

امتحان نهایی حسابان ۲

خرداد ۱۴۰۰

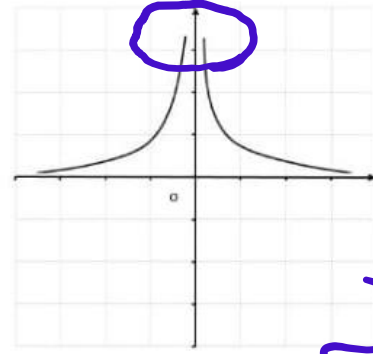
علی هاشمی

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۱

الف) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، می گوئیم.
ب) برد تابع تانژانت ($y = \tan x$) برابر است.

مثلاً



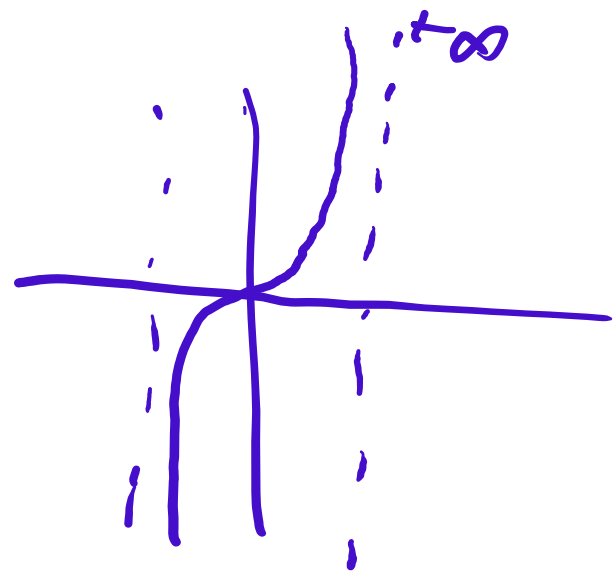
+∞

پ) با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x=0$ برابر است با

نویسه

ت) اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a است.

-∞



-∞

۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) اگر تابع f در هر نقطه اکسترمم نسبی مشتق پذیر باشد، آنگاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می شود.</p> <p>ب) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.</p> <p>پ) اگر علامت f' بر بازه ای منفی باشد، آنگاه تابع f بر آن بازه اکیدا نزولی است.</p> <p>ت) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می کند.</p>	۲
---	---	---

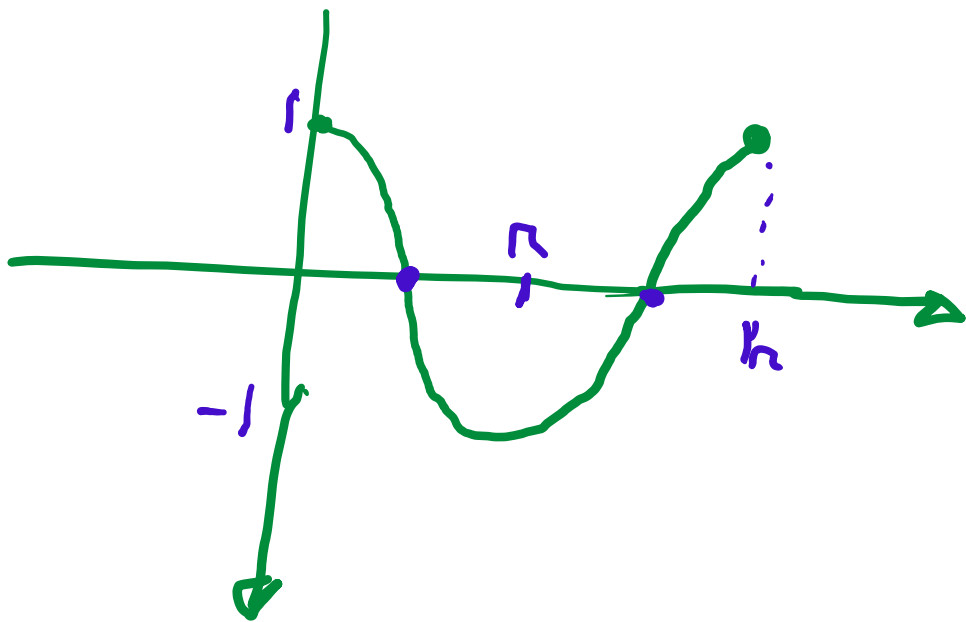
ب) نادرست

الف) درست

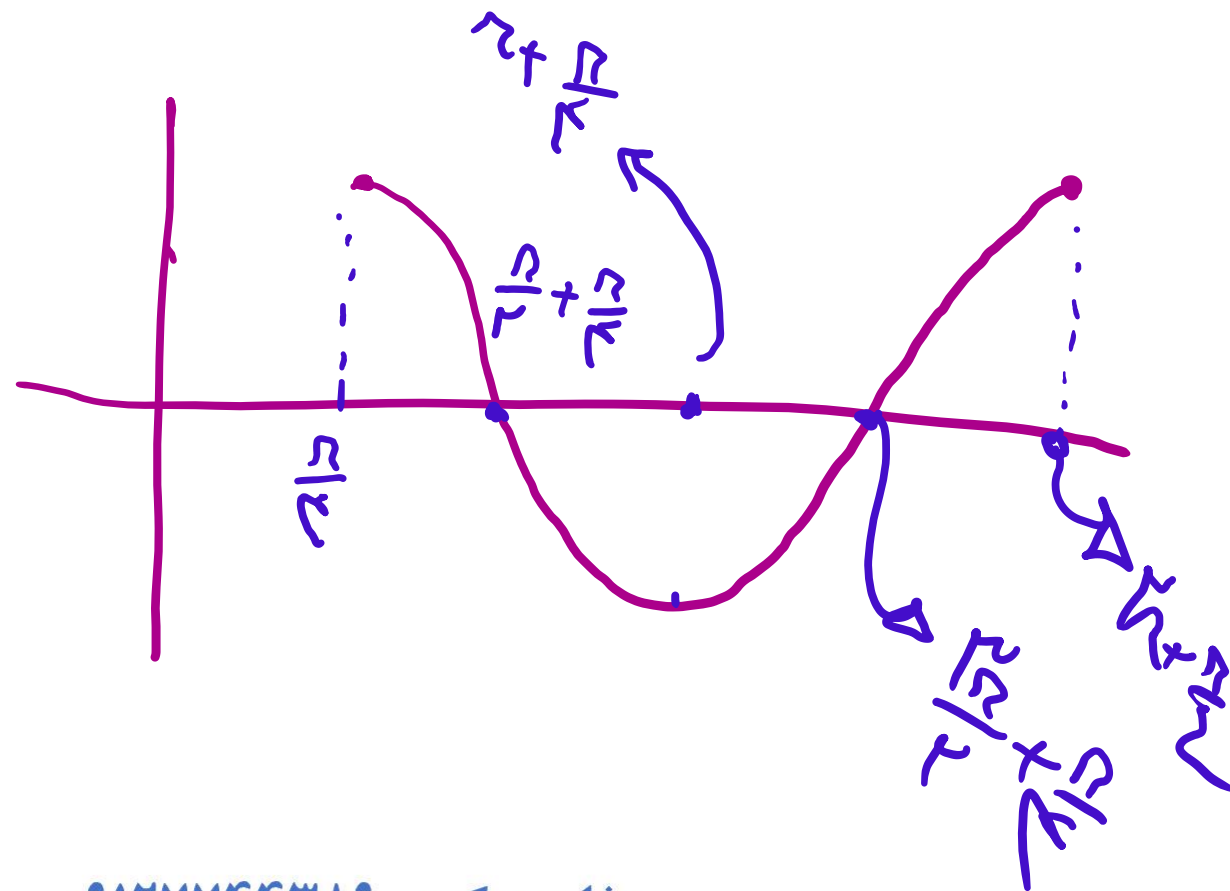
ت) درست

د) درست

نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

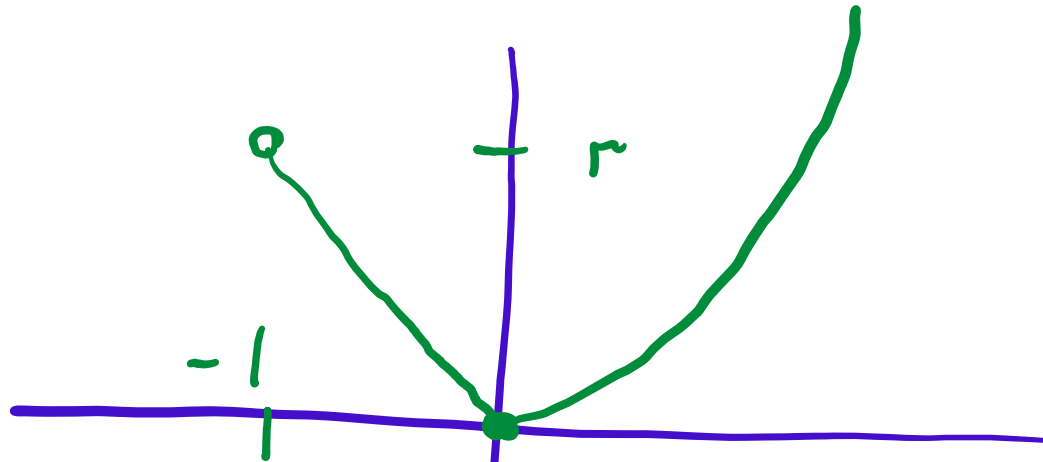


سایت علی جبرا
Algebra.com



مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع درجه بازه ای اکیدا صعودی و درجه بازه ای اکیدا نزولی می باشد.



اکیدا صعودی $[0, +\infty)$

اکیدا نزولی $(-1, 0]$

باقیمانده تقسیم عبارت های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان می باشد. مقدار a را بیابید.

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$P(-2) = -8 - 2a + 1 = -2a - 7$$

$$q(-2) = 8 + 4 + 1 = 13$$

$$-2a - 7 = 13 \rightarrow -2a = 20 \rightarrow a = -10$$

$$y = a \sin bx + c$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 3 \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} a + c = 5 \\ -a + c = 3 \end{cases}$$

$$y = 1 \sin \frac{2\pi}{3} x + 4$$

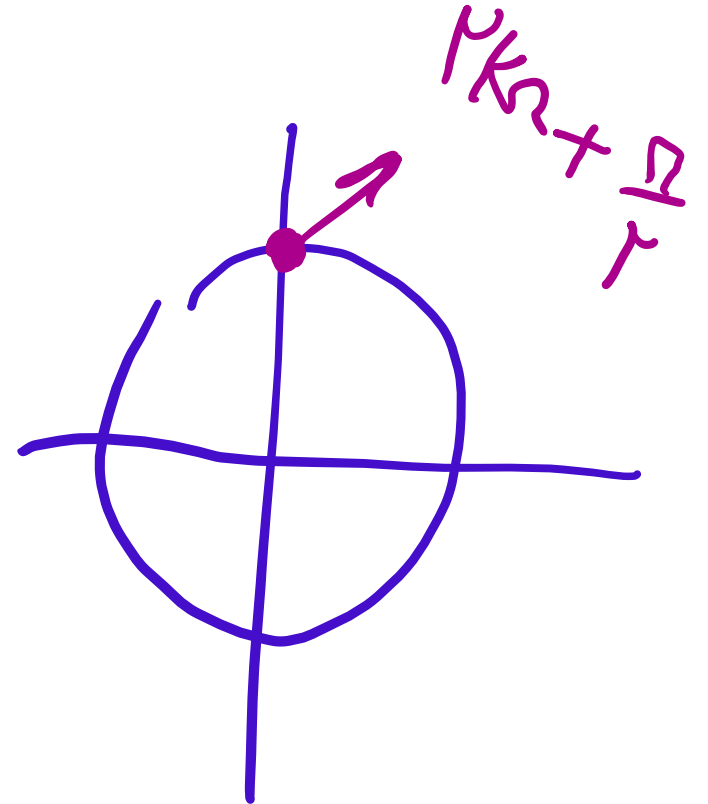
$$c = 1 \rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$y = 1 \sin \left(\frac{2\pi}{3} x \right) + 4$$

$$1 - 2 \sin^2 x = \sin x - 1 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{-1}{2} \quad \times$$



$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{|x-2|}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 2}$$

الف)

$$\frac{3}{0^+} = +\infty$$

ب)

$$\frac{3 + 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید.

$$س: \quad x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$افقی: \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \rightarrow y = -2$$

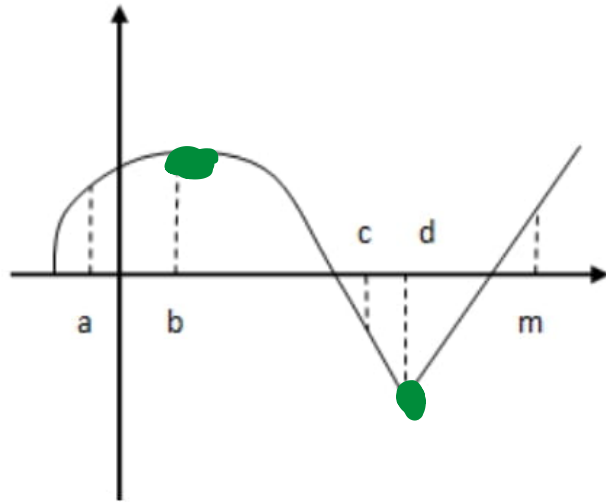
معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در نقطه $A(1, f(1))$ به دست آورید.

$$x_0 = 1 \quad / \quad y_0 = -1 \quad / \quad m = 1$$

$$y' = 3x^2 - 2 \xrightarrow{x=1} m = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y + 1 = x - 1 \rightarrow y = x - 2$$

با توجه به نمودار f به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) طول نقطه ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

ب) طول نقطه "گوشه ای" را بنویسید.

پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.

b) است

d) -

c) است

جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می آید. مطلوب است:

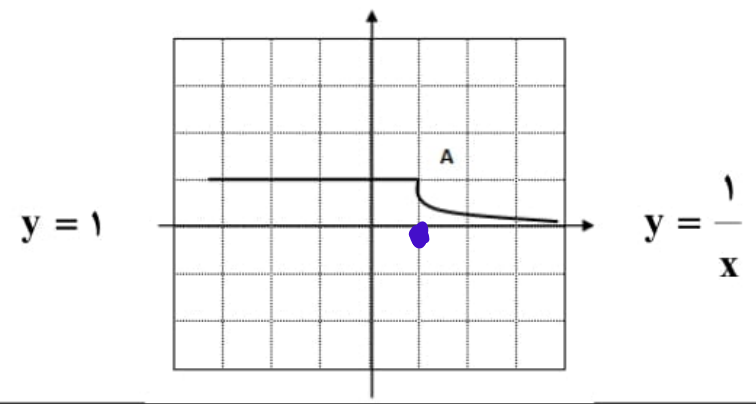
(ب) سرعت لحظه ای در زمان $t = 3$

(الف) سرعت متوسط در بازه $[1, 2]$

$$\text{الف) سرعت متوسط} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = (-20 + 80) - (-5 + 40) = 25$$

$$\text{ب) } h'(t) = -10t + 40 \xrightarrow{t=3} h'(3) = 10$$

با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم شده مقابل ؛
 مشتق پذیری تابع را در نقطه $A(1, 1)$ بررسی کنید.



مشتق نپذیرد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ \frac{1}{x} & x < 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x > 1 \\ \frac{1}{x^2} & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = -1 \neq f'_-(1) = 0$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۲/۵

الف) $f(x) = (\sqrt{3x} + 1)(2x^2 - 1)$

ب) $g(x) = 3 \tan^2 x + \cos x^2$

پ) $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{5x}$

الف) $\frac{3}{2\sqrt{3x}} (2x^2 - 1) + 4x^2 (\sqrt{3x} + 1)$

ب) $6 \tan' x (1 + \tan' x) - 2x \sin x^2$

د) $\frac{(2x-3)(5x) - 5(x^2-3x)}{(5x)^2}$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 & \checkmark \\ x=2 & \times \end{cases}$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \Delta \text{ max}$$

$$f(-1) = -1 \rightarrow \Delta \text{ min}$$

$$f(1) = -1$$

$$f(-1) \rightarrow -1 + a - b - 1 = 1 \rightarrow a - b = 3$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow y'' = 6x + 2a$$

$$y''(-1) = 0 \rightarrow -6 + 2a = 0 \rightarrow a = 3$$

$$a - b = 3 \rightarrow b = a$$

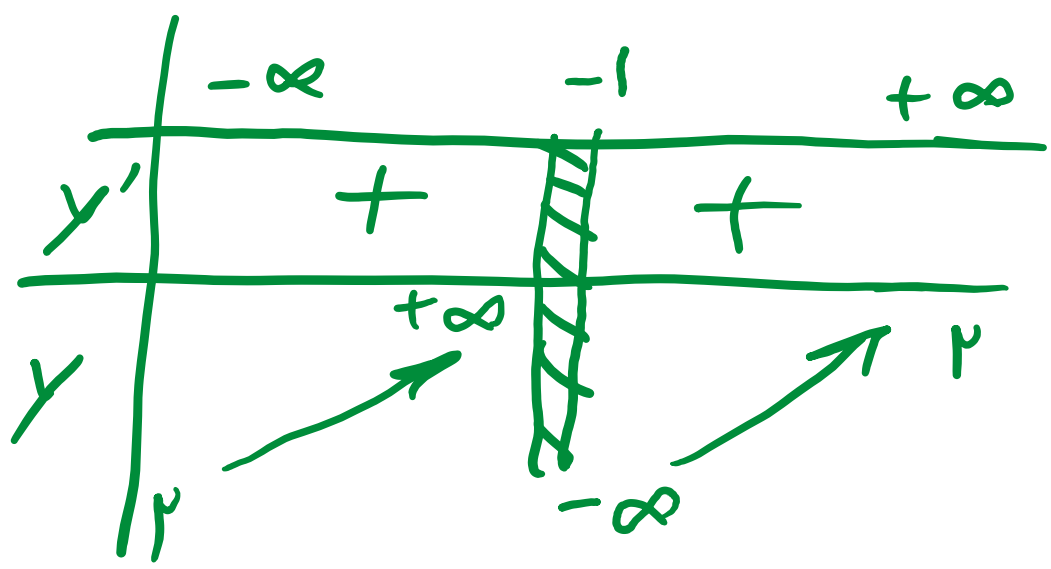
جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.

۲/۵

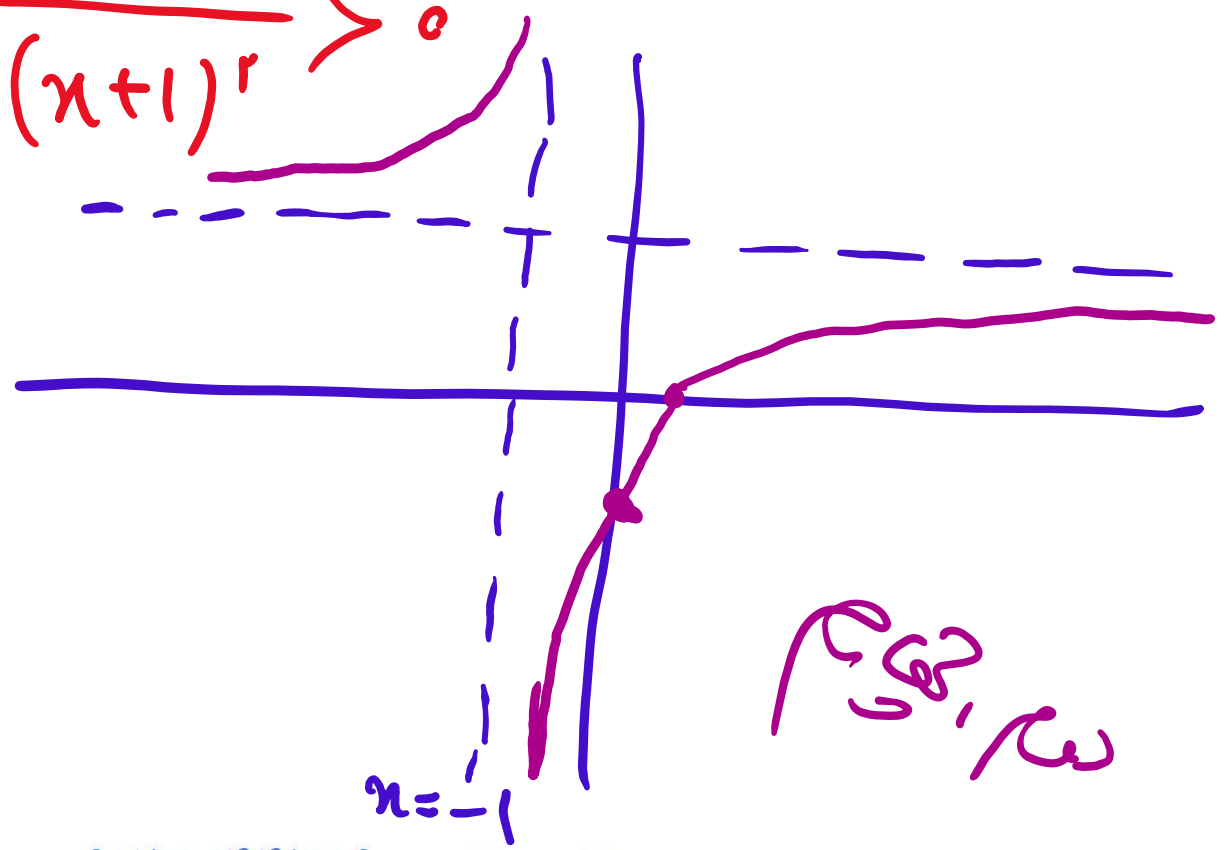
$$\begin{array}{l} 0 \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}$$

محدب: $x = -1$
 مقعر: $y = 2$

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$



$y = 2$



رسم نمودار

سایت علی جبرا
Algebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱