



علی هاشمی

نام آزمون: مجموعه الگو دنباله

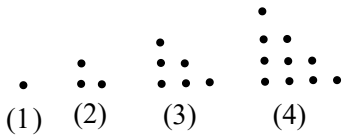
سایت: ALIGEBRA.COM

علی هاشمی: ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱- در یک کلاس ۴۵ نفری همه‌ی دانش‌آموزان کفش مشکی یا کت قهوه‌ای پوشیده‌اند. اگر ۳۰ نفر کفش مشکی و ۲۵ نفر کت قهوه‌ای پوشیده باشند، معین کنید چند نفر هم کفش مشکی و هم کت قهوه‌ای پوشیده‌اند؟

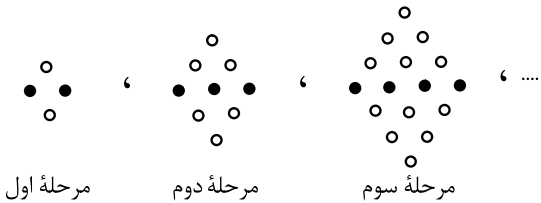
- ۱) ۱۰
- ۲) ۱۵
- ۳) ۵
- ۴) ۱۳

۲- در الگوی زیر، تعداد نقاط چندمین شکل برابر ۵۰۵ است؟



- ۱) ۵۰امین
- ۲) ۱۵۱امین
- ۳) ۱۰۰امین
- ۴) ۱۰۱امین

۳- با توجه به الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های سفید در شکل مرحله‌ی یازدهم کدام است؟



- ۱) ۱۳۲
- ۲) ۱۳۶
- ۳) ۱۲۲
- ۴) ۱۲۶

۴- حاصل ضرب ۱۰ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{10}$
- ۲)  $-\frac{1}{10}$
- ۳)  $\frac{1}{11}$
- ۴)  $-\frac{1}{11}$



۵- در یک دنباله ی خطی با جمله ی عمومی  $a_n$ ،  $\frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{2}a_2$  و جمله ی پنجم، دو واحد بیش تر از قرینه ی نصف جمله ی اول است. جمله ی یازدهم کدام

است؟

- ۱) ۶-
- ۲) ۴-
- ۳) ۴
- ۴) ۶

۶- کدام یک از جملات زیر در حالت کلی صحیح نیست؟

- ۱) اگر جملات یک دنباله ی حسابی را در عددی ثابت ضرب کنیم، دنباله ی جدید نیز یک دنباله ی حسابی است.
- ۲) اگر جملات یک دنباله ی حسابی را با عدد ثابتی جمع کنیم، دنباله ی جدید نیز یک دنباله ی حسابی است.
- ۳) اگر جملات یک دنباله ی حسابی را بر عددی غیر صفر تقسیم کنیم، دنباله ی جدید نیز یک دنباله ی حسابی است.
- ۴) مربع جملات یک دنباله ی حسابی نیز یک دنباله ی حسابی است.

۷- در یک دنباله ی حسابی، جملات هفتم و سیزدهم دنباله به ترتیب از راست به چپ برابر با ۱۷ و ۴۱ هستند. جمله ی دهم این دنباله کدام است؟

- ۱) ۲۷
- ۲) ۳۱
- ۳) ۲۹
- ۴) ۳۰

۸- بین دو عدد ۱۷ و ۹۳، هجده واسطه ی حسابی درج کرده ایم. واسطه ی یازدهم کدام است؟ (جملات دنباله را به صورت افزایشی در نظر بگیرید.)

- ۱) ۵۷
- ۲) ۶۱
- ۳) ۶۵
- ۴) ۵۳

۹- مجموع سه جمله ی اول یک دنباله ی حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله ی بعدی آن است. جمله ی چندم این دنباله برابر صفر است؟

- ۱) پنجم
- ۲) ششم
- ۳) هفتم
- ۴) چهارم



۱۰- دنباله هندسی  $(\frac{1}{5})^{k^x-1}, \dots, \frac{1}{125}, \frac{1}{5}$  چند جمله دارد؟ ( $k$  زوج است).

①  $\frac{k}{2}$

②  $\frac{k^x}{2}$

③  $3k$

④  $3k^x$

۱۱- اگر جملات چهارم و هشتم یک دنباله هندسی به ترتیب از راست به چپ برابر با ۹ و ۱۲ باشند، جمله دوازدهم این دنباله کدام است؟

① ۱۰۸

② ۱۶

③ ۳۶

④ ۱۸

۱۲- جمله هشتم از دنباله حسابی  $1, 3, \dots$  با جمله چندم یک دنباله هندسی با جمله عمومی  $t_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$  برابر است؟

① سوم

② پنجم

③ ششم

④ هشتم

۱۳- در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟

① ۴

② ۵

③ ۶

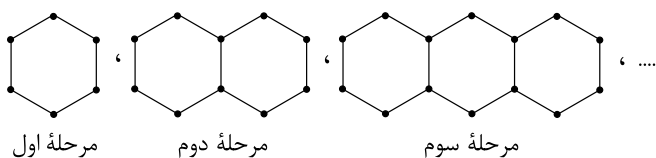
④ ۷



۱۴- کدام گزینه نادرست است؟

- ① هر مجموعه و متمم‌اش، دو مجموعه جدا از هم هستند.  
 ② اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه مجزا از هم باشند، آنگاه  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$   
 ③ اگر  $A$  مجموعه‌ای متناهی و  $B$  مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه  $A \cup B$  متناهی است.  
 ④ مجموعه اعداد گویا و متمم آن، هر دو مجموعه‌های نامتناهی هستند.

۱۵- باتوجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خط‌ها در مرحله دهم کدام است؟



- ① ۵۰  
 ② ۵۱  
 ③ ۶۰  
 ④ ۶۱

۱۶- اگر  $c_n$  جمله عمومی یک الگوی خطی،  $c_4 = 17$  و  $c_{10} = 41$  باشد، کدام است؟

- ①  $c_n = 5n - 3$   
 ②  $c_n = 4n + 1$   
 ③  $c_n = 5n - 9$   
 ④  $c_n = 4n$

۱۷- اگر  $A \subset B \subset U$  و مجموعه مرجع باشد، کدام رابطه همواره برقرار است؟

- ①  $B' \subset A'$   
 ②  $B' \subset A$   
 ③  $A' \subset B'$   
 ④  $B \subset A'$

۱۸- کدام یک از مجموعه‌های زیر با سایر مجموعه‌ها متفاوت است؟

- ①  $Z - R$   
 ②  $W - N$   
 ③  $Q' \cap Q$   
 ④  $Q' - R$



۱۹- جمله بیستم دنباله حسابی  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{19}$
- ②  $\frac{1}{20}$
- ③  $-\frac{8}{3}$
- ④  $-\frac{17}{3}$

۲۰- در دنباله‌ی حسابی  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  کدام یک از عبارتهای زیر همواره صحیح است؟

- ①  $2a_n - a_{2n} = a_2$
- ②  $a_{n+1} - a_{n-1} = a_2$
- ③  $3a_{2n+1} - 2a_{2n} = a_3$
- ④  $a_{2n+1} - a_{2n-1} = a_2$

۲۱- اگر  $x, y$  و  $z$  سه عدد متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند و حاصل جمع آنها  $10-$  باشد، در این صورت حاصل  $yx + zy$  کدام است؟

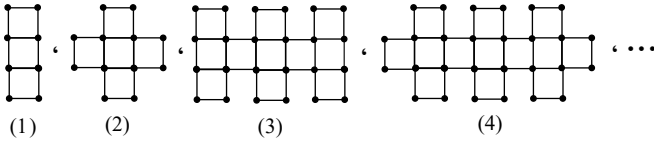
- ①  $-\frac{20}{9}$
- ②  $\frac{9}{200}$
- ③  $-\frac{200}{3}$
- ④  $\frac{200}{9}$

۲۲- واسطه‌ی حسابی بین دو عدد  $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$  و  $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{2}$
- ②  $-\frac{1}{4}$
- ③  $\sqrt{2}$
- ④  $-\frac{1}{2}$



۲۳- با توجه به شکل‌های زیر، تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی یازدهم کدام است؟



- ① ۱۲۶
- ② ۱۳۰
- ③ ۱۰۶
- ④ ۸۲

۲۴- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- ① اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای الزاماً نامتناهی است.
- ② تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای الزاماً نامتناهی است.
- ③ اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه  $A$  الزاماً نامتناهی است.
- ④ اگر  $A \subseteq B$  و  $A \cap B$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه  $B$  الزاماً نامتناهی است.

۲۵- اگر  $A = [a, \frac{a+b}{2} + 3]$  و  $B = [\frac{a+b}{2} - 2, b + 2a)$  دو بازه‌ی جدا از هم باشند که اجتماع آنها یک بازه‌ی بسته باشد، متمم  $A \cup B$  شامل چند عدد صحیح نیست؟ (مجموعه‌ی مرجع را  $R$  در نظر بگیرید.)

- ① ۵
- ② ۶
- ③ ۷
- ④ بی‌شمار

۲۶- اگر  $A$  مجموعه‌ای متناهی،  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی و  $C$  مجموعه‌ای دلخواه و نامشخص باشد،  $(C \neq B, A)$ ، کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟ (مجموعه‌ی مرجع، اعداد حقیقی است.)

- ①  $A \cap (B \cup C)$
- ②  $A \cup (B - C)$
- ③  $B - (A \cap C)$
- ④  $(A \cup C) \cap (B \cup C)$



۲۷- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله دوم ۷ واحد بیش تر از جمله اول و جمله چهارم ۶۳ واحد بیش تر از جمله سوم است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۹
- ۳) ۲
- ۴) ۴

۲۸- در دنباله‌ی حسابی  $1, 7, \dots, 2x + 1, 4 - 3x$  واسطه‌ی هندسی جملات دوم و بیستم کدام است؟

- ۱)  $5\sqrt{3}$
- ۲)  $5\sqrt{7}$
- ۳) ۱۵
- ۴) ۲۱

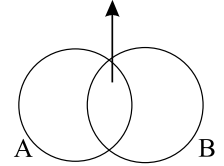


## پاسخنامه تشریحی

$$\begin{cases} A: \text{کفش مشکی} \\ B: \text{کت قهوه‌ای} \end{cases}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow 45 = 30 + 25 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 30 + 25 - 45 = 10$$

۱ - گزینه ۱  
هم کفش مشکی هم کت قهوه‌ای



۲ - گزینه ۳ دنباله‌ی تعداد نقاط عبارتست از:

$$1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots$$

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نکته: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  از رابطه‌ی  $\frac{n(n+1)}{2}$  بدست می‌آید.

طبق نکته‌ی فوق، جمله‌ی  $n$ ام از دنباله‌ی فوق برابر است با:

پس:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 5050 \Rightarrow n(n+1) = 2 \times 5050 = 10100 = \overbrace{100 \times 101}^{\text{دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = 100$$

۳ - گزینه ۱ تعداد کل دایره‌ها در مرحله‌ی  $n$ ام برابر است با  $(n+1)^2$

و از میان این دایره‌ها،  $n+1$  تا رنگ شده است. پس تعداد رنگ نشده‌ها عبارتست از:

$$(n+1)^2 - (n+1)$$

و در مرحله‌ی یازدهم داریم:

$$(11+1)^2 - (11+1) = 144 - 12 = 132$$

۴ - گزینه ۴

جملات دنباله عبارتند از:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, \dots, a_{10} = \frac{-10}{11}$$

و حاصل ضرب آن‌ها:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} \times \dots \times \left(\frac{-10}{11}\right) = -\frac{1}{11}$$

دقت: در این جملات، ۵ جمله‌ی منفی داریم، یعنی ۵ منفی در این حاصل ضرب وجود دارد. پس حاصل منفی است. همچنین، در هر کسر، صورت با مخرج کسر قبل ساده می‌شود و در آخر صورت کسر اول و مخرج کسر آخر باقی می‌ماند.

۵ - گزینه ۱

در یک الگوی خطی، جمله‌ی عمومی بصورت  $a_n = an + b$  است:

$$\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{3}a_{n+1} \Rightarrow 3a_n = 2a_{n+1} \Rightarrow 3(3a + b) = 2(2a + b) \Rightarrow 9a + 3b = 4a + 2b \Rightarrow 5a + b = 0 \quad (I)$$

از طرفی طبق فرض:

$$a_5 = \frac{-1}{2}a_1 + 2 \Rightarrow 5a + b = -\frac{1}{2}(a + b) + 2 \Rightarrow 11a + 3b = 4 \quad (II)$$

معادله‌های  $I$  و  $II$  را در یک دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \times(-3) \quad \begin{cases} 5a + b = 0 \\ 11a + 3b = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -15a - 3b = 0 \\ 11a + 3b = 4 \end{cases} \\ \hline -4a = 4 &\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a_n = -n + 5 \Rightarrow a_{11} = -11 + 5 = -6 \end{aligned}$$

۶ - گزینه ۴ دنباله‌ی حسابی  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$  را در نظر بگیرید:

$$\text{دنباله حسابی} \xrightarrow{\times k} \overbrace{ka_1}^{+kd}, \overbrace{ka_1}^{+kd} + \overbrace{kd}^{+kd}, \overbrace{ka_1}^{+kd} + \overbrace{2kd}^{+kd}, \dots$$

$$\text{دنباله حسابی} \xrightarrow{+k} a_1 + \overbrace{k}^{+d}, a_1 + \overbrace{k}^{+d} + \overbrace{d}^{+d}, a_1 + \overbrace{k}^{+d} + \overbrace{2d}^{+d}, \dots$$

$$\text{دنباله حسابی} \xrightarrow{\div k, k \neq 0} \frac{a_1}{k}, \frac{a_1}{k} + \overbrace{\frac{d}{k}}^{+\frac{d}{k}}, \frac{a_1}{k} + \overbrace{\frac{2d}{k}}^{+\frac{2d}{k}}, \dots$$





غیرحسابی  $( )^r \rightarrow a_1^r, a_1 + 2a_1d + d^r, a_1 + a_1d + 4d^r$  گزینه ۴

۷ - گزینه ۳ جمله عمومی یک دنباله حسابی بصورت  $t_n = t_1 + (n - 1)d$  است:

$$t_7 = 17 \Rightarrow t_1 + 6d = 17 \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = -17 \\ t_1 + 12d = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = -17 \\ t_1 + 12d = 41 \end{cases}$$

$$6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

$$t_1 + 6d = 17 \xrightarrow{d=4} t_1 + 24 = 17 \Rightarrow t_1 = -7$$

و داریم:

$$t_{10} = t_1 + 9d = -7 + 9 \times 4 = -7 + 36 = 29$$

۸ - گزینه ۲ نکته: اگر بین  $a$  و  $b$  به تعداد  $m$  واسطه‌ی حسابی قرار دهیم، قدر نسبت دنباله‌ی حسابی حاصل، از رابطه‌ی  $d = \frac{b-a}{m+1}$  بدست می‌آید. پس:

$$d = \frac{93 - 17}{18 + 1} = \frac{76}{19} = 4$$

پس یک دنباله‌ی حسابی به فرم زیر تشکیل می‌شود:

$$17, 21, 25, \dots, 93 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 17 \\ d = 4 \end{cases}$$

یازدهمین واسطه‌ی حسابی، دوازدهمین جمله‌ی این دنباله است:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \Rightarrow t_{12} = 17 + 11 \times 4 = 61$$

۹ - گزینه ۲

$$a_1 + a_7 + a_9 = 4(a_4 + a_5 + a_6)$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) = 4((a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d))$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 14d = 4(3a_1 + 12d) \Rightarrow 3a_1 + 14d = 12a_1 + 48d$$

$$\Rightarrow 9a_1 + 45d = 0 \xrightarrow{\div 9} a_1 + 5d = 0 \Rightarrow a_6 = 0$$

۱۰ - گزینه ۲

قدر نسبت این دنباله عبارتست از:

$$a = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}$$

در هر دنباله‌ی هندسی، جمله عمومی به فرم  $t_n = t_1 q^{n-1}$  است:

$$t_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$$

آن را برابر با  $\left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1}$  قرار می‌دهیم تا  $n$  بدست آید:

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \times \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1} \Rightarrow \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k^2-1} \Rightarrow 2n - 1 = k^2 - 1 \Rightarrow 2n = k^2 \Rightarrow n = \frac{k^2}{2}$$

۱۱ - گزینه ۲ در یک دنباله‌ی هندسی، جمله عمومی به صورت  $t_n = t_1 q^{n-1}$  است:

$$t_7 = 9 \Rightarrow t_1 q^6 = 9 \Rightarrow \frac{t_1 q^6}{t_1 q^4} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{4}{3}$$

جمله دوازدهم این دنباله، از چهار بار ضرب کردن  $q$  در جمله هشتم بدست می‌آید:

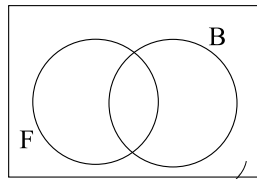
$$t_{12} = t_8 \times q^4 = 12 \times \frac{4}{3} = 16$$

۱۲ - گزینه ۱ جمله هشتم دنباله  $1, 3, \dots$  عبارت است از:

$$t_8 = t_1 + 7d = -1 + 7 \times 4 = 27$$

حال بیینیم جمله چندم از دنباله هندسی  $a_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$  برابر با ۲۷ است:

$$27 = \frac{1}{3} \times 9^{n-1} \Rightarrow 81 = 9^{n-1} \Rightarrow 9^2 = 9^{n-1} \Rightarrow 2 = n - 1 \Rightarrow n = 3$$



$A$ : فوتبال       $B$ : بسکتبال  
 $n(A) = 11$        $n(B) = 15$   
 $n(A \cup B) = 20 = 25 - 5 = 20$

۵ نفر: عضو هیچ تیم

از طرفی:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 20 = 15 + 11 - n(A \cap B)$   
 تعداد اعضای هر دو تیم

$\Rightarrow n(A \cap B) = 15 + 11 - 20 = 6$

۱۴ - گزینه ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱)  $A$  و  $A'$  هیچ عضو مشترکی ندارند. پس دو مجموعه جدا از هم هستند. (درست)

۲) اگر  $A$  و  $B$  جدا از هم باشند، اشتراک آنها هیچ عضوی ندارد و رابطه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه برابر خواهد بود با:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  (درست)

۳) اجتماع هر مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است. بنابراین  $A \cup B$  نامتناهی است. (نادرست)

۴)  $Q$  و  $Q'$  هر دو نامتناهی‌اند. (درست)

۱۵ - گزینه ۲ دنباله‌ی تعداد پاره‌خط‌های هر مرحله را می‌نویسیم.  $6, 11, 16, \dots$

این یک الگوی خطی (دنباله حسابی) با قدر نسبت ۵ است و می‌دانیم که جمله عمومی دنباله حسابی عبارتست از:

$t_n = 5n + b$  یعنی  $t_n = an + b$

برای محاسبه  $b$  جمله اول را در  $t_n$  قرار می‌دهیم:  $t_1 = 5 \times 1 + b = 6$

$\Rightarrow b = 6 - 5 = 1 \Rightarrow t_n = 5n + 1$

و مرحله‌ی دهم عبارتست از:

$t_{10} = 5 \times 10 + 1 = 51$

۱۶ - گزینه ۲ جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی بصورت  $c_n = an + b$  است:

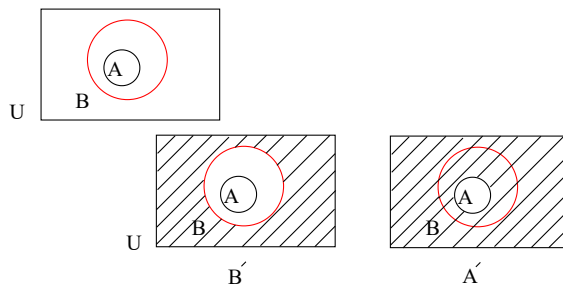
$$\begin{cases} c_7 = 17 \Rightarrow 7a + b = 17 \\ c_{10} = 41 \Rightarrow 10a + b = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - b = -17 \\ 10a + b = 41 \end{cases}$$

$$6a = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_n = 4n + 1$

۱۷ - گزینه ۱

$A \subseteq B \subseteq U$  را روی نمودار ون ببینید:



نمودار  $A'$  و  $B'$  عبارتست از:

$B' \subseteq A'$  همی  $A'$  را در بر گرفته است. پس

۱۸ - گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱)  $Z - R = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{\dots\} = \emptyset$  همه اعداد -
- ۲)  $W - N = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$  با بقیه متفاوت است
- ۳)  $Q' \cap Q = \emptyset$  اعداد گویا  $\cap$  اعداد گنگ
- ۴)  $Q' - R = \emptyset$  همه اعداد - اعداد گنگ

۱۹ - گزینه ۳ اگر دنباله‌ی  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  حسابی باشد (مطابق اشاره سوال)، تفاضل جمله دوم و اول، قدر نسبت آن را تشکیل خواهد داد:

$d = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$

می‌دانیم جمله عمومی دنباله حسابی بصورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است؛ مقادیر  $d = \frac{-1}{6}$  و  $t_1 = \frac{1}{2}$  را در آن قرار می‌دهیم:



$$t_n = \frac{1}{2} + (n-1)\left(-\frac{1}{6}\right)$$

و جمله بیستم عبارتست از:

$$t_{20} = \frac{1}{2} + (20-1)\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{19}{6} = \frac{3-19}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$1) 2a_n - a_{2n} = 2(a_1 + (n-1)d) - (a_1 + (2n-1)d)$$

$$= 2a_1 + 2nd - 2d - a_1 - 2nd + d = a_1 - d \neq a_p \quad \text{نادرست}$$

$$2) a_{n+1} - a_{n-1} = (a_1 + nd) - (a_1 + (n-2)d)$$

$$= a_1 + nd - a_1 - nd + 2d = 2d \neq a_p \quad \text{نادرست}$$

$$3) 3a_{2n+1} - 2a_{2n} = 3(a_1 + 2nd) - 2(a_1 + (2n-1)d)$$

$$= 3a_1 + 6nd - 2a_1 - 4nd + 2d = a_1 + 2d = a_p \quad \text{درست}$$

$$4) a_{2n+1} - a_{2n-1} = (a_1 + 2nd) - (a_1 + (2n-2)d)$$

$$= a_1 + 2nd - a_1 - 2nd + 2d = 2d \neq a_p \quad \text{نادرست}$$

۲۱ - گزینه ۴ در هر دنباله‌ی حسابی و در سه جمله‌ی متوالی، جمله‌ی وسط میانگین جملات طرفین است:

$$x, y, z \Rightarrow y = \frac{x+z}{2} \Rightarrow x+z = 2y$$

$$\text{فرض: } x+y+z = -10 \Rightarrow 2y+y = -10 \Rightarrow 3y = -10 \Rightarrow y = \frac{-10}{3}$$

$$\xrightarrow{x+z=2y} x+z = 2 \times \left(\frac{-10}{3}\right) = \frac{-20}{3}$$

$$\text{حکم: } yx + zy = (x+z) \times y = \frac{-20}{3} \times \frac{-10}{3} = \frac{200}{9}$$

۲۲ - گزینه ۲ واسطه‌ی حسابی یعنی عددی که بین دو عدد  $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  و  $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$  قرار گیرد و با آنها یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهد؛ و می‌دانیم که در هر دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی وسط میانگین جملات طرفین خود است:

$$\text{واسطه‌ی حسابی } x = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1-2\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+1-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-4}{2(1+\sqrt{2})}}{2} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۲۳ - گزینه ۲

۱۰, ۱۶, ۳۴, ۴۰, ...

دنباله‌ی تعداد چوب کبریت‌ها عبارتست از:

در این دنباله، الگو را نمی‌توان مشخص کرد جز آنکه جملات فرد و زوج را تفکیک کنیم:

$$\begin{matrix} +24 & +24 \\ 10 \rightarrow 34, & \rightarrow 58, \dots & t_n = 10 + (n-1) \times 24 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} +24 & +24 \\ 16 \rightarrow 40, & \rightarrow 64, \dots & t_n = 16 + (n-1) \times 24 \end{matrix}$$

مرحله‌ی یازدهم، ششمین جمله از فردها است:

$$t_6 = 10 + (6-1) \times 24 = 10 + 5 \times 24 = 130$$

۲۴ - گزینه ۴ به گزینه‌ها توجه کنید:

۱) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم هیچ اشتراکی نداشته باشند؛ یعنی اشتراک آن‌ها تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

۲) دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌توانند با هم برابر باشند و تفاضلشان تهی باشد که متناهی است. (نادرست)

۳) اگر  $A$  تهی باشد،  $A$  زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. یعنی  $B$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

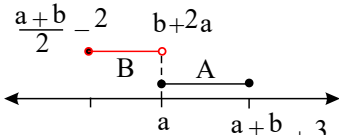
۴) اگر  $A \subseteq B$ ، آنگاه  $A \cap B = A$  خواهد بود. طبق متن گزینه‌ی  $A$  نامتناهی است و  $B$  مجموعه‌ای است که آن را در بر گرفته است؛ پس  $B$  الزاماً نامتناهی است.

۲۵ - گزینه ۲ برای آنکه اجتماع دو بازه، یک بازه بسته باشد، باید روی محور چنین آرایشی را ببینیم:



(دقت کنید که  $\frac{a+b}{2} - 2 < \frac{a+b}{2} + 3$  است. پس بازه  $B$  باید قبل از بازه  $A$  قرار گیرد)

داریم:



$$b + 2a = a \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = [a, 3] \\ B = [-2, a] \end{cases} \Rightarrow A \cup B = [-2, 3]$$

$$\xrightarrow{\text{متم}} (A \cup B)' = R - (A \cup B) = R - [-2, 3]$$

پس اعداد  $3, 2, 1, 0, -1, -2$  در آن وجود ندارد.

۲۶ - گزینه ۳

گزینه ۱) اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای، متناهی است.

گزینه ۲) اجتماع یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد:

گزینه ۳)

گزینه ۴)

$$\underbrace{A \cap (B - C)}_{\text{متناهی}} = \text{متناهی}$$

$$\underbrace{A \cup (B - C)}_{\text{متناهی}} = \text{نامشخص}$$

$$\underbrace{B - (A \cap B)}_{\text{نامتناهی}} = \text{نامتناهی}$$

$$\underbrace{(A \cup C) \cap (B \cup C)}_{\text{نامشخص}} = \text{نامشخص}$$

۲۷ - گزینه ۱

$$\begin{cases} a_r = a_1 + 7 \Rightarrow a_1 q = a_1 + 7 \Rightarrow a_1 q - a_1 = 7 \Rightarrow a_1 (q - 1) = 7 \\ a_r = a_1 + 63 \Rightarrow a_1 q^r = a_1 q^2 + 63 \Rightarrow a_1 q^3 - a_1 q^2 = 63 \Rightarrow a_1 q^2 (q - 1) = 63 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a_1 (q - 1)}{a_1 q^2 (q - 1)} = \frac{7}{63} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow q^2 = 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \begin{cases} q = 3 \\ q = -3 \end{cases}$$

اما چون جملات دنباله مثبت هستند،  $q = 3$  را می‌پذیریم.

۲۸ - گزینه ۳ در دنباله‌ی حسابی  $1, 7, \dots, 2x + 1, 4, 3x - 4$ ، جمله‌ی وسط میانگین جملات طرفین خود است؛ یعنی:

$$2x + 1 = \frac{(3x - 4) + 7}{2} \Rightarrow 4x + 2 = 3x + 3 \Rightarrow x = 1$$

پس جملات دنباله عبارتند از:

$$3 \times 1 - 4, 2 \times 1 + 1, 7, \dots \Rightarrow -1, 3, 7, \dots$$

و این یعنی جمله‌ی اول  $t_1 = -1$  و قدر نسبت  $d = 4$  است. جمله‌ی بیستم این دنباله چنین محاسبه می‌شود:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \Rightarrow t_{20} = t_1 + 19d = (-1) + 19 \times 4 = -1 + 76 = 75$$

واسطه‌ی هندسی بین  $t_1 = 3$  و  $t_{20} = 75$  عبارتست از:

$$\sqrt{3 \times 75} = \sqrt{3 \times 3 \times 5^2} = 3 \times 5 = 15$$

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۵ - ۱

۹ - ۲

۱۳ - ۳

۱۷ - ۱

۲۱ - ۴

۲۵ - ۲

۲ - ۳

۶ - ۴

۱۰ - ۲

۱۴ - ۳

۱۸ - ۲

۲۲ - ۲

۲۶ - ۳

۳ - ۱

۷ - ۳

۱۱ - ۲

۱۵ - ۲

۱۹ - ۳

۲۳ - ۲

۲۷ - ۱

۴ - ۴

۸ - ۲

۱۲ - ۱

۱۶ - ۲

۲۰ - ۳

۲۴ - ۴

۲۸ - ۳