



علی هاشمی

نام آزمون: مجموعه الگو دنباله

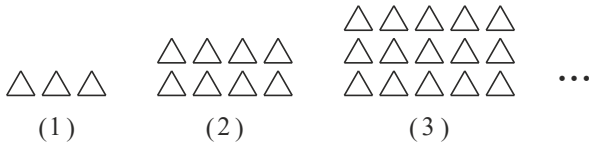
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- جملات دوم، چهارم و هشتم یک دنباله حسابی با قدرنسبت غیرصفر، به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی هستند. قدرنسبت دنباله هندسی چقدر است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۴
- ۳)  $\frac{1}{2}$
- ۴)  $\sqrt{2}$

۲- در الگوی مقابل، شکل دهم از چند مثلث تشکیل شده است؟



- ۱) ۸۶
- ۲) ۹۸
- ۳) ۱۱۲
- ۴) ۱۲۰

۳- در کلاسی که ۲۸ نفر دانش‌آموز دارد، ۲۱ نفر حداقل به یکی از رشته‌های فوتبال یا والیبال علاقه دارند، اگر ۱۷ نفر به فوتبال و ۹ نفر به والیبال علاقه داشته باشند، چند نفر فقط به یکی از این دو رشته علاقه دارند؟

- ۱) ۱۳
- ۲) ۱۴
- ۳) ۱۶
- ۴) ۱۷

۴- میانگین بین جمله‌ی دهم و جمله‌ی بیستم دنباله‌ی حسابی  $\dots, -6, -8$  کدام است؟

- ۱) ۲۰
- ۲) ۲۵
- ۳) ۳۰
- ۴) ۳۵



۵- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، نسبت جمله هفتم به جمله پنجم برابر ۲۷ است. اگر حاصل ضرب جمله‌های اول و دوم ۱۲ باشد، جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- ۱) ۵۴
- ۲) ۲۷
- ۳) ۱۶۲
- ۴) ۸۱

۶- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات چهارم و پنجم برابر ۷- و مجموع جملات هفتم و هشتم برابر ۵۶ است. مجموع جملات اول و سوم کدام است؟

- ۱) -۴
- ۲)  $\frac{۳۳}{۸}$
- ۳)  $\frac{۱۷}{۴}$
- ۴)  $-\frac{۳۵}{۸}$

۷- در دنباله حسابی  $\dots, \frac{۷}{۴}, ۲$ ، اگر به جملات چهارم، هشتم و سیزدهم مقداری ثابت اضافه کنیم، به ترتیب از راست به چپ، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی حاصل می‌شود، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۲
- ۳)  $\frac{۴}{۳}$
- ۴)  $\frac{۵}{۴}$

۸- اگر  $U = [-۲, ۵]$  مجموعه مرجع و  $A = (-۱, ۲]$  و  $B = (۱, ۳]$  باشند، چند عدد صحیح از مجموعه مرجع، در مجموعه  $A \cup B'$  قرار نمی‌گیرد؟

- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۸



۹- چه تعداد از مجموعه‌های زیر متناهی هستند؟

$$A = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{R}, x < 3\}, B = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}, -x + 1 > 6\}$$

$$C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15\}, D = \left\{ \frac{x}{2} \mid x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 3 \right\}$$

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۱۰- در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات سوم و هفتم، هشت برابر جمله چهارم است. جمله ششم این دنباله کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۱۰ (۴)

۱۱- اگر  $U = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$  و  $A$  مجموعه‌ی اعداد بخش‌پذیر بر ۶ و  $B$  مجموعه‌ی اعداد مربع کامل باشد، آنگاه  $A - B'$  چند عضو دارد؟ ( $A, B \subseteq U$  مرجع است و  $U$  مجموعه‌ی مرجع است)

- ۱۲ (۱)
- ۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۱ (۴)

۱۲- اگر در یک الگوی خطی، جملات سوم و هشتم به ترتیب ۳۰ و ۱۵ باشد، جمله پانزدهم کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۶ (۲)
- ۳ (۳)
- ۱ (۴)



۱۳- اگر  $a, b, c$  به ترتیب جملات متوالی و متمایز از یک دنباله‌ی هندسی باشند. اعداد کدام گزینه با ترتیب ذکر شده تشکیل دنباله‌ی هندسی نمی‌دهند؟

①  $2c$  و  $2b$ ،  $2a$

②  $\frac{1}{c}$  و  $\frac{1}{b}$ ،  $\frac{1}{a}$

③  $c^2$  و  $b^2$ ،  $a^2$

④  $c+2$  و  $b+2$ ،  $a+2$

۱۴- کدام گزینه نادرست است؟

①  $(Z - N) \cup W = Z$

②  $(Z - N) \cap W = \emptyset$

③  $N \cap (Q' - R) = \emptyset$

④  $(Q' - N) \cup Q = R$

۱۵- مجموع جملات سیزدهم و ششم از یک الگوی خطی با مجموع جمله‌ی سوم و کدام جمله‌ی این الگو برابر است؟

① شانزدهم

② پانزدهم

③ چهاردهم

④ هفدهم

۱۶- حاصل ضرب پنج جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی  $3^{10} \times 32$  است. جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟

① ۳۶

② ۳۲

③ ۲۴

④ ۱۸

۱۷- چند جمله از دنباله‌ی حسابی  $89, a, 84, \dots$  مثبت است؟

① ۳۷

② ۳۶

③ ۳۵

④ ۳۸

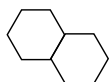


۱۸- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات دوم، هشتم و دهم از سه برابر جمله‌ی ششم ۱۰ واحد بیشتر است. تفاضل جملات نهم و چهارم، مربع کدام عدد است؟

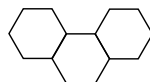
- ۱) ۸
- ۲) ۷
- ۳) ۶
- ۴) ۵



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

۱۹- باتوجه به الگوی زیر، در شکل چندم این الگو ۴۶ پاره‌خط وجود دارد؟

- ۱) ۸
- ۲) ۹
- ۳) ۷
- ۴) ۱۰

۲۰- برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  می‌دانیم  $n(A' \cap B) = ۳۰$  ،  $n(A' - B) = ۱۰$  و  $n(B) = ۶۵$  است. حاصل  $n(A - B')$  کدام است؟

$$(n(U) = ۱۰۰)$$

- ۱) ۲۵
- ۲) ۳۵
- ۳) ۱۰
- ۴) ۲۰

۲۱- در یک کلاس ۵۰ نفره، ۱۲ نفر به هیچ کدام از رشته‌های ورزشی تنیس و فوتبال علاقه‌ای ندارند. اگر ۱۷ نفر فقط به رشته‌ی فوتبال و ۱۴ نفر فقط به رشته‌ی تنیس علاقه داشته باشند، چند نفر به هر دو رشته‌ی ورزشی علاقه دارند؟

- ۱) ۶
- ۲) ۷
- ۳) ۸
- ۴) ۹



۲۲- بین اعداد ۵ و ۰٫۳۲ دو واسطه هندسی مثبت درج کرده‌ایم. قدر نسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟ (جملات دنباله را به صورت کاهشی در نظر بگیرید.)

- ① ۰٫۲
- ② ۰٫۱۶
- ③ ۰٫۸
- ④ ۰٫۴

۲۳- در یک دنباله هندسی تفاضل جمله سوم از پنجم برابر  $\frac{1}{32}$  است. اگر قدر نسبت برابر  $\frac{1}{2}$  باشد، جمله اول کدام است؟

- ①  $\frac{3}{2}$
- ②  $\frac{1}{8}$
- ③  $-\frac{2}{3}$
- ④  $-\frac{1}{6}$

۲۴- مجموع سه جمله اول یک دنباله هندسی با جملات غیر صفر،  $\frac{3}{2}$  برابر مجموع سه جمله دوم این دنباله است. قدر نسبت این دنباله چند است؟

- ①  $\sqrt{\frac{3}{2}}$
- ②  $\sqrt{\frac{2}{3}}$
- ③  $\sqrt{\frac{3}{2}}$
- ④  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

۲۵- در دنباله  $\dots, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, \dots$  چندمین جمله دنباله  $\frac{1}{128}$  است؟

- ① ۷
- ② ۸
- ③ ۹
- ④ ۱۰



۲۶- در یک دنباله هندسی جمله هفتم، ۲۷ برابر جمله چهارم می‌باشد، جمله دهم چند برابر جمله هشتم است؟

- ۱) ۶
- ۲) ۷
- ۳) ۸
- ۴) ۹

۲۷- در یک دنباله هندسی، جمله سوم برابر ۴ و جمله هشتم نصف جمله ششم است. جمله پانزدهم دنباله چقدر است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$
- ۲)  $\frac{1}{7}$
- ۳)  $\frac{1}{16}$
- ۴)  $\frac{1}{32}$

۲۸- اگر بین دو عدد ۷ و ۱۷۰۱، چهار واسطه هندسی درج کنیم، نسبت بزرگ‌ترین واسطه به کوچک‌ترین واسطه کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۹
- ۳) ۲۷
- ۴) ۸۱

۲۹- جملات دوم، چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی و متمایز از یک دنباله هندسی هستند. اگر جمله اول این دنباله هندسی  $\frac{1}{4}$

باشد، جمله دهم آن کدام است؟

- ۱) ۶۴
- ۲) ۹۶
- ۳) ۱۱۲
- ۴) ۱۲۸



۳- اگر  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{\sqrt{x+2}}{3}$  و ۲ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۶
- ۴) ۹





## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

می‌دانیم: 
$$\text{جمله عمومی} \begin{cases} \text{دنباله حسابی: } a_n = a_1 + (n-1)d \\ \text{دنباله هندسی: } a_n = a_1 q^{n-1} \end{cases}$$

اگر جملات دنباله حسابی را با  $a_n$  و جملات دنباله هندسی را با  $b_n$  نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = b_1 \\ a_1 + 2d = b_1 q \\ a_1 + 3d = b_1 q^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1 q^2}{b_1 q} = \frac{b_1 q}{b_1} = q$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + 3d}{a_1 + 2d} = \frac{a_1 + d}{a_1 + 2d} \Rightarrow (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 2d)$$

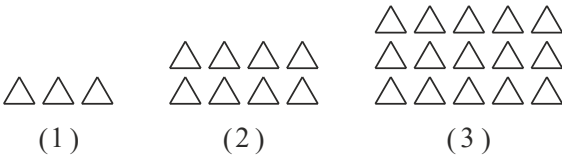
$$\Rightarrow a_1^2 + 6a_1 d + 9d^2 = a_1^2 + 2a_1 d + 2d^2 \Rightarrow 4d^2 - 4a_1 d = 0$$

$$\Rightarrow 4d(d - a_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ d - a_1 = 0 \Rightarrow d = a_1 \end{cases}$$

طبق فرض مسئله غ ق ق

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_1 + 2d}{a_1 + d} \stackrel{d=a_1}{=} \frac{d + 2d}{d + d} = \frac{3d}{2d} = \frac{3}{2}$$

۲ - گزینه ۴



راه اول: با کمی دقت در تعداد ستون‌ها و سطرها و شماره هر شکل داریم:

شماره شکل	۱	۲	۳...	$n$
سطر	۱	۲	۳...	$n$
ستون	۱ + ۲ + ۳ + ۴...			$n + ۲$
تعداد مثلثها	۱ × ۳ + ۲ × ۴ + ۳ × ۵...			$n(n + ۲)$

تعداد مثلث‌های شکل دهم  $n(n + ۲) \xrightarrow{n=10} 10(10 + ۲) = 10 \times ۱۲ = ۱۲۰$

راه حل دوم: باتوجه به شکل، تعداد مثلث‌های وسط، مربع شماره هر جمله و تعداد مثلث‌های کناری دو برابر شماره جمله است، بنابراین جمله عمومی دنباله برابر با  $t_n = n^2 + ۲n$  است. در شکل دهم خواهیم داشت:

تعداد مثلث‌های شکل دهم  $= 10^2 + ۲(10) = 100 + ۲0 = ۱۲۰$

۳ - گزینه ۳

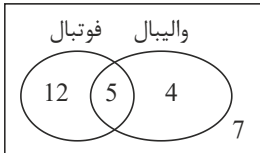
می‌دانیم: 
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$n(F) = ۱۷$

$n(V) = ۹$

$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V) \Rightarrow ۲۱ = ۱۷ + ۹ - n(F \cap V) \Rightarrow n(F \cap V) = ۵$$

تعداد کسانی که به حداقل یکی از دو ورزش علاقه‌مند هستند



با توجه به نمودار افرادی که فقط به یکی از دو رشته علاقه دارند برابر است با  $12 + 4 = 16$

۴ - گزینه ۱ در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $a_1$  و اختلاف مشترک  $d$ ، جمله‌ی  $n$ ام از رابطه‌ی  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  بدست می‌آید.

$$-8, -6, \dots \Rightarrow d = (-6) - (-8) = 2$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -8 + 9 \times (2) = 10$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = -8 + 19 \times (2) = 30$$

$$\text{میانگین جمله‌های دهم و بیستم} = \frac{10 + 30}{2} = 20$$

۵ - گزینه ۱ در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $a_1$  و نسبت مشترک  $a_1$ ، جمله‌ی  $n$ ام از رابطه‌ی  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$  بدست می‌آید.

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^4} = r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$a_1 \times a_7 = 12 \Rightarrow a_1 \times a_1 r^6 = 12 \xrightarrow{r=3} a_1^2 \times 3^6 = 12 \Rightarrow a_1^2 = 4 \xrightarrow{\text{جملات دنباله، مثبت هستند}} a_1 = 2$$

$$a_7 = a_1 r^6 = 2(3)^6 = 54$$

۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $a_1$  و قدرنسبت  $q$ ، جمله‌ی عمومی دنباله از رابطه‌ی  $a_n = a_1 q^{n-1}$  بدست می‌آید.

$$\left. \begin{aligned} t_7 + t_5 = -7 &\Rightarrow t_1 q^6 + t_1 q^4 = -7 \Rightarrow t_1 q^4(1 + q) = -7 \\ t_7 + t_8 = 56 &\Rightarrow t_1 q^6 + t_1 q^7 = 56 \Rightarrow t_1 q^6(1 + q) = 56 \end{aligned} \right\} \div \rightarrow q^2 = -8$$

$$\Rightarrow q^2 = (-2)^2 \Rightarrow q = -2 \Rightarrow t_1 \times (-2)^7 \times (1 - 2) = -7$$

$$\Rightarrow t_1 \times (-8) \times (-1) = -7 \Rightarrow t_1 = -\frac{7}{8}$$

$$t_7 = -\frac{7}{8} \times (-2)^6 = -\frac{7}{8} \times 64 = -56$$

$$\Rightarrow t_1 + t_7 = -\frac{7}{8} - 56 = -\frac{7}{8} - \frac{448}{8} = -\frac{455}{8}$$

۷ - گزینه ۴

می‌دانیم:  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ : جمله عمومی دنباله‌ی حسابی و  $a_n = a_1 q^{n-1}$ : جمله عمومی دنباله‌ی هندسی

$$d = a_n - a_{n-1} \text{ قدرنسبت حسابی و } q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \text{ قدرنسبت هندسی}$$

$$2, \frac{7}{4}, \dots \Rightarrow d = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}, t_1 = 2$$

$$t_7 = t_1 + 6d = 2 - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_8 = t_1 + 7d = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

$$t_{13} = t_1 + 12d = 2 - \frac{12}{4} = -1$$

$$\text{دنباله هندسی: } \frac{5}{4} + x, \frac{1}{4} + x, -1 + x, \dots$$

$$\text{شرط تشکیل دنباله هندسی: } b^2 = ac \Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = (x - 1)\left(x + \frac{5}{4}\right)$$



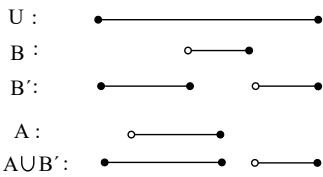
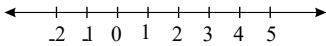
$$\Rightarrow \cancel{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \cancel{x} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{21}{16} \Rightarrow x = -\frac{21}{4}$$

$$\text{قدر نسبت دنباله هندسی } r = \frac{-\frac{21}{4} + \frac{1}{4}}{-\frac{21}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

۸ - گزینه ۱

$$A' = U - A \text{ (مرجع } U \text{) می‌دانیم}$$

با رسم مجموعه‌ها بر روی نمودار داریم:



با توجه به نمودار تنها عدد صحیحی که از مجموعه مرجع در مجموعه  $A \cup B'$  قرار نمی‌گیرد ۳ است.

۹ - گزینه ۱ می‌دانیم: مجموعه متناهی، مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن عددی حسابی باشد.

مجموعه  $A$ :  $x < 3 \Rightarrow (x + 1) < 4$

مجموعه  $A$  نامتناهی است، زیرا تمام اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۴ عضو آن هستند.

مجموعه  $B$ :  $-x + 1 > 6 \Rightarrow -x > 5 \Rightarrow x < -5 \Rightarrow (3x) < -15$

مجموعه  $B$  نامتناهی است، زیرا تمام اعداد صحیح کوچک‌تر از -۱۵ عضو آن هستند.

مجموعه  $C$ :  $x \leq 15, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 = \{1, 4, 9, 16, \dots, 225\}$

تعداد اعضای مجموعه  $C$  ۱۵ تا است و این مجموعه متناهی است.

مجموعه  $D$ :  $1 < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2}$

مجموعه  $D$  نامتناهی است زیرا تمام اعداد گویا بین  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{2}$  در این مجموعه هستند.

۱۰ - گزینه ۳ می‌دانیم: در هر دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  قدر نسبت  $r$  جمله عمومی از رابطه  $t_n = t_1 \times r^{n-1}$  بدست می‌آید

فرض:  $t_7 \times t_9 = 18t_8 \Rightarrow (t_1 \times r^6) \times (t_1 \times r^8) = 18(t_1 \times r^7)$

$\Rightarrow t_1^2 \times r^{14} = 18t_1 \times r^7 \Rightarrow \underbrace{t_1 r^7}_{t_8} = 18 \Rightarrow t_8 = 18$

۱۱ - گزینه ۴ می‌دانیم: برای هر مجموعه دلخواه  $A$  مجموعه  $A'$  شامل اعضای است که در مجموعه مرجع هستند و در  $A$  نیستند

$A = \{6, 12, 18, \dots, 96\}$

$B = \{4, 16, 36, 64, 100\}$

$B'$  مجموعه‌ایست شامل اعضای از  $U$  که مربع کامل نیستند و داریم:

$A - B' = \{36\} \Rightarrow n(A - B') = 1$

۱۲ - گزینه ۲ می‌دانیم: در هر الگوی خطی جمله عمومی به صورت  $t_n = an + b$  است که در آن  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی هستند

$$\begin{cases} t_3 = 3a + b \\ t_8 = 8a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 30 \\ 8a + b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = -30 \\ 8a + b = 15 \end{cases}$$

$$\Delta a = -15 \Rightarrow a = -3$$

$3a + b = 30 \xrightarrow{a=-3} -9 + b = 30 \Rightarrow b = 39 \Rightarrow t_n = -3n + 39$

$t_{15} = -3 \times 15 + 39 = -45 + 39 = -6$

۱۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، رابطه  $b^2 = ac$  بین آنها برقرار است.

رابطه فوق در بین جملات همگی گزینه‌ها جز گزینه ۴ برقرار است:

$(b + 2)^2 \neq (a + 2)(c + 2)$



میدانیم:  $Q' \cup Q = R$  ,  $Q' = R - Q$

مجموعه‌ی اعداد صحیح  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه‌ی اعداد حسابی  $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$Z - N = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

گزینه‌ی ۱:  $(Z - N) \cup W = \{0, -1, -2, -3, \dots\} \cup \{0, 1, 2, \dots\} = Z$

گزینه‌ی ۲:  $(Z - N) \cap W = \{0, -1, -2, -3, \dots\} \cap \{0, 1, 2, \dots\} = \{0\}$

گزینه‌ی ۳:  $N \cap (Q' - R) = N \cap \emptyset = \emptyset$

گزینه‌ی ۴:  $(Q' - N) \cup Q = Q' \cup Q = R$

میدانیم: در هر الگوی خطی، جمله‌ی عمومی از رابطه‌ی  $a_n = an + b$  بدست می‌آید که  $a$  و  $b$  در آن، اعدادی حقیقی هستند.

$$t_{13} + t_6 \stackrel{\text{بدست}}{=} t_7 + t_n \Rightarrow (13a + b) + (6a + b) = (7a + b) + (na + b)$$

$$\Rightarrow 19a + 2b = (3 + n)a + 2b \Rightarrow 19a = (3 + n)a \xrightarrow{\div a} 19 = 3 + n \Rightarrow n = 16$$

میدانیم: در هر دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $t_1$  و قدر نسبت  $r$  جمله‌ی عمومی از رابطه‌ی  $t_n = t_1 \times r^{n-1}$  بدست می‌آید.

$$t_1 \times t_2 \times t_3 \times t_4 \times t_5 = 2^5 \times 3^{10} \Rightarrow t_1 \times (t_1 r) \times (t_1 r^2) \times (t_1 r^3) \times (t_1 r^4) = 2^5 \times 3^{10}$$

$$\Rightarrow t_1^5 r^{10} = 2^5 \times 3^{10} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases} \Rightarrow t_n = 2 \times 3^{n-1}$$

پس جمله‌ی سوم برابر است با:

$$t_3 = 2 \times 3^{3-1} = 18$$

میدانیم: در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$ ، جمله‌ی عمومی از رابطه‌ی  $t_n = t_1 + (n - 1) \times d$  بدست می‌آید.

دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$89 \xrightarrow{+d} a \xrightarrow{+d} 84, \dots \Rightarrow 89 + 2d = 84 \Rightarrow 2d = -5 \Rightarrow d = -\frac{5}{2}$$

از طرفی  $t_1 = 89$ ؛ پس جمله‌ی عمومی عبارتست از:

$$t_n = 89 + (n - 1) \times \left(-\frac{5}{2}\right)$$

حال  $t_n > 0$  را تشکیل می‌دهیم تا تعداد جملات مثبت بدست آید.

$$89 + (n - 1) \times \left(-\frac{5}{2}\right) > 0 \Rightarrow 89 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow \frac{5}{2}n < 89 + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}n < \frac{183}{2} \xrightarrow{\times 2} 5n < 183 \xrightarrow{\div 5} n < \frac{183}{5} \Rightarrow n < 36,6 \Rightarrow n \leq 36$$

پس دنباله ۳۶ جمله مثبت دارد.

میدانیم: در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$ ، جمله‌ی عمومی از رابطه‌ی  $t_n = t_1 + (n - 1) \times d$  بدست می‌آید.

فرض مسئله:  $t_7 + t_8 + t_9 = 3t_6 + 10$

$$\Rightarrow (t_1 + d) + (t_1 + 7d) + (t_1 + 9d) = 3(t_1 + 5d) + 10$$

$$\Rightarrow 3t_1 + 17d = 3t_1 + 15d + 10 \Rightarrow 2d = 10 \Rightarrow d = 5$$

$$t_9 - t_7 = (t_1 + 8d) - (t_1 + 6d) = 2d = 5 \times 2 = 10$$

$$6, 11, 16, \dots$$

$$6, 6 + 5, 6 + 2 \times 5, \dots$$

۱۹ - گزینه ۲ دنباله‌ی «تعداد پاره‌خطها» را تشکیل می‌دهیم:

می‌توان این دنباله را به صورت زیر در نظر گرفت:

پس جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر خواهد بود.



$$a_n = 6 + (n - 1) \times 5 = 5n + 1$$

حال معادله ی  $a_n = 46$  را حل می کنیم:

$$5n + 1 = 46 \Rightarrow 5n = 45 \Rightarrow n = 9$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ n(A') &= n(U) - n(A) \\ (A \cup B)' &= A' \cap B' \end{aligned}$$

۲۰ - گزینه ۲ میدانیم:

$$n(A' - B) = 10 \Rightarrow n(A') - n(A' \cap B) = 10$$

$$\xrightarrow{n(A' \cap B)=30} n(A') = 40 \xrightarrow{n(U)=100} n(A) = 60$$

$$n(A' - B) = n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = 100 - n(A \cup B)$$

$$\xrightarrow{n(A' - B)=10} n(A \cup B) = 90$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

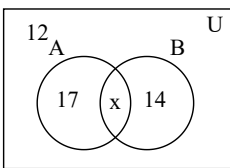
$$\Rightarrow 90 = 60 + 65 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 35$$

$$n(A - B') = n(A \cap B) = 35$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A) &= n(u) - n(A') \\ n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

۲۱ - گزینه ۲ میدانیم:

در صورتی که مجموعه ی افرادی که به رشته ی فوتبال علاقه دارند را  $A$  و مجموعه ی افرادی که به رشته ی تنیس علاقه دارند را  $B$  نمایش دهیم، داریم: ( $U$  مجموعه ی مرجع است.)



$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)') = 50 - 12 = 38$$

$$n(A - B) = 17, \quad n(B - A) = 14$$

همچنین می دانیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (1)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad (2)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(B \cap A) \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(3),(2),(1)} n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A - B) - n(B - A) \Rightarrow n(A \cap B) = 38 - 17 - 14 = 7$$

۲۲ - گزینه ۴ با درج دو واسطه هندسی بین اعداد ۵ و  $32r$  داریم:

$$t_1 = 5, \quad t_4 = 32r$$

$$t_4 = t_1 r^3 \Rightarrow \frac{32}{100} = 5 \times r^3 \Rightarrow \frac{32}{500} = r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow r = \frac{2}{5} = 0.4$$

۲۳ - گزینه ۴

می دانیم: در هر دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$ ، جمله عمومی از

$$\text{رابطه } t_n = t_1 \times r^{n-1} \text{ بدست می آید.}$$

$$t_5 - t_4 = \frac{1}{32} \Rightarrow t_1 r^5 - t_1 r^4 = \frac{1}{32} \Rightarrow t_1 (r^5 - r^4) = \frac{1}{32}$$

$$\xrightarrow{r=\frac{1}{2}} t_1 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32} \Rightarrow t_1 \times \frac{1-4}{16} = \frac{1}{32} \Rightarrow t_1 \times \frac{-3}{16} = \frac{1}{32} \Rightarrow t_1 = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{-3}{16}} = -\frac{1}{6}$$

۲۴ - گزینه ۴

می دانیم: در هر دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$ ، جمله عمومی از

$$\text{رابطه } t_n = t_1 \times r^{n-1} \text{ بدست می آید.}$$



$$t_1 + t_4 + t_7 = \frac{3}{2}(t_4 + t_5 + t_6) \Rightarrow t_1 + t_1 r + t_1 r^2 = \frac{3}{2}(t_1 r^3 + t_1 r^4 + t_1 r^5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t_1 + t_1 r + t_1 r^2} = \frac{3}{2} r^3 (t_1 + t_1 r + t_1 r^2) \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

۲۵ - گزینه ۲

می‌دانیم: در هر دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$ ، جمله عمومی از رابطه  $t_n = t_1 \times r^{n-1}$  بدست می‌آید.

چون خارج قسمت هر دو جمله متوالی دنباله فوق عددی ثابت است، این دنباله هندسی است و قدرنسبت آن برابر با همین خارج قسمت است:

$$r = \frac{t_4}{t_1} = \frac{t_7}{t_4} = -\frac{1}{2}$$

و جمله عمومی آن عبارتست از:

$$t_n = t_1 r^{n-1} = (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

پس:

$$(-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{128} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{128} = \left(-\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

۲۶ - گزینه ۴

می‌دانیم: در هر دنباله هندسی که جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  باشد، جمله عمومی از رابطه  $t_n = t_1 \times r^{n-1}$  بدست می‌آید.

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{27}{t_4} \Rightarrow \frac{t_1 r^6}{t_1 r^3} = 27 \Rightarrow r^3 = 27 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} r = 3$$

$$\frac{t_{10}}{t_8} = \frac{t_1 r^9}{t_1 r^7} = r^2 = 9 \Rightarrow t_{10} = 9t_8$$

۲۷ - گزینه ۳

می‌دانیم: در هر دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$ ، جمله عمومی از رابطه  $t_n = t_1 \times r^{n-1}$  بدست می‌آید.

$$\left. \begin{aligned} t_7 = 4 &\Rightarrow t_1 r^6 = 4 \\ t_8 = \frac{1}{2} t_7 &\Rightarrow t_1 r^7 = \frac{1}{2} t_1 r^6 \xrightarrow{\div t_1 r^6} r = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 \times \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow t_1 = 8$$

$$t_{15} = t_1 r^{14} = t_1 (r^7)^2 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۲۸ - گزینه ۳ دنباله هندسی حاصل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt[3]{\overbrace{7, \dots, 1701}^{x^r}}$$

$$7 \times r^5 = 1701 \Rightarrow r^5 = \frac{1701}{7} = 243 = 3^5 \xrightarrow{\sqrt[5]{\quad}} r = 3$$

$$\Rightarrow 7, 21, 63, 189, 567, 1701 \Rightarrow \text{حکم مسئله: } \frac{567}{21} = 27$$

۲۹ - گزینه ۴

می‌دانیم: در هر دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $d$ ، جمله عمومی از رابطه  $t_n = t_1 + (n-1)d$  بدست می‌آید.  
در هر دنباله هندسی، قدرنسبت برابر است با خارج قسمت دو جمله متوالی به فرم  $\frac{t_{n+1}}{t_n}$

در دنباله حسابی داریم:

$$t_4 = t_1 + d, \quad t_6 = t_1 + 3d, \quad t_8 = t_1 + 7d$$

اگر اینجا جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مربع وسطی برابر است با حاصلضرب جملات طرفین آن:

$$(t_1 + 3d)^2 = (t_1 + d)(t_1 + 7d) \Rightarrow t_1^2 + 9d^2 + 6t_1 d = t_1^2 + 8t_1 d + 7d^2$$

$$\Rightarrow 2d^2 = 2t_1 d \xrightarrow{\div 2d} d = t_1$$

پس دنباله هندسی حاصل بصورت زیر خواهد بود:



$$t_1 = d$$

$$\rightarrow 2d, 4d, 8d$$

$$\Rightarrow r = \frac{4d}{2d} = 2 \text{ قدر نسبت } 2$$

اگر جمله اول دنباله هندسی  $t_1 = \frac{1}{4}$  باشد:

$$t_n = \frac{1}{4} \times r^{n-1} \Rightarrow t_{10} = \frac{1}{4} \times 2^9 = \frac{2^9}{2^2} = 2^7 = 128$$

۳۰ - گزینه ۲ اگر  $a, b$  و  $c$  سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه  $b^2 = a \times c$  و  $b$  را واسطه‌ی هندسی بین  $a$  و  $c$  می‌نامیم.

$$\left(\frac{\sqrt{x+2}}{3}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x+6=18 \Rightarrow 3x=12 \rightarrow x=4$$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۴	۱۱ - ۴	۱۶ - ۴	۲۱ - ۲	۲۶ - ۴
۲ - ۴	۷ - ۴	۱۲ - ۲	۱۷ - ۲	۲۲ - ۴	۲۷ - ۳
۳ - ۳	۸ - ۱	۱۳ - ۴	۱۸ - ۴	۲۳ - ۴	۲۸ - ۳
۴ - ۱	۹ - ۱	۱۴ - ۲	۱۹ - ۲	۲۴ - ۴	۲۹ - ۴
۵ - ۱	۱۰ - ۳	۱۵ - ۱	۲۰ - ۲	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲