

امتحان نهایی حسابان ۲

خرداد ۹۹

علی هاشمی

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

درستی
غلط

الف) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $[0, 1]$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

ب) اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیدا صعودی نیز خواهد بود.

درستی
غلط

پ) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد آنگاه f در a مشتق پذیر هم نیست.

ت) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$

$$f(x) = (x-2)^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2(x-2)$$

در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

الف) دوره تناوب تابع $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر با است.

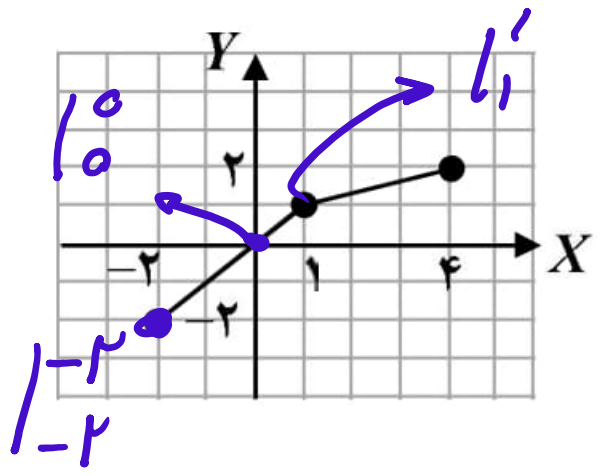
ب) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ ، در این صورت $(3f + 2g)'(1)$ برابر با است.

$$\text{الف) } T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

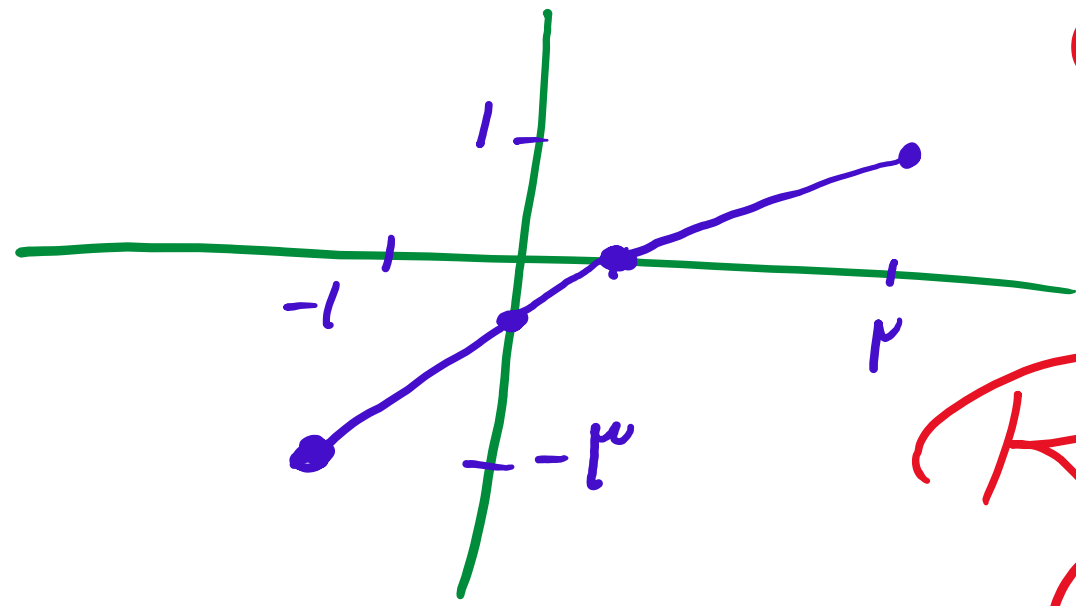
$$\text{ب) } 3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$$

با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است،

نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

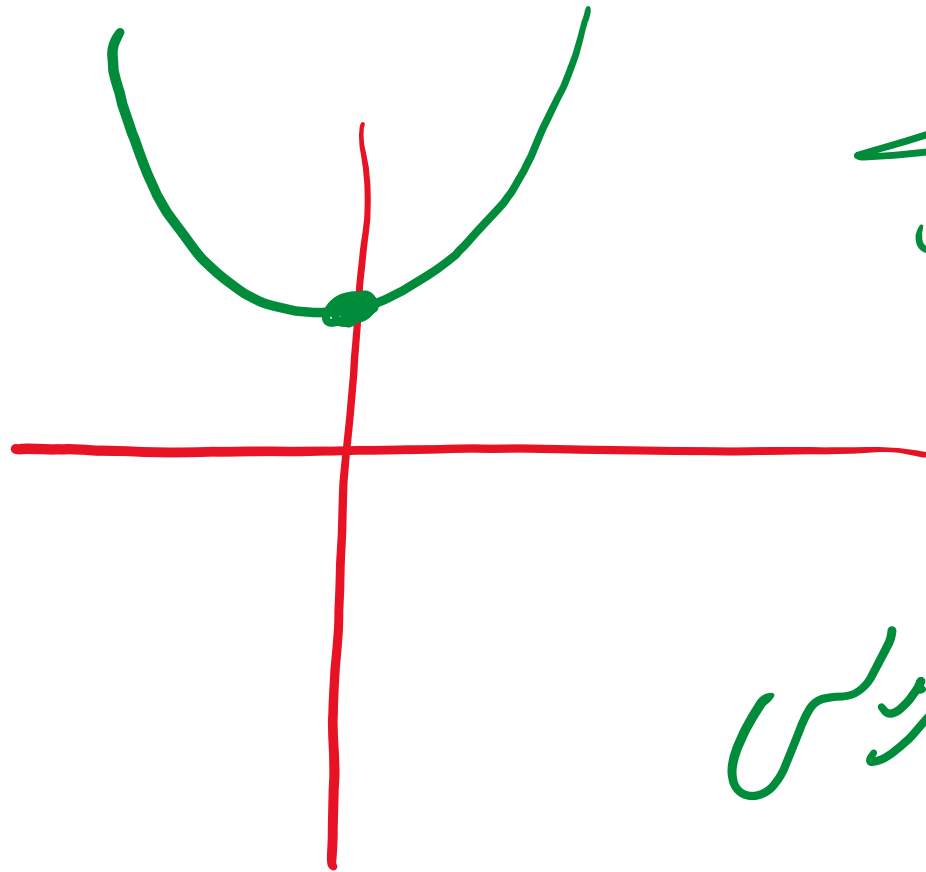


$$D_g = [-1, 2]$$



$$R_g = [-3, 1]$$

نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است؟



↑
رشد صعودی $(0, +\infty)$

↓
رشد نزولی $(-\infty, 0)$

مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که چند جمله ای $x^2 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow 1 + 2a + 2b + 1 = 0 \rightarrow 2a + 2b = -2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \rightarrow a = b$$

$$a = b \rightarrow 2a + 2a = -2 \rightarrow a = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

عقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 + 2 \sin \sqrt{x}$ را به دست آورید.

$$y_{max} = 1 + 2(1) = 3$$

$$y_{min} = 1 + 2(-1) = -1$$

$$\sin \mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\mu x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{\mu} + \frac{\pi}{4}$$

$$\mu x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{\mu} + \frac{3\pi}{4}$$

الف) $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{x^2 + x}{x^2} = \frac{0}{0}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$

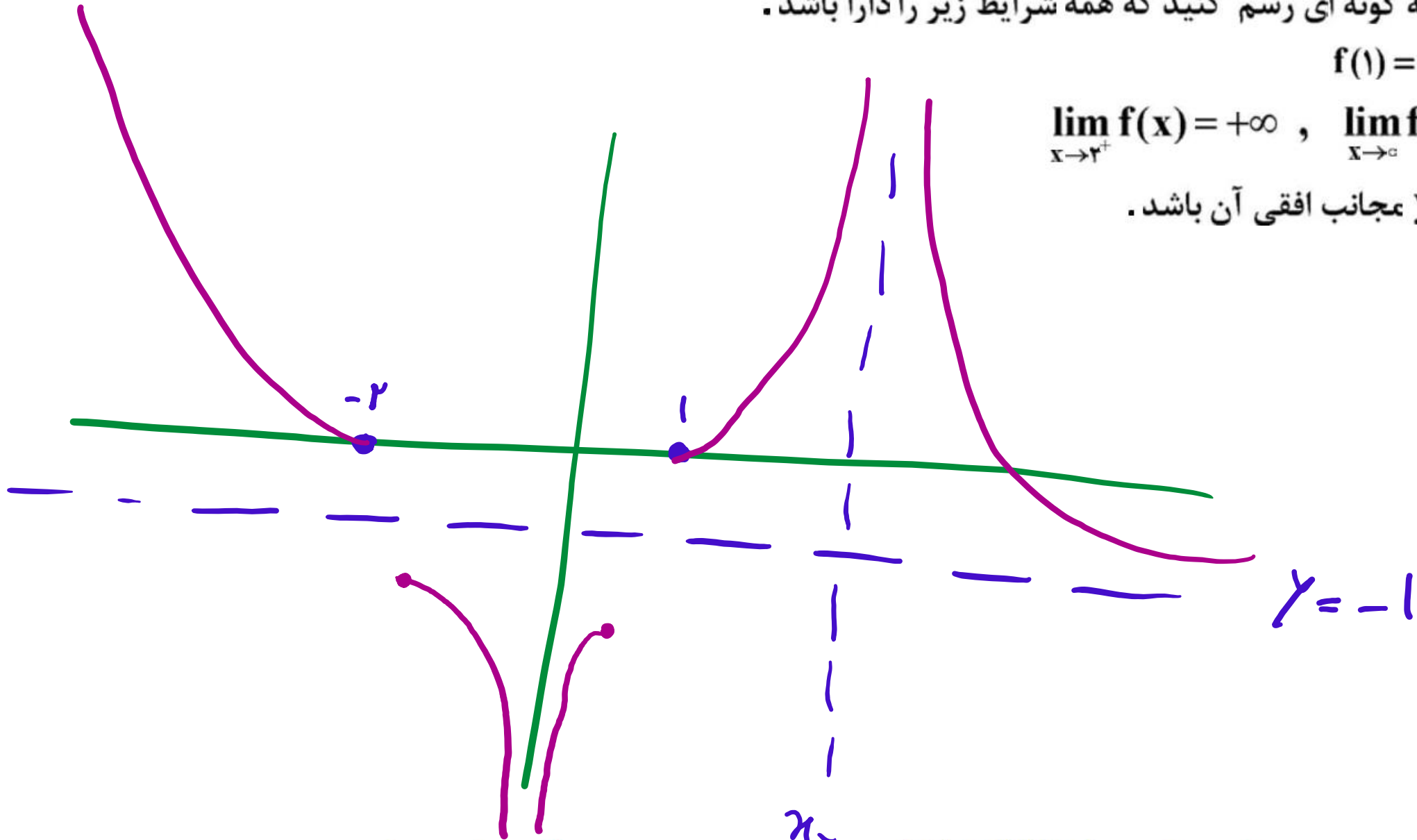
ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x} = 0$

نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد.

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.



معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید. | ۱۰

$$x_0 = 2 \quad / \quad y_0 = 16 \quad / \quad m = 9$$

$$y' = -2x + 10 \quad \xrightarrow{x=2} \quad y' = -2 + 10 = 9 \quad \rightarrow \quad m = 9$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - 16 = 9(x - 2)$$

$$y - 16 = 9x - 18 \quad \rightarrow \quad y = 9x + 2$$

الف) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(6x^2+5) + (6x) \cdot \sqrt{x}$$

$$h'(x) = 2\sin x \cos x - 2\cos x \sin x$$

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ داده شده است. در کدام لحظه در این بازه، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط با هم برابرند؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (10)}{5 - 0} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{لحظه} \quad f'(t) = 2t - 1 \rightarrow 2t - 1 = 2 \rightarrow 2t = 3$$

$$\rightarrow t = \frac{3}{2}$$

مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$\text{مکانب قائم: } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{مکانب افقی: } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow y = 0$$

مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

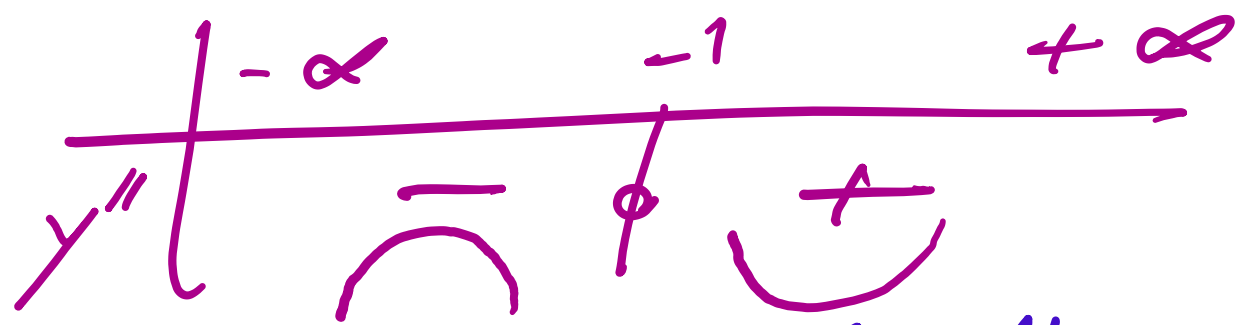
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2$$

$$f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را مشخص کنید.

$$y' = 3x^2 + 6x \quad \rightarrow \quad y'' = 6x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$



$(-\infty, -1)$ تقعر رو به بالا

$(-1, +\infty)$ تقعر رو به پایین

نقطه عطف

$$x = -1$$

جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ را رسم کنید.

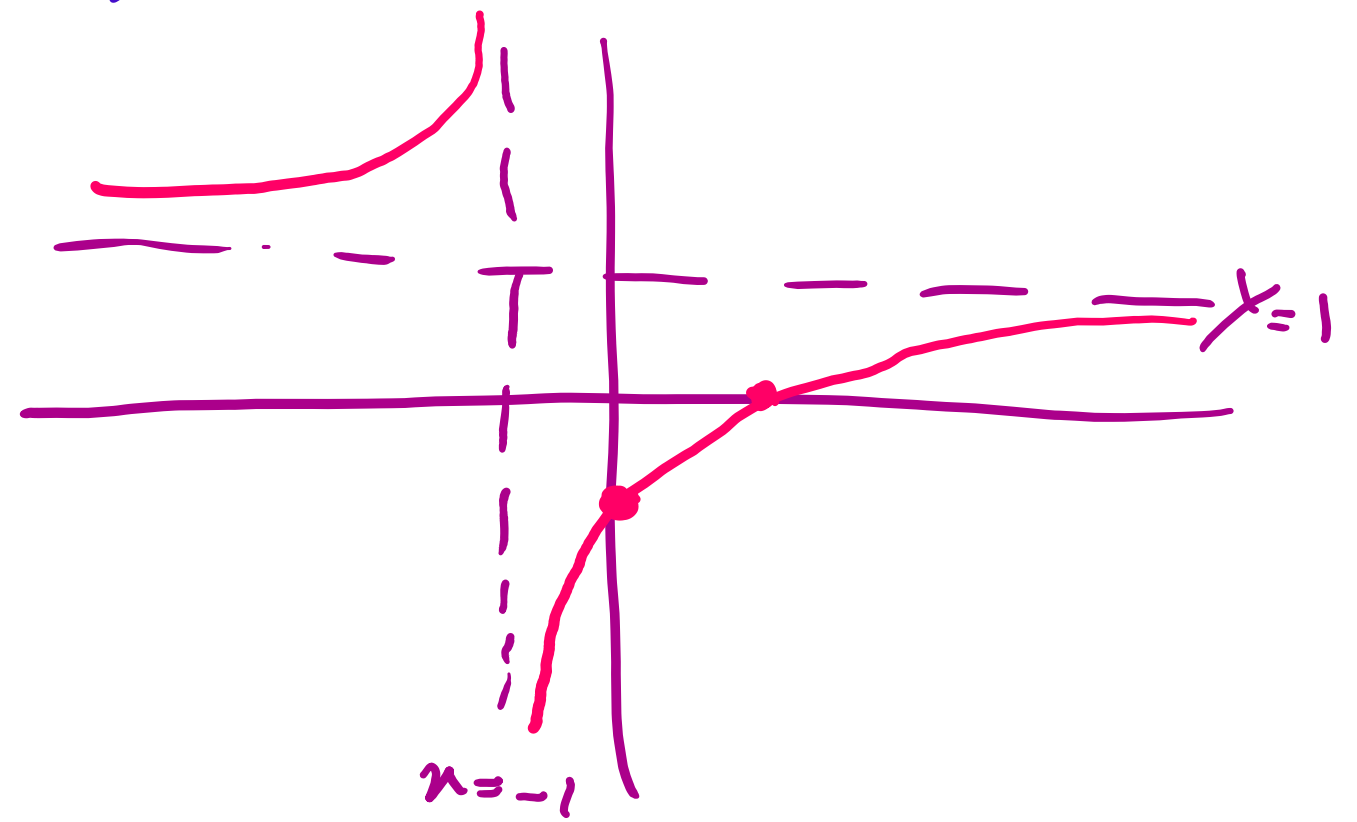
$x = -1$
 $y = 1$ افقی

$$f'(x) = \frac{1 - (-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

$$\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	1		1

Diagram showing asymptotes at $x = -1$ and $y = 1$ with arrows indicating the direction of the curve in each region.



مجموعه کامل ویدیوهای آموزشی در

سایت علی جبرا

ALIGEBRA.COM



Freemath



Alihashemi_math