۸

۳) ۱۱

۴) ۲۹

۱۶- اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح مجموعه‌ی مرجع باشد و $A = \{x \,|\, x < -۲ \text{ یا } x > ۲\}$ و $B = \{x \,|\, x > ۳\}$ باشند، آنگاه کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $A - B$

۲) $A' \cap B'$

۳) $B - A'$

۴) $A' \cup B'$

مجموعه الگو دنباله

۱۷ - هرگاه $n(A \cup B) = ۱۷$ ، $n(A - B) = ۶$ و $n(B - A) = ۷$ باشد، حاصل $n(A)$ چقدر است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۱۰

(۴) ۱۴

۱۸ - اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند و داشته باشیم $A \subseteq B$ ، در این صورت حاصل کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

(۱) $(A - B')'$

(۲) $(A - (B' - A))'$

(۳) $B' \cup A'$

(۴) $A - (A' - B)$

۱۹ - متمم مجموعه‌ی $(A' \cup B') \cup [B - (B - A)]$ کدام است؟ (U مجموعه‌ی مرجع و A و B ناتهی است.)

(۱) $\varnothing$

(۲) U

(۳) $A \cup B$

(۴) $A \cap B$

۲۰ - هرگاه U مجموعه‌بی مرجع و $n(U) = ۵۰$ و A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشد و داشته باشیم $n(A') + n(B') = ۷۰$ ، آنگاه حاصل $n(A \cup B)$ چقدر است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۳۰

(۳) ۴۰

(۴) ۱۰

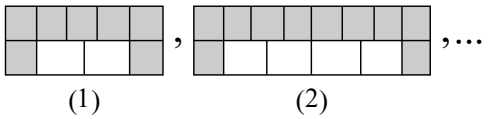
۲۱ - در یک انجمن تعداد افرادی که مهارت A را دارند، دو برابر افرادی است که مهارت B را دارند. اگر $\frac{۱}{۵}$ افراد این انجمن هر دو مهارت را داشته باشند و $\frac{۳}{۲۰}$ آن‌ها هیچ کدام از مهارت‌ها را نداشته باشند؛ چند درصد افراد مهارت A را ندارند؟

۱) ۳۵
۲) ۷۰
۳) ۳۰
۴) ۶۵

۲۲ - از بین ۵۲ دانش‌آموز، ۳۵ نفر در کلاس طراحی و ۳۱ نفر در کلاس ورزشی شرکت کرده‌اند. اگر ۴۳ نفر حداقل در یکی از دو کلاس شرکت کرده باشند، چند نفر فقط در کلاس ورزشی شرکت کرده‌اند؟

۱) ۱۳
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۰

۲۳ - با توجه به الگوی زیر، برای داشتن ۵۲ کاشی سفید چند کاشی تیره لازم است؟



۱) ۱۶۰
۲) ۷۸
۳) ۸۲
۴) ۱۸۲

۲۴ - در دنباله‌ای که از یک الگوی خطی پیروی می‌کند، اگر جمله‌ی چهارم برابر ۹ و جمله‌ی هشتم برابر ۳ باشد، چند جمله‌ی این دنباله مثبت است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۲۵- اگر $A_n = [\frac{(-1)^n}{n}, \frac{n+1}{n})$ باشد، آن‌گاه $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ کدام است؟

① $\left[\frac{1}{4}, \frac{6}{5}\right)$

② $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

③ $\left[\frac{1}{2}, \frac{6}{5}\right)$

④ $\left[-1, \frac{6}{5}\right)$

۲۶- مجموع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر ۳ می‌باشد. جملهٔ دوم این دنباله کدام است؟

① ۱

② $\frac{3}{2}$

③ ۲

④ ۳

۲۷- اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۱۶ عضو است. اگر به مجموعهٔ A، ۶ عضو جدید اضافه کنیم؛ به اشتراک دو مجموعه، ۴ عضو اضافه می‌شود. اجتماع مجموعهٔ جدید A و مجموعهٔ B چند عضو دارد؟

① ۱۶

② ۱۸

③ ۲۰

④ ۲۲

۲۸- اگر A و B دو مجموعه باشند که $A \subseteq B$، آن‌گاه متمم مجموعهٔ $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ همواره کدام است؟ ($U, A, B \subseteq U$ مجموعه مرجع است.)

① $A \cup B'$

② $B' \cap A$

③ $A' - B'$

④ $A' \cup B$

۲۹- اگر جملات دنبالهٔ حسابی، $\cdots, ۲x, ۱+x, ۲-x, -۱$ را در عدد حقیقی m ضرب کنیم، قدر نسبت دنبالهٔ جدید ۴۸ می‌شود. مقدار m چند است؟

(۱) -۱۴

(۲) -۱۲

(۳) -۱۸

(۴) -۱۶

۳۰- جملهٔ بیستم یک دنبالهٔ حسابی ۵۲ و مجموع سه جملهٔ ابتدایی دنباله برابر -۶ است. جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟

(۱) ۱۹

(۲) ۲۰

(۳) ۲۴

(۴) ۲۲

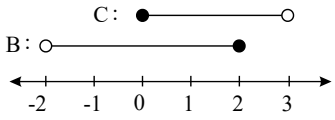
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و نسبت مشترک r، جمله‌ی nام از رابطه‌ی $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_1 = 1, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 r^9 = 1 \times 2^9 = 512$$

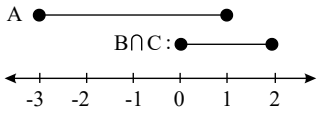
۲ - گزینه ۱

بازه‌های B و C را روی محور نمایش می‌دهیم :



و داریم: $B \cap C = [0, 2]$

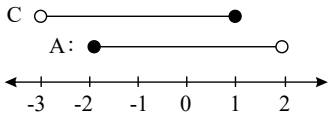
از تفاضل A و این بازه روی محور داریم:



$$A - (B \cap C) = [-3, 0)$$

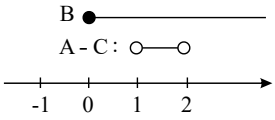
۳ - گزینه ۱

ابتدا به کمک محور حاصل $A - C$ را بدست می‌آوریم:



$$A - C = (1, 2)$$

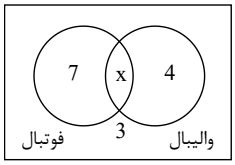
حال دوباره با استفاده از محور، اشتراک B با بازه‌ی فوق را بدست می‌آوریم:



$$(A - C) \cap B = (1, 2) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

۴ - گزینه ۱

اطلاعات مسئله را روی شکل روبرو نشان می‌دهیم:



تعداد دانش‌آموزان کلاس $= 20 = 7 + 4 + 3 + x \Rightarrow x = 6$

تعداد دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند $= 7 + 6 = 13$

۵ - گزینه ۱

نکته: $\boxed{n(A') = n(U) - n(A)}$

نکته: $\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

نکته: $\boxed{(A \cap B)' = A' \cup B'}$

$$n(A' \cup B') = n\left((A \cap B)'\right) = n(U) - n(A \cap B) *$$

از طرفی:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 18 = 10 + 15 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 25 - 18 = 7$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه } *} n(A' \cup B') = 33 - 7 = 26$$

۶ - گزینه ۴

نکته: $\boxed{A \cap B = B \cap A}$

نکته: $\boxed{A \cap B' = A - B}$

$A' \cap B = B \cap A' = B - A = [-۱, ۱] - (۱, ۲] = [-۱, ۱]$

$I = (A' \cap B) \cup C = [-۱, ۱] \cup (۱, ۳) = [-۱, ۳)$

این بازه شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ نیست.

۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: مجموعهٔ متناهی مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی باشد.

مجموعه‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) بین دو عدد صفر و $\frac{۱}{۲}$ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. پس این مجموعه نامتناهی است.

ب) مجموعهٔ A، مجموعه‌ای از اعداد حسابی است که در بازهٔ $(۱, ۱۰]$ قرار می‌گیرند. یعنی:

$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$

و این یک مجموعهٔ متناهی است.

ج) $۸ = ۲^۳$ و به ازای توان‌های گویای بیش از ۳، عدد ۲^x از ۸ بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین:

$B = \{x \in Q \,|\, x \geq ۳\}$

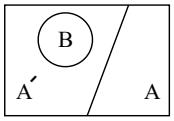
که مجموعه‌ای نامتناهی است.

د) با مرکز دلخواه می‌توان بی‌شمار دایره رسم کرد. پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

ه) کسر $\frac{۱۰}{x}$ فقط به ازای xهای طبیعی ۱ و ۲ و ۵ و ۱۰ مقداری طبیعی دارد، پس این مجموعه متناهی است.

۸ - گزینه ۲ **می‌دانیم:** $n(U) = n(A) + n(A')$

از آنجا که $A \cap B = \varnothing$ ، B باید تماماً درون A' قرار گرفته باشد. پس به شکل زیر می‌رسیم:



و داریم:

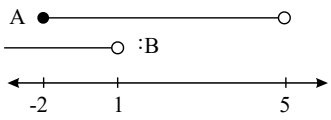
$n(U) = n(A) + n(A')$

$\Rightarrow ۵ = n(A) + ۲n(A) = ۳n(A)$

$\Rightarrow n(A) = ۵ \Rightarrow n(A') = ۱۰$

چون B زیرمجموعهٔ A' است، تعداد اعضای آن حداکثر می‌تواند با تعداد اعضای A' برابر باشد. یعنی ۱۰ عضو.

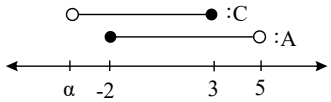
۹ - گزینه ۳ با استفاده از نمایش محوری، $B - A$ را بدست می‌آوریم:



$B - A = (-\infty, -۲)$

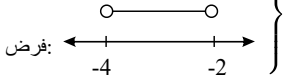
حال برحسب آن‌که مقدار a بیشتر یا کمتر از -۲ باشد به دو حالت زیر می‌رسیم:

الف) $a < -۲ \Rightarrow$

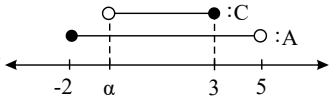


$\Rightarrow A \cup C = (a, ۵)$

$\Rightarrow (B - A) \cap (A \cup C) = (a, -۲) \Rightarrow a = -۴$



ب) $a \geq -۲ \Rightarrow$



$\Rightarrow A \cup C = [-۲, ۵)$

$\Rightarrow (B - A) \cap (A \cup C) = \varnothing \Rightarrow$ **باتوجه به فرض، غیر قابل قبول است.**

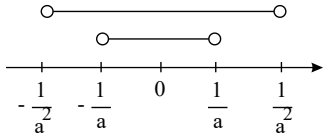
۱۰ - گزینه ۱

می‌دانیم: اگر طرفین یک نامساوی هم‌علامت باشند، با معکوس کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود.

می‌دانیم: اعداد بازه‌ی $(0,1)$ هرچه به توان بیشتری می‌رسند، کوچکتر می‌شوند.

$$0<a<1 \Rightarrow a^2<a \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{a^2}>\frac{1}{a} \xrightarrow{\times(-1)} -\frac{1}{a^2}<-\frac{1}{a}$$

حال هر دو بازه‌ی $(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$ و $(-\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^2})$ را روی محور نمایش می‌دهیم:



پس اشتراک این دو بازه برابر است با: $(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$

۱۱ - گزینه ۴

می‌دانیم:

متمم یک مجموعه‌ی متناهی حتماً نامتناهی است
متمم هر مجموعه‌ی نامتناهی می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد
تفاضل یک مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی حتماً نامتناهی است
اجتماع یک مجموعه‌ی نامتناهی با هر مجموعه‌ای، نامتناهی است
تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد
اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای حتماً متناهی است

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) B **متناهی یا نامتناهی:** $\Rightarrow B'$ **نامتناهی**

۲) $(A-B)\cup\underbrace{(B-A)}_{\text{نامتناهی}}$: نامتناهی

۳) A : متناهی $\Rightarrow A'$: نامتناهی $\Rightarrow A'-B$: متناهی یا نامتناهی

۴) $\underbrace{A}_{\text{متناهی}}\cap B$: متناهی

۱۲ - گزینه ۴

می‌دانیم:

۱- اگر A و B دومجموعه جدا از هم باشند داریم : $A-B=A\ ,\ B-A=B$
۲- $(A\cup B)'=A'\cap B'$
۳- $A-B=A\cap B'$

$A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ **A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند**

$$\left(\underbrace{(A-B)}_{A}\cup\underbrace{(B-A)}_{B}\right)'=(A\cup B)'=A'\cap B'=B'\cap A'=B'-A$$

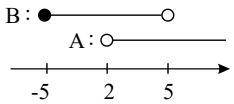
۱۳ - گزینه ۲ می‌دانیم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$3n(A)=2n(B)=5n(A\cap B)\Rightarrow\begin{cases}n(A)=\frac{5}{3}n(A\cap B)\\ n(B)=\frac{5}{2}n(A\cap B)\end{cases}$$

$$\frac{n(A)-n(A\cap B)}{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}=\frac{\frac{5}{3}n(A\cap B)-n(A\cap B)}{\frac{5}{3}n(A\cap B)+\frac{5}{2}n(A\cap B)-n(A\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}n(A\cap B)}{\frac{19}{6}n(A\cap B)}=\frac{4}{19}$$

۱۴ - گزینه ۴ با استفاده از محور داریم:



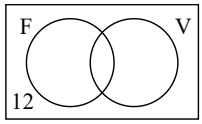
$\Rightarrow B\cap A=(2,5)$

یعنی:

$$C-(B\cap A)=(-\infty,6]-(2,5)=(-\infty,2]\cup[5,6]$$

۱۵ - گزینه ۲ می‌دانیم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

مجموعه اعضای تیم فوتبال را با F و مجموعه والیبالی‌ها را با V نمایش می‌دهیم و به شکل زیر می‌رسیم



باتوجه به شکل، تعداد اعضای $F \cup V$ برابر

است با: $۴۵ - ۱۲ = ۳۳$

و داریم:

$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V) \Rightarrow ۳۳ = ۲۲ + ۱۵ - n(F \cap V)$$
$$\Rightarrow n(F \cap V) = ۴$$
$$n(\text{فقط فوتبال}) = n(F) - n(F \cap V) = ۲۲ - ۴ = ۱۸$$

۱۶ - گزینه ۲

می‌دانیم: مجموعه‌ی متناهی مجموعه‌ای است که تعداد اعضای یک عدد حسابی باشد.

$$A = \{\pm ۳, \pm ۴, \pm ۵, \cdots\} \Rightarrow A' = \{۰, \pm ۱ \pm ۲\}$$
$$B = \{۴, ۵, ۶, ۷, \cdots\} \Rightarrow B' = \{\pm ۳, \pm ۲, \pm ۱, ۰, -۴, -۵, \cdots\}$$

(۱) گزینه : $A - B = \{\pm ۳, -۴, -۵, \cdots\}$ نامتناهی

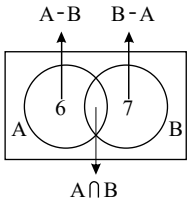
(۲) گزینه : $A' \cap B' = \{۴, ۵, ۶, ۷, \cdots\}$ متناهی

(۳) گزینه : $B - A' = \{۴, ۵, ۶, ۷, \cdots\}$ نامتناهی

(۴) گزینه : $A' \cup B' = \{\pm ۳, \pm ۲, \pm ۱, ۰, -۴, -۵, \cdots\}$ نامتناهی

۱۷ - گزینه ۳ می‌دانیم: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

به شکل زیر توجه کنید:



می‌توان تعداد اعضای مجموعه‌ی $A \cup B$ را به کمک شکل به صورت زیر نوشت:

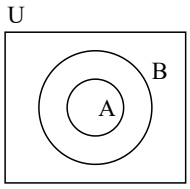
$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$
$$\Rightarrow ۱۷ = ۶ + n(A \cap B) + ۷ \Rightarrow n(A \cap B) = ۴$$
$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow ۶ = n(A) - ۴ \Rightarrow n(A) = ۱۰$$

۱۸ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subset A'$$
$$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$$

اگر $A \subseteq B$ باشد با توجه به شکل زیر $B' \subseteq A'$ خواهد بود و در نتیجه با توجه به شکل زیر داریم:

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \Rightarrow \begin{cases} B' \cup A' = A' \\ B' \cap A' = B' \end{cases}$$



حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) گزینه : $(A - B')' = (A \cap B)' = A'$

(۲) گزینه : $(A - \underbrace{(B' - A)}_{B'})' = (A - B')' = (\underbrace{A \cap B}_{A})' = A'$

(۳) گزینه : $B' \cup A' = A'$

(۴) گزینه : $A - \underbrace{(A' - B)}_{B'} = A - B' = A$

پس حاصل گزینهٔ (۴) با بقیه متفاوت است.

۱۹ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$A-B=A\cap B'$$
$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$
$$(A')'=A$$
$$A\cap A'=\varnothing$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$\big((A'\cup B')\cup[B-(B-A)]\big)'=\big((A'\cup B')\cup[B-(B\cap A')]\big)'$$
$$=\big((A'\cup B')\cup[B\cap(B\cap A')']\big)'$$
$$=\big((A'\cup B')\cup[B\cap(B'\cup A)]\big)'=\Big((A'\cup B')\cup\overbrace{(B\cap B')}^{\varnothing}\cup(B\cap A)\Big)'$$
$$=\big((A'\cup B')\cup(B\cap A)\big)'$$
$$=(A'\cup B')'\cap(B\cap A)'$$
$$=(A\cap B)\cap(B'\cup A')=(A\cap\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})\cup\overbrace{(A\cap B\cap A')}^{\varnothing}$$
$$=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

۲۰ - گزینه ۲ می‌دانیم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$n(A')=n(u)-n(A)$$

$$n(A')+n(B')=۷۰\Rightarrow(n(u)-n(A))+(n(u)-n(B))=۷۰$$
$$\Rightarrow ۵۰-n(A)+۵۰-n(B)=۷۰\Rightarrow n(A)+n(B)=۳۰$$

از طرفی چون دو مجموعه‌ی A و B جدا از هم هستند داریم: $A\cap B=\varnothing$ و در نتیجه:

$$n(A\cap B)=۰$$

پس:

$$n(A\cup B)=\underbrace{n(A)+n(B)}_{۳۰}-\underbrace{n(A\cap B)}_{۰}=۳۰$$

۲۱ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A')=n(u)-n(A)$$

با استفاده از اطلاعات مسئله داریم:

$$n(A)=۲n(B)$$
$$n(A\cap B)=\frac{۱}{۵}n(u)$$
$$n(\text{هیچ کدام از دو حالت})=n(A'\cap B')=\frac{۳}{۲۰}n(u)\Rightarrow n(u)-n(A\cup B)=\frac{۳}{۲۰}n(u)\Rightarrow n(A\cup B)=\frac{۱۷}{۲۰}n(u)$$

از طرفی: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۲n(B)+n(B)-\frac{۱}{۵}n(u)$

$$\Rightarrow\frac{۱۷}{۲۰}n(u)=۳n(B)-\frac{۱}{۵}n(u)\Rightarrow ۳n(B)=\frac{۲۱}{۲۰}n(u)$$
$$\Rightarrow n(B)=\frac{۷}{۲۰}n(u)\xrightarrow{n(A)=۲n(B)}n(A)=\frac{۷}{۱۰}n(u)$$
$$n(A')=n(u)-n(A)=n(u)-\frac{۷}{۱۰}n(u)=\frac{۳}{۱۰}n(u)$$

و این یعنی ۳۰٪ از افراد، مهارت A را ندارند.

۲۲ - گزینه ۲ می دانیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

اگر مجموعهٔ شرکت‌کنندگان در کلاس طراحی را T و مجموعهٔ شرکت‌کنندگان در کلاس ورزشی را V بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$n(T)=۳۵\ ,\ n(V)=۳۱\ ,\ n(T\cup V)=۴۳$$

از طرفی:

$$n(T\cup V)=n(T)+n(V)-n(T\cap V)\Rightarrow ۴۳=۳۵+۳۱-n(T\cap V)\Rightarrow n(T\cap V)=۲۳$$

تعداد کسانی که فقط در کلاس ورزشی شرکت کرده‌اند، برابراست با همهٔ اعضای کلاس ورزشی به جز کسانی که در هر دو کلاس شرکت می کنند. یعنی :

$$n(V-T)=n(V)-n(V\cap T)=۳۱-۲۳=۸$$

۲۳ - گزینه ۳ تعداد کاشی‌های سیاه و سفید در الگوی فوق به صورت زیر است:

۴ سفید ۱۰ سیاه	,	۲ سفید ۷ سیاه	, ...

بنابراین:

$$\begin{cases} \text{جمله‌ی عمومی سفیدها} = ۲n \\ \text{جمله‌ی عمومی سیاه‌ها} = ۳n+۴ \end{cases}$$

با معلوم بودن تعداد کاشی های سفید داریم :

$$۲n = ۵۲ \Rightarrow n = ۲۶$$

و در مرحلهٔ ۲۶ام، تعداد کاشی‌های سیاه برابر است با:

$$۳n+۴ = (۳\times ۲۶)+۴ = ۸۲$$

۲۴ - گزینه ۳

می‌دانیم: جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی عبارت است از $t_n = an+b$

$$\begin{matrix} t_۴ = ۹ \Rightarrow ۴a+b = ۹ \\ t_۸ = ۳ \Rightarrow ۸a+b = ۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -۸a-۲b = -۱۸ \\ ۸a+b = ۳ \end{cases}$$

$$-b=-۱۵ \Rightarrow b=۱۵ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow t_n = -\frac{۳}{۲}n+۱۵$$

با حل نامعادله‌ی $t(n) > ۰$ تعداد جملات مثبت این الگو بدست می‌آید:

$$-\frac{۲}{۳}n+۱۵ > ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}n < ۱۵ \xrightarrow{\times ۲} ۳n < ۳۰ \xrightarrow{\div ۳} n < ۱۰$$

پس ۹ جمله‌ی اول دنباله، مثبت هستند.

۲۵ - گزینه ۳ با استفاده از رابطهٔ داده شده برای A_n، بازه‌های $A_۱$ تا $A_۵$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A_۱ = [-۱,۲)\ ,\ A_۲ = [\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})\ ,\ A_۳ = [-\frac{۱}{۳},\frac{۴}{۳})\ ,\ A_۴ = [\frac{۱}{۴},\frac{۵}{۴})\ ,\ A_۵ = [-\frac{۱}{۵},\frac{۶}{۵})$$

در نتیجه:

$$\text{اشتراک این ۵ بازه} = [\frac{۱}{۲},\frac{۶}{۵})$$

۲۶ - گزینه ۱ می‌دانیم: جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی که جملهٔ اول آن $a_۱$ و قدرنسبت آن d باشد عبارتست از: $t_n = t_۱+(n-۱)\times d$

$$t_۱+t_۲+t_۳ = ۳ \Rightarrow t_۱+(t_۱+d)+(t_۱+۲d) = ۳ \Rightarrow ۳t_۱+۳d = ۳ \xrightarrow{\div ۳} t_۱+d = ۱ \Rightarrow t_۲ = ۱$$

راه دوم: در جملات متوالی دنباله‌های حسابی با تعداد فرد، می‌توانیم جملات را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$x-d\ ,\ x\ ,\ x+d \quad \Rightarrow (x-d)+x+(x+d) = ۳ \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱ = \text{جملهٔ دوم}$$

۲۷ - گزینه ۲ می‌دانیم: $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

مجموعه‌ای که از اضافه شدن ۶ عضو جدید به A حاصل می‌شود را $\bar{A}$ می‌نماییم و داریم:

$$n(\bar{A}\cup B) = n(\bar{A})+n(B)-n(\bar{A}\cap B) = (n(A)+۶)+n(B)-(n(A\cap B)+۴)$$
$$= \underbrace{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}_{۱۶}+۶-۴ = ۱۶+۶-۴ = ۱۸$$

۲۸ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\begin{matrix} A\cap B' = A-B \\ A\subseteq B \Rightarrow A-B = \varnothing \\ (A\cap B)' = A'\cup B' \end{matrix}$$

$$(A-B)\cup(B-A) = \varnothing\cup(B-A) = B-A = B\cap A'$$

حکم مسأله : $(B\cap A')' = B'\cup A$

۲۹ - گزینه ۴ می‌دانیم: اگر a,b,c جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند داریم: $b = \frac{a+c}{۲}$

رابطهٔ فوق را برای سه جملهٔ داده شده می‌نویسیم:

$$۲+x = \frac{۱-x+۱+۲x}{۲} \Rightarrow ۲+x = \frac{۲+x}{۲} \Rightarrow ۴+۲x = ۲+x \Rightarrow x = -۲$$

و جملات دنباله عبارتند از:

$$\xrightarrow{x=-۲} ۳,۰,-۳,\cdots \xrightarrow{\times m} ۳m,۰,-۳m,\cdots$$

قدرنسبت این دنباله برابر است با $-۳m$ و از آنجا که طبق فرض این مقدار ۴۸ است داریم:

$-۳m = ۴۸ \Rightarrow m = -۱۶$

۳۰ - گزینه ۴ می‌دانیم: جملهٔ عمومی هر دنبالهٔ حسابی عبارتست از: $t_n = t_۱ + (n - ۱) \times d$

$$\begin{cases} t_{۲۰} = ۵۲ \Rightarrow t_۱ + ۱۹d = ۵۲ \\ t_۱ + t_۲ + t_۳ = -۶ \Rightarrow t_۱ + (t_۱ + d) + (t_۱ + ۲d) = -۶ \Rightarrow ۳t_۱ + ۳d = -۶ \xrightarrow{\div ۳} t_۱ + d = -۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ + ۱۹d = ۵۲ \\ -t_۱ - d = ۲ \end{cases}$$

$$۱۸d = ۵۴ \Rightarrow d = ۳ \Rightarrow t_۱ = -۵ \Rightarrow t_{۱۰} = t_۱ + ۹d = -۵ + ۹ \times ۳ = ۲۲$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - (۱)	۴ - (۶)	۴ - (۱۱)	۲ - (۱۶)	۳ - (۲۱)	۱ - (۲۶)
۱ - (۲)	۳ - (۷)	۴ - (۱۲)	۳ - (۱۷)	۲ - (۲۲)	۲ - (۲۷)
۱ - (۳)	۲ - (۸)	۲ - (۱۳)	۴ - (۱۸)	۳ - (۲۳)	۱ - (۲۸)
۱ - (۴)	۳ - (۹)	۴ - (۱۴)	۱ - (۱۹)	۳ - (۲۴)	۴ - (۲۹)
۱ - (۵)	۱ - (۱۰)	۲ - (۱۵)	۲ - (۲۰)	۳ - (۲۵)	۴ - (۳۰)