



علی هاشمی

نام آزمون: مجموعه الگو دنباله

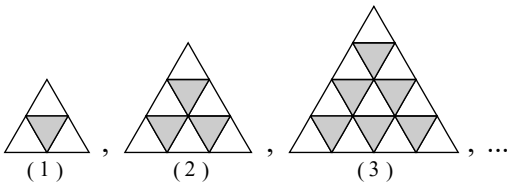
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- بین جملات ششم و هشتم یک دنباله هندسی با جملات مثبت و غیر ثابت، ۲۹ عدد به گونه‌ای درج کرده‌ایم که جملات حاصل تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند ($d > 0$). اگر جملات پنجم و ششم دنباله هندسی، جملات متوالی از یک دنباله حسابی با قدر نسبت d باشند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۱) ۵
- ۲) ۳
- ۳) ۲
- ۴) ۶

۲- با توجه به الگوی زیر، در مرحله ۹۸ام تعداد مثلث‌های تیره چند برابر تعداد مثلث‌های سفید است؟



- ۱) $\frac{98}{100}$
- ۲) $\frac{99}{100}$
- ۳) $\frac{100}{102}$
- ۴) $\frac{100}{101}$

۳- از ۷۲ نفر مسافر در یک هتل، ۲۳ نفر تاجر هستند و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر ۸ نفر از این تاجران برای اولین بار سفر کرده باشند، چند نفر نه تاجرند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

- ۱) ۵۲
- ۲) ۴۵
- ۳) ۳۷
- ۴) ۳۵



۴- در یک دنباله حسابی با جملات نامنفی و افزایشی، حاصل ضرب جملات دهم و ۲۴ ام برابر ۲۰۷ و حاصل ضرب جملات ۱۴ ام و ۲۰ ام برابر ۲۴۷ است. جمله ۱۸ ام این دنباله کدام است؟

- ۱) ۱۷
- ۲) ۱۸
- ۳) ۱۹
- ۴) ۲۰

۵- اگر سه جمله $\frac{3}{2}, 4m + 1, m - \frac{1}{2}$ به ترتیب از چپ به راست جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$
- ۲) ۲
- ۳) $\frac{5}{2}$
- ۴) $\frac{11}{2}$

۶- در یک دنباله حسابی، جمله دوم صفر، $t_m = n^2$ و $t_n = m^2$ است. جمله اول بر حسب m و n کدام است؟

- ۱) $m - n$
- ۲) $m + n$
- ۳) $2m + 3n$
- ۴) $3m - 2n$

۷- جملات سوم، هفتم و نهم یک دنباله حسابی غیر ثابت، به ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی می دهند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام می تواند باشد؟

- ۱) $\frac{9}{8}$
- ۲) $\frac{1}{2}$
- ۳) $\frac{1}{8}$
- ۴) $\frac{9}{2}$



۸- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۶- و مجموع سه جمله‌ی دوم ۲۱ است. جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

- ۱) ۱۱
- ۲) ۱۳
- ۳) ۱۵
- ۴) ۱۷

۹- در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ مجموع پانزده جمله‌ی اول کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2} - 1$
- ۲) ۱
- ۳) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- ۴) ۳

۱۰- در یک اتاق کنفرانس، صندلی‌ها به صورت دایره‌ای چیده شده است. در اولین ردیف ۸ صندلی وجود دارد و تعداد صندلی هر ردیف بعدی برابر با مجموع تعداد صندلی‌های ردیف جلویی و تعداد فاصله‌ی بین صندلی‌های ردیف جلویی است. اگر در کل، در این اتاق کنفرانس، ۷ ردیف وجود داشته باشد، مجموع صندلی‌های ردیف ششم و هفتم چند برابر مجموع صندلی‌های ردیف دوم و سوم است؟

- ۱) ۸
- ۲) ۱۶
- ۳) ۶
- ۴) ۱۲

۱۱- در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۰ نفر به موسیقی و ۱۷ نفر به نقاشی علاقه‌مند هستند. اگر ۳ نفر به هیچ‌کدام از این دو هنر علاقه نداشته باشند، کدام گزینه صحیح نیست؟

- ۱) ۵ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند.
- ۲) ۱۵ نفر به نقاشی علاقه‌مند نیستند
- ۳) ۱۲ نفر فقط به نقاشی علاقه‌مند هستند.
- ۴) ۲۷ نفر فقط به یکی از دو رشته نقاشی و موسیقی علاقه‌مند هستند.



۱۲- اگر $n(U) = 50$ ، $n(B) = 35$ ، $n(A' \cup B') = 30$ و $n(A') = 20$ باشند، مقدار $n(A \cup B)$ کدام است؟

- ① ۳۵
- ② ۴۰
- ③ ۴۵
- ④ ۲۰

۱۳- کدام مجموعه تهی نیست؟

- ① $W \cap (Z - N)$
- ② $N \cap (Z - W)$
- ③ $W \cap (R - Q)$
- ④ $N \cap (Q - Z)$

۱۴- با اضافه کردن یک مقدار ثابت به سه عدد ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ این سه عدد به ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله کدام

گزینه است؟

- ① $\frac{15}{2}$
- ② ۵
- ③ $\frac{5}{3}$
- ④ $\frac{10}{3}$

۱۵- در یک دنباله هندسی جمله هفتم برابر ۱۹۲ و جمله چهارم برابر ۲۴ است. جمله دهم کدام است؟

- ① ۳۰۷۲
- ② ۵۱۲
- ③ ۱۵۳۶
- ④ ۱۰۲۴



۱۶- بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ سه واسطه هندسی قرار داده‌ایم. مجموع این ۳ واسطه کدام است؟ (قدر نسبت مثبت است).

- ۱) ۷۸
- ۲) ۸۴
- ۳) ۹۲
- ۴) ۹۸

۱۷- در یک دنباله هندسی با جملات متمایز، مجموع ۴ جمله‌ی اول ۱۰ برابر مجموع دو جمله‌ی اول است. کدام یک نسبت مشترک این دنباله می‌تواند باشد؟

- ۱) ۲
- ۲) ۳
- ۳) ۴
- ۴) ۵

۱۸- در یک دنباله هندسی جمله‌ی پنجم $\frac{۲}{۸۱}$ و جمله‌ی دوم $-\frac{۲}{۳}$ است. جمله‌ی عمومی این دنباله کدام است؟

- ۱) $a_n = ۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-1}$
- ۲) $a_n = \frac{۱}{۳}(۲)^{n-1}$
- ۳) $a_n = ۲\left(-\frac{۱}{۳}\right)^{n-1}$
- ۴) $a_n = -\frac{۱}{۳}(۲)^{n-1}$

۱۹- در یک دنباله هندسی با جملات منفی، $a_1 + a_3 = -\frac{۱۳}{۱۸}$ و $a_۲ \times a_۴ = \frac{۴}{۸۱}$ است. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

- ۱) $-\frac{۱۷}{۱۸}$
- ۲) $-\frac{۲}{۹}$
- ۳) $-\frac{۱}{۲}$
- ۴) $-\frac{۹}{۲}$



۲۰- در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک بزرگتر از یک، حاصل ضرب سه جمله ابتدایی ۲۱۶ و مجموع آنها ۱۹ است. در این صورت جمله چهارم دنباله کدام است؟

① $\frac{8}{3}$

② $\frac{27}{2}$

③ ۱۳

④ ۳

۲۱- اگر Z, W, N و Q به ترتیب مجموعه اعداد طبیعی، حسابی، صحیح و گویا باشد، آنگاه حاصل کدام گزینه تهی است؟

① $N \cap W \cap Q$

② $(W \cap Z) - N$

③ $W - (N \cup Z)$

④ $(Z - Q) \cup N$

۲۲- کدام گزینه درست است؟

① اشتراک دو مجموعه نامتناهی، همواره نامتناهی است.

② اجتماع دو مجموعه متناهی، همواره متناهی است.

③ متمم یک مجموعه نامتناهی، همواره متناهی است.

④ اگر دو مجموعه A و B متناهی باشند، قطعاً اجتماع A و B غیر تهی است.

۲۳- اگر $2x + 3$ و $x - 1$ واسطه حسابی اعداد $x + 4$ و $2x - 1$ باشد، مقدار x کدام خواهد بود؟

① -۳

② -۲

③ $\frac{3}{2}$

④ $-\frac{2}{3}$



۲۴- اگر دنباله شماره (۱) یک دنباله حسابی و دنباله شماره (۲) یک دنباله هندسی باشد، حاصل $c - b$ کدام است؟

(۱) : $1, a, a + b, 10, \dots$, (۲) : $a, c, 16, 32, \dots$

- ۱) ۸
- ۲) ۳
- ۳) ۴
- ۴) ۵

۲۵- عدد کدام گزینه، واسطه هندسی بین جمله‌های دهم و شانزدهم دنباله حسابی زیر است؟

$4, 8, 12, \dots$

- ۱) ۱۶
- ۲) ۳۲
- ۳) $8\sqrt{10}$
- ۴) $16\sqrt{10}$

۲۶- در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان کلاس عضو هیچ‌کدام از تیم‌ها نباشند، چند نفر در این کلاس فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

- ۱) ۵
- ۲) ۹
- ۳) ۶
- ۴) ۱۴

۲۷- اگر $A_i = [i - 1, i + 1]$ باشد، مجموعه $(A_1 \cup \dots \cup A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۵
- ۳) ۶
- ۴) ۷



۲۸- بین دو عدد $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ ، سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم، مجموع این سه واسطه کدام است؟

① $-\frac{1}{32}$

② $\frac{1}{32}$

③ $\frac{9}{16}$

④ $\frac{7}{16}$

۲۹- جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۹ و ۷۲ است. جمله چهارم این دنباله کدام است؟

① 9×2^{39}

② 9×2^{36}

③ 9×2^{37}

④ 9×2^{40}

۳۰- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول، دوم و سوم برابر ۲۶ و مجموع جملات سوم، چهارم و پنجم برابر ۲۳۴ است. جمله نهم در این دنباله چند برابر جمله پنجم است؟

① ۹

② ۳

③ ۲۷

④ ۸۱



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

می‌دانیم:

*جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d برابر است با: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

*جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول b_1 و قدر نسبت q برابر است با: $b_n = b_1 q^{n-1}$

$$b_6, a_7, a_8, \dots, a_{30}, b_{31}$$

$$\begin{cases} b_{31} - b_6 = 30d \Rightarrow d = \frac{b_{31} - b_6}{30} = \frac{b_1 q^{30} - b_1 q^6}{30} \\ d = b_7 - b_6 = b_1 q^6 - b_1 q^6 \end{cases}$$

$$\frac{b_1 q^{30} - b_1 q^6}{30} = b_1 q^6 - b_1 q^6 \Rightarrow \frac{q^{30} - q^6}{30} = q^6 - q^6 \Rightarrow \frac{q^6(q^24 - 1)}{30} = q^6(q - 1) \Rightarrow \frac{q^24 - 1}{30} = q - 1 \Rightarrow \frac{q(q^{23} - 1)}{q - 1} = 30 \Rightarrow \frac{q(q - 1)(q + 1)}{q - 1} = 30 \Rightarrow q(q + 1) = 30 \Rightarrow q = 5$$

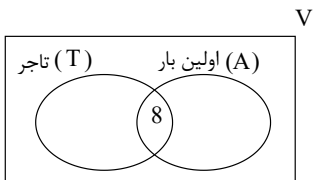
۲ - گزینه ۱

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد مثلث‌های سیاه	$1 = \frac{1 \times 2}{2}$	$3 = \frac{2 \times 3}{2}$	$6 = \frac{3 \times 4}{2}$...	$\frac{n(n+1)}{2}$
تعداد مثلث‌های سفید	$3 = \frac{2 \times 3}{2}$	$6 = \frac{3 \times 4}{2}$	$10 = \frac{4 \times 5}{2}$...	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{n}{n+2} \xrightarrow{n=98} \frac{98}{100}$$

۳ - گزینه ۲

با توجه به نمودار ون داریم:



$$n(V) = 72, n(T) = 23, n(A) = 12, n(T \cap A) = 8$$

$$n(T \cup A) = n(T) + n(A) - n(T \cap A) = 23 + 12 - 8 = 27$$

مجموعه افرادی که نه تاجرند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند، متمم مجموعه افرادی است که «تاجرند یا برای اولین بار سفر کرده‌اند»، پس:

$$n(T \cup A)' = n(V) - n(T \cup A) = 72 - 27 = 45$$

۴ - گزینه ۱ می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی برابر $a_n + (n - 1)d$ است.

$$\begin{cases} a_{10} \times a_{24} = 207 \\ a_{14} \times a_{20} = 247 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 9d)(a_1 + 23d) = 207 \\ (a_1 + 13d)(a_1 + 19d) = 247 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 32a_1d + 207d^2 = 207 \\ a_1^2 + 32a_1d + 247d^2 = 247 \end{cases}$$

$$247d^2 - 207d^2 = 247 - 207$$

$$\Rightarrow d^2(247 - 207) = 247 - 207$$

$$\Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm 1 \xrightarrow{\text{افزایشی}} d = 1$$

$$a_1^2 + 32a_1 + 207 = 207 \Rightarrow a_1^2 + 32a_1 = 0 \Rightarrow a_1(a_1 + 32) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \text{ (جملات نامفنی)} \\ a_1 = -32 \text{ (غی قی)} \end{cases}$$

$$a_{18} = a_1 + 17d = 0 + 17 \times 1 = 17$$

۵ - گزینه ۳ می‌دانیم: تفاضل هر ۲ جمله متوالی از یک دنباله حسابی باهم برابر و برابر قدر مطلق است. $a_n - a_{n-1} = d$



$$\left(4m + \frac{3}{2}\right) - (2m + 1) = (2m + 1) - \left(m - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2m + 1 = \frac{(4m + \frac{3}{2}) + (m - \frac{1}{2})}{2}$$

$$\Rightarrow 2m + 1 = \frac{5m + 1}{2} \Rightarrow 4m + 2 = 5m + 1 \Rightarrow 5m - 4m = 2 - 1 \Rightarrow m = 1$$

$$d = 4m + \frac{3}{2} - 2m - 1 \xrightarrow{m=1} d = 4 + \frac{3}{2} - 2 - 1 = \frac{5}{2}$$

۶ - گزینه ۲ می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی برابر است با: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$t_r = t_1 + d = 0 \Rightarrow t_1 = -d$$

$$\begin{cases} t_m = t_1 + (m - 1)d = n^r \\ t_n = t_1 + (n - 1)d = m^r \end{cases} \xrightarrow{t_1 = -d} \begin{cases} -d + (m - 1)d = n^r \\ -d + (n - 1)d = m^r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m - 2)d = n^r \\ (n - 2)d = m^r \end{cases}$$

$$(m - 2)d - (n - 2)d = n^r - m^r$$

$$\Rightarrow (m - n)d = n^r - m^r \Rightarrow d = \frac{n^r - m^r}{m - n} = \frac{(n - m)(n + m)}{(m - n)} = -(n + m)$$

$$t_1 = -d = -(-(n + m)) = n + m$$

جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d برابر است با: $t_n = t_1 + (n - 1)d$
 جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r برابر است با: $t_n = t_1 r^{n-1}$
 در دنباله حسابی، تفاضل هر دو جمله متوالی باهم برابر و برابر قدرنسبت است.
 در دنباله هندسی، خارج قسمت هر دو جمله متوالی باهم برابر و برابر قدرنسبت است.

۷ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$a_r, a_v, a_9 : \text{ دنباله هندسی} \Rightarrow \frac{a_9}{a_v} = \frac{a_v}{a_r} \Rightarrow (a_v)^2 = a_9 \times a_r$$

$$\Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 8d)(a_1 + 2d) \Rightarrow a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$$

$$\Rightarrow 2a_1d + 20d^2 = 0 \Rightarrow 2d(a_1 + 10d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \xrightarrow{\text{دنباله غیر ثابت}} \text{غ.ق.ق} \\ a_1 = -10d \end{cases}$$

$$r = \frac{a_9}{a_v} = \frac{a_1 + 8d}{a_1 + 6d} = \frac{-10d + 8d}{-10d + 6d} = \frac{-2d}{-4d} = \frac{1}{2}$$

۸ - گزینه ۲ می‌دانیم: هر دنباله‌ی حسابی که جمله اول آن t_1 و قدرنسبت آن d باشد، جمله n ام از رابطه $t_n = t_1 + (n - 1)d$ بدست می‌آید.

$$t_1 + t_r + t_v = -6 \Rightarrow t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = -6 \Rightarrow 3t_1 + 3d = -6 \quad (1)$$

$$t_r + t_5 + t_6 = 21 \Rightarrow (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 21 \Rightarrow 3t_1 + 12d = 21$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3t_1 - 3d = 6 \\ 3t_1 + 12d = 21 \end{cases}$$

$$9d = 27 \Rightarrow d = 3$$

$$(1) \xrightarrow{d=3} 3t_1 + 9 = -6 \Rightarrow 3t_1 = -15 \Rightarrow t_1 = -5$$

و جمله‌ی هفتم عبارتست از:

$$t_v = t_1 + 6d = -5 + 6 \times 3 = 13$$

۹ - گزینه ۴

می‌دانیم: $(\sqrt[n]{a})^r = a \left(\begin{matrix} n \text{ زوج} \\ a < 0 \end{matrix} \right), (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

ابتدا جمله عمومی دنباله را گویا می‌کنیم:

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \sqrt{2} - \sqrt{1} \\ t_r &= \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ t_v &= \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ t_{15} &= \sqrt{16} - \sqrt{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 + \dots + t_{15} = -\sqrt{1} + \sqrt{16} = 4 - 1 = 3$$



می‌دانیم: جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q برابر است با: $a_n = a_1 q^{n-1}$

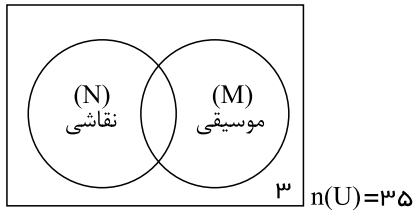
با رسم الگوی صندلی‌ها داریم:

	رسم یک ۸ ضلعی	رسم یک ۱۶ ضلعی	...	رسم یک ۳۲ ضلعی
تعداد صندلی‌ها	۸	۱۶		۳۲
فاصله بین صندلی‌ها	۸	۱۶		۳۲

دنباله حاصل یک دنباله هندسی با جمله اول ۸ و قدر نسبت ۲ است.

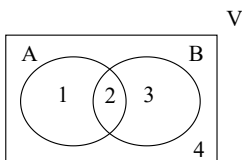
$$\frac{\text{مجموع صندلی‌های ردیف ششم و هفتم}}{\text{مجموع صندلی‌های ردیف دوم و سوم}} = \frac{a_6 + a_7}{a_2 + a_3} = \frac{a_1 q^5 + a_1 q^6}{a_1 q + a_1 q^2} = \frac{q^5 + q^6}{q + q^2} = \frac{q^5 + q^6}{q(1 + q)} = \frac{q^4 + q^5}{1 + q} = \frac{q^4(1 + q)}{1 + q} = q^4 = 16$$

با توجه به نمودار ون داریم:



$n(U) = 35, n(M) = 20, n(N) = 17$
 $n(M \cup N) = 35 - 3 = 32$
 $n(M \cup N) = n(M) + n(N) - n(M \cap N)$
 $32 = 20 + 17 - n(M \cap N) \Rightarrow n(M \cap N) = 5$ ۵ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند.
 $n(N^c) = n(U) - n(N) = 35 - 17 = 18$ ۱۸ نفر به نقاشی علاقه‌مند نیستند.
 $n(N - M) = n(N) - n(N \cap M) = 17 - 5 = 12$ ۱۲ نفر فقط به نقاشی علاقه‌مند هستند
 $n(N - M) \cup n(M - N) = n(N) - n(N \cap M) + n(M) - n(M \cap N) = 12 + 15 = 27$

۱۲ - گزینه ۳ راه حل اول: با شماره‌گذاری نمودار ون داریم:



مجموعه	اعداد مربوط	تعداد
V	1, 2, 3, 4	50
B	2, 3	35
A' ∪ B'	1, 3, 4	30
A'	3, 4	20

$35 \Rightarrow 1, 4 : 15$
 $30 \Rightarrow 1 : 10$
 $4 : 5 \Rightarrow 1, 2, 3 = 45$

راه حل دوم:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $n(A \cap B) = n(U) - n(A' \cup B') = 50 - 30 = 20$
 $n(A) = n(U) - n(A') = 50 - 20 = 30$
 $\rightarrow n(A \cup B) = 30 + 35 - 20 = 45$

$\{Z - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0\} \Rightarrow \mathbb{W} \cap (Z - \mathbb{N}) = \{0\}$
 $\{ \mathbb{W} = \{0, 1, \dots\}$

$\{Z - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\} \Rightarrow \mathbb{N} \cap (Z - \mathbb{W}) = \{ \}$
 $\{ \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{W} = \{ \}$

از آنجایی که اعضای \mathbb{W} همگی در \mathbb{Q} هستند، پس با کم شدن \mathbb{Q} از \mathbb{R} اعضای \mathbb{W} نیز همگی از \mathbb{R} کم می‌شوند در نتیجه اشتراکشان تهی است.



۴) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cap \mathbb{N} = \{ \}$

اگر اعداد مثبت c و b و a جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند داریم $b^2 = ac$
 در هر دنباله هندسی، قدر نسبت از رابطه $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ بدست می‌آید.

دنباله‌ی هندسی حاصل بصورت زیر است:

دنباله‌ی هندسی $20 + x, 50 + x, 100 + x \rightarrow (50 + x)^2 = (20 + x)(100 + x)$
 $\Rightarrow 2500 + 100x + x^2 = x^2 + 120x + 2000 \Rightarrow 20x = 500 \Rightarrow x = 25$
 \Rightarrow دنباله‌ی هندسی: ۴۵، ۷۵، ۱۲۵

و قدر نسبت دنباله عبارت‌اند از:

$$r = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}$$

۱۵ - گزینه ۳ در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a_7 = 192 \Rightarrow a_1 r^6 = 192 \\ a_8 = 24 \Rightarrow a_1 r^7 = 24 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^6}{a_1 r^7} = \frac{192}{24} \Rightarrow r^{-1} = 8 \Rightarrow r = \frac{1}{8}$$

$$a_1 r^7 = 24 \xrightarrow{r=1/8} a_1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^7 = 24 \Rightarrow a_1 \times \frac{1}{8^7} = 24 \Rightarrow a_1 = 24 \times 8^7$$

$$a_{10} = a_1 r^9 = 24 \times 8^7 \times \left(\frac{1}{8}\right)^9 = 24 \times 8^{-2} = 3$$

۱۶ - گزینه ۱

در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$2, \circ, \circ, \circ, 162$
 جمله اول جمله پنجم

$$a_5 = a_1 r^4 = 162 \Rightarrow 162 = 2(r^4) \Rightarrow r^4 = 81 = 3^4 \xrightarrow{r>0} r = 3$$

$$2, 2 \times 3, 2 \times 3^2, 2 \times 3^3, 2 \times 3^4 \Rightarrow 2, 6, 18, 54, 162$$

مجموع ۳ واسطه برابر $78 = 18 + 54 + 6$ است.

۱۷ - گزینه ۲ در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_1 + a_r + a_{r^2} + a_{r^3} = 10(a_1 + a_r) \Rightarrow a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 10(a_1 + a_1 r)$$

$$\Rightarrow a_1 + a_1 r + r^2(a_1 + a_1 r) = 10(a_1 + a_1 r)$$

$$\underbrace{(a_1 + a_1 r)}_{\text{فاکتور}} (1 + r^2) = 10(a_1 + a_1 r) \Rightarrow 1 + r^2 = 10 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

۱۸ - گزینه ۳ در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$\frac{a_5}{a_7} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r^6} = \frac{r^4}{r^6} \Rightarrow r^2 = -\frac{1}{27} \Rightarrow r = -\frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$a_7 = a_1 r^6 = -\frac{2}{3} \xrightarrow{r=-1/\sqrt{27}} -\frac{1}{3} a_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{-2}{-1/3} = 2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{n-1}$$

۱۹ - گزینه ۳ در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ بدست می‌آید.

$$a_7 \times a_9 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1 r^6 \times a_1 r^8 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1^2 r^{14} = \frac{4}{81} \Rightarrow (a_1 r^7)^2 = \frac{4}{81} \Rightarrow a_1 r^7 = \pm \frac{2}{9}$$

چون r^2 مثبت است و جملات دنباله، منفی هستند، پس $a_1 r^7 = -\frac{2}{9}$ است.

$$a_1 + a_9 = -\frac{13}{18} \Rightarrow a_1 + a_1 r^8 = -\frac{13}{18} \xrightarrow{a_1 r^7 = -2/9} a_1 - \frac{2}{9} = -\frac{13}{18} \Rightarrow a_1 = -\frac{13}{18} + \frac{2}{9}$$



$$\Rightarrow a_1 = \frac{-13 + 4}{18} = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}$$

۲۰ - گزینه ۲ سه جمله‌ی ابتدایی این دنباله‌ی هندسی را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه:

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6 \Rightarrow \text{جملات: } \frac{6}{r}, 6, 6r$$

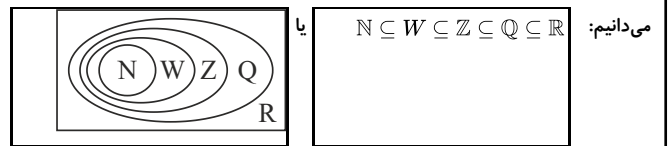
$$\frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \xrightarrow{\times r} 6 + 6r + 6r^2 = 19r$$

$$6r^2 - 13r + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-13)^2 - 4 \times (6) \times (6) \Rightarrow \Delta = 169 - 144 = 25$$

$$r = \frac{13 \pm 5}{2 \times (6)} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{13 + 5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4, 6, 9, \frac{27}{2} \text{ قق} \\ r_2 = \frac{13 - 5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} < 1 \text{ غق} \end{cases}$$

بنابراین جمله‌ی چهارم برابر $\frac{27}{2}$ است.

۲۱ - گزینه ۳



بررسی گزینه‌ها:

۱) $N \cap W \cap Q = N$

۲) $(W \cap Z) - N = W - Z = \{0\}$

۳) $W - (Z \cup N) = W - Z = \emptyset$

۴) $(Z - Q) \cup N = \emptyset \cup N = N$

بنابراین تنها گزینه ۳ تهی است.

۲۲ - گزینه ۲

می‌دانیم: اجتماع دو مجموعه متناهی همواره متناهی است.
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) $\begin{cases} A = [0, +\infty) \\ B = (-\infty, 0] \end{cases}$ مثال نقض نادرست $\rightarrow A \cap B = \{0\}$

۳) متناهی Q' و متناهی Q : مثال نقض: نادرست

۴) مثال نقض: نادرست $\begin{cases} A = \{ \} \\ B = \{ \} \end{cases} \rightarrow A \cap B = \{ \}$

۲۳ - گزینه ۱

می‌دانیم: واسطه حسابی بین دو عدد a و b برابر است با $\frac{a+b}{2}$

داریم:

$$2x + 3 = \frac{(x+4) + (2x-1)}{2} \Rightarrow 4x + 6 = 3x + 3 \Rightarrow x = -3$$

۲۴ - گزینه ۴

می‌دانیم: در دنباله‌های حسابی، اختلاف هر دو جمله با هم برابر و برابر قدرنسبت است $(a_n - a_{n-1} = d)$
در دنباله‌های هندسی، خارج قسمت هر جمله بر جمله ماقبل خود برابر با قدرنسبت است $(\frac{a_n}{a_{n-1}} = q)$

داریم:

$$10 - (a+b) = \overbrace{(a+b) - a}^{(II)} = a - 1 \quad (I)$$

۱۰ - $(a+b) = (a+b) - a = a - 1$



$$I: 10 - (a + b) = (a + b) - a \Rightarrow 10 - a - b = a + b - a \Rightarrow 10 - a = 2b \quad (I)$$

$$II: (a + b) - a = a - 1 \Rightarrow a + b - a = a - 1 \Rightarrow b = a - 1 \quad (II)$$

$$(I), (II): \begin{cases} 10 - a = 2b \\ a - 1 = b \end{cases}$$

$$9 = 2b \Rightarrow b = 3$$

$$b = a - 1 \xrightarrow{b=3} 3 = a - 1 \Rightarrow a = 4$$

$$\frac{16}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = 16 \times 4 \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} c = 8 \\ c = -8 \end{cases}$$

با توجه به مثبت بودن جملات دنباله غ.ق.ق

$$\begin{cases} c = 8 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c - b = 8 - 3 = 5$$

۲۵ - گزینه ۴

می‌دانیم: جمله عمومی یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $a_n = a_1 + (n - 1)d$ است
 واسطه هندسی بین دو جمله a و b برابر $\pm\sqrt{ab}$ است.

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 8 - 4 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_{10} = a_1 + 9d = 4 + 9 \times 4 = 40 \\ a_{16} = a_1 + 15d = 4 + 15 \times 4 = 64 \end{cases}$$

$$\text{واسطه هندسی} = \pm\sqrt{40 \times 64} = \pm\sqrt{4} \times \sqrt{10} \times \sqrt{64} = \pm 2 \times 8 \times \sqrt{10} = \pm 16\sqrt{10}$$

۲۶ - گزینه ۲

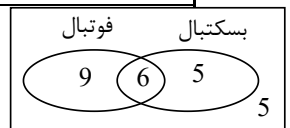
$$n(A \cup B) - n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$n(F) = 15$$

$$n(B) = 11$$

$$n(F \cup B) = 25 - 5 = 20$$

هیچکدام از رشته‌ها
کل کلاس



$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B)$$

$$20 = 15 + 11 - n(F \cap B) \Rightarrow n(F \cap B) = 6 \text{ تعداد افرادی که در هر دو تیم هستند}$$

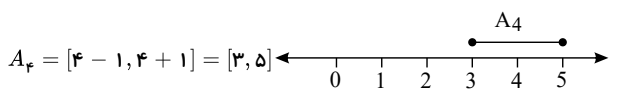
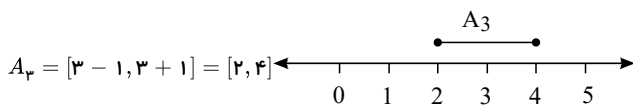
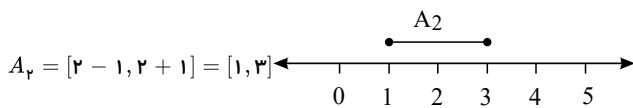
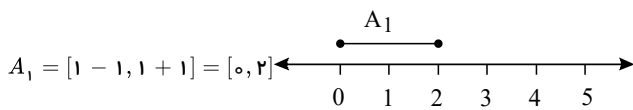
$$\underbrace{n(F) - n(F \cap B)} = 15 - 6 = 9$$

تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند

۲۷ - گزینه ۲

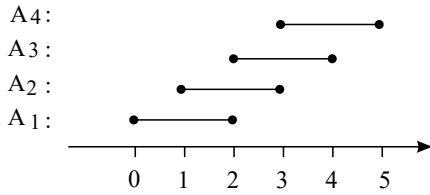
$$A_i = [i - 1, i + 1]$$

با توجه به A_1, A_i, A_4 تا A_n را تشکیل می‌دهیم:



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = [0, 2] \cup [1, 3] \cup [2, 4] \cup [3, 5] = [0, 5]$$

با توجه به A_1 تا A_n داریم:

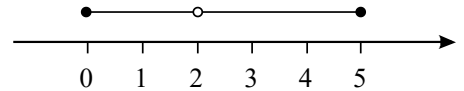


$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4: \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = [0, 2] \cap [1, 3] \cap [2, 4] = \{2\}$$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n) - (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = [0, 5] - \{2\}$$

بنابراین:



اعداد صحیح این مجموعه عبارتند از 0, 1, 3, 4, 5 که 5 تا هستند.

۲۸ - گزینه ۳ دنباله حاصل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{4}, \dots, \dots, \dots, \frac{1}{8}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $+d \quad +d \quad +d \quad +d$

$$\frac{1}{4} + 4d = \frac{1}{8} \Rightarrow 4d = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{8} \Rightarrow d = \frac{-1}{32}$$

دنباله را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{32}, \frac{6}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{8}$$

مجموع سه واسطه حسابی برابر است با:

$$\frac{7}{32} + \frac{6}{32} + \frac{5}{32} = \frac{7+6+5}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

راه دوم:

در دنباله حسابی اگر a و c دو جمله دلخواه با فاصله یکسان از b باشند، داریم: $b = \frac{a+c}{2}$

می‌دانیم:

$$\frac{1}{4}, a_2, a_3, a_4, \frac{1}{8}$$

$$a_2 = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{2} = \frac{\frac{3}{8}}{2} = \frac{3}{16}$$

$$a_2 = \frac{3}{16} = \frac{a_2 + a_4}{2} \Rightarrow a_2 + a_4 = \frac{3}{8}$$

$$a_2 + a_2 + a_4 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{9}{16}$$

۲۹ - گزینه ۳

جمله عمومی دنباله هندسی: $a_n = a_1 q^{n-1}$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 q^1 = 9 \\ a_4 = a_1 q^3 = 72 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 q^3}{a_1 q^1} = \frac{72}{9} \Rightarrow q^2 = 8 \Rightarrow q = 2$$

$$a_2 = a_1 q^1 = 9 \xrightarrow{q=2} a_1 \times 2 = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{2} \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow a_{39} = a_1 q^{38} = \frac{9}{2} \times 2^{38} = \frac{9}{2} \times 2^{37} \times 2 = 9 \times 2^{37}$$

۳۰ - گزینه ۴

جمله عمومی دنباله هندسی: $a_n = a_1 q^{n-1}$

می‌دانیم:



$$a_1 + a_r + a_p = 26 \Rightarrow a_1 + a_1q + a_1q^r = 26 \Rightarrow a_1(1 + q + q^r) = 26 \quad (I)$$

$$a_r + a_f + a_d = 234 \Rightarrow a_1q^r + a_1q^r + a_1q^f = 234 \Rightarrow a_1q^r(1 + q + q^f) = 234 \quad (II)$$

از تقسیم عبارت II بر I داریم:

$$\frac{a_1q^r(1 + q + q^f)}{a_1(1 + q + q^r)} = \frac{234}{26} \Rightarrow q^r = 9 \Rightarrow \frac{a_9}{a_d} = \frac{a_1q^9}{a_1q^f} = q^f = (q^r)^2 \stackrel{q^r=9}{=} 9^2 = 81$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۶ - ۲	۱۱ - ۲	۱۶ - ۱	۲۱ - ۳	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۲	۲۷ - ۲
۳ - ۲	۸ - ۲	۱۳ - ۱	۱۸ - ۳	۲۳ - ۱	۲۸ - ۳
۴ - ۱	۹ - ۴	۱۴ - ۳	۱۹ - ۳	۲۴ - ۴	۲۹ - ۳
۵ - ۳	۱۰ - ۲	۱۵ - ۳	۲۰ - ۲	۲۵ - ۴	۳۰ - ۴