

امتحان نهایی حسابان ۲

خرداد ۹۸

علی هاشمی

درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید.

نکته

الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید.

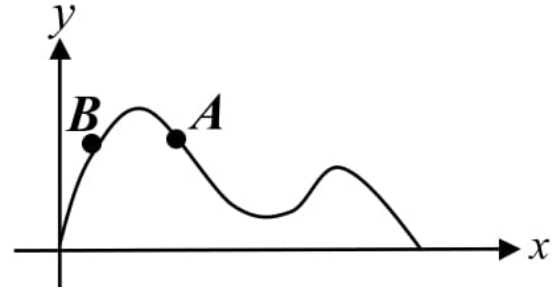
درست

ب) نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ در دامنه تابع تانژانت قرار ندارند.

درست

پ) حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$ برابر با $-\infty$ است.

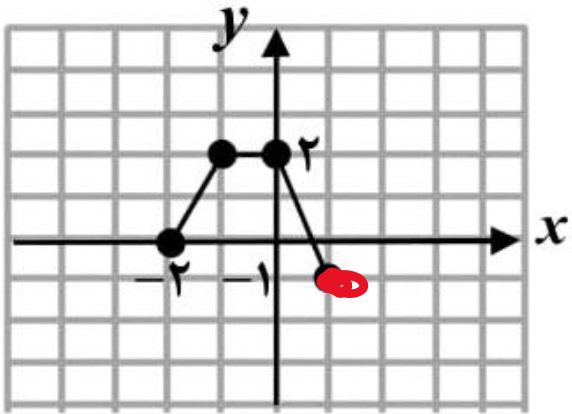
نکته



ت) در شکل رو به رو، شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است.

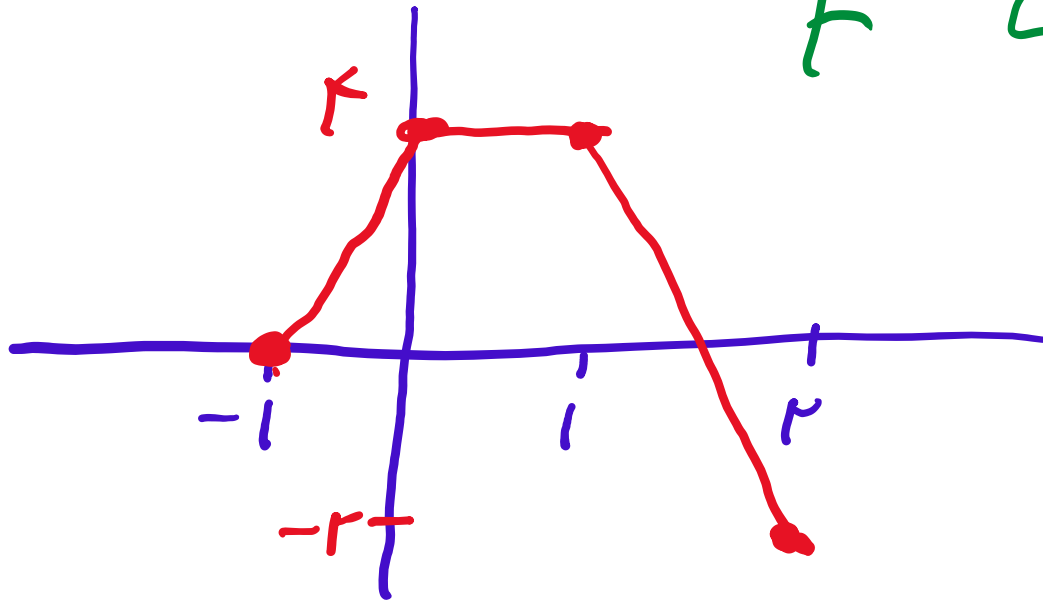
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



$$D_g = [-1, 2]$$

$$R_f = [-2, 2]$$



اگر چند جمله ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x+1)$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به دست آورید.

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow 1-a-3=0 \rightarrow a=-2$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow f(2) = 2^2 - 2 - 3 = -3$$

چند جمله ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل $(x + 1)$ تجزیه کنید.

$$\begin{array}{r} x^6 - 1 \\ \underline{x^6 + x^5} \\ -x^5 - 1 \\ \underline{-x^5 - x^4} \\ x^4 - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ \hline x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \end{array}$$

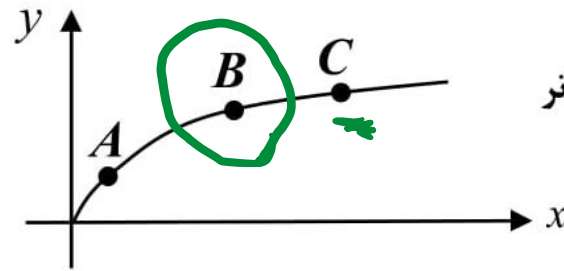
$$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

$$T = \frac{2\pi}{|\frac{B}{A}|} = 1$$

الف) دوره تناوب تابع $y = 3 \cos(-\frac{\pi}{4} x)$ برابر با است.

ب) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 2}$ برابر با است.



پ) با توجه به شکل رو به رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه بزرگ تر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است.

A

ت) نقطه ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است، نقطه نام دارد.

عکری

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos(2\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

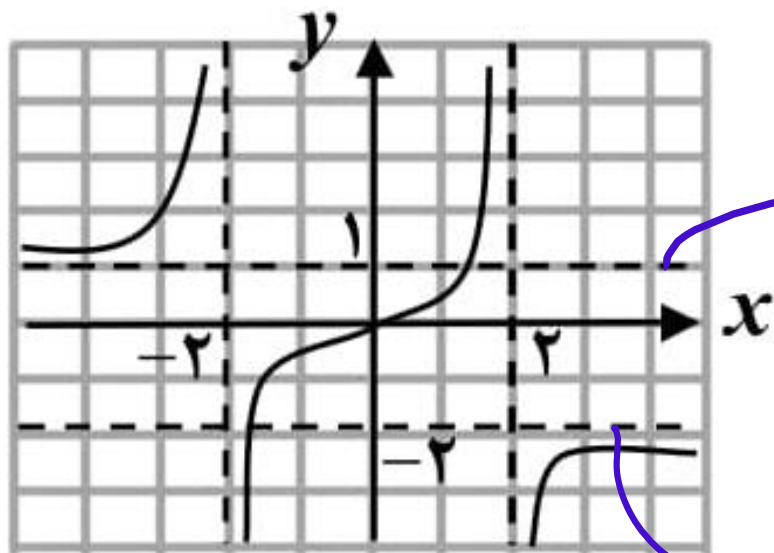
$$\cos x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می باشد؟ دلیل ارائه کنید.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x+1}$$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$ مجانب قائم

با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است، مجانب های افقی تابع را بنویسید.



$$y = 1$$

$$y = -2$$

نشان دهید نقطه ای به طول $x = -1$ ، نقطه گوشه ای برای تابع $f(x) = |x^2 + x|$ می باشد.

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x^2 + x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x(x+1)}{x+1} = 1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x^2 + x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = -1$$

$$f'_+(1) = 1 \neq f'_-(1) = -1$$

$x = -1$ گوشه!

قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه تابع f در $x = a$ پیوسته است.

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{(x-a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{\underbrace{x-a}}$$

$$= \underbrace{0} \times \underbrace{f'(a)} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۱

$$\text{الف) } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x + 1}$$

$$\text{ب) } g(x) = \cos^3(2x)$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^3 + 2x + 1) - (3x^2 - 2)(x^3 - 1)}{(x^3 + 2x + 1)^2}$$

$$g'(x) = 3\cos^2(2x) \cdot [-2\sin(2x)]$$

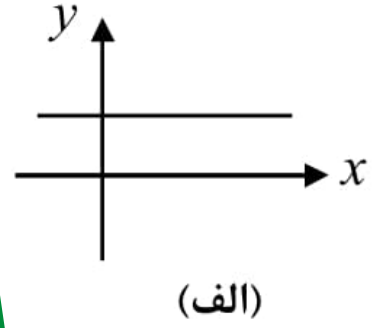
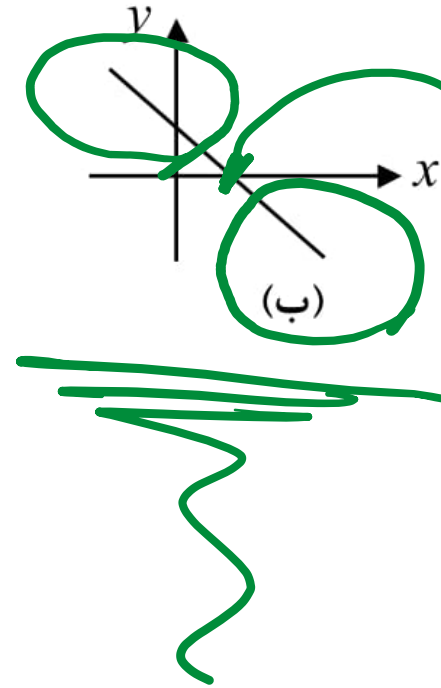
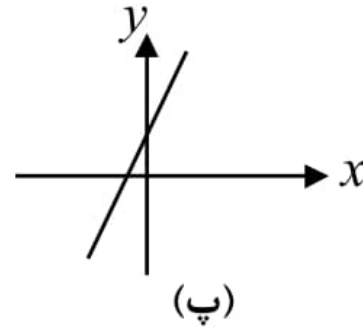
نمودار تابع f در شکل رو به رو آمده است.

با بیان دلیل، مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است.

تقریباً $f' < 0$

تقریباً $f' > 0$

$f'(a) = 0 \rightarrow a > 0$



$f'(a) = 0$

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 - 2x$ را در بازه $[0, 2]$ و آهنگ تغییر لحظه ای تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنید.

$$\text{متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{لحظه ای} \quad f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow f'(1) = 1$$

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ را در بازه $[0, 2]$ تعیین کنید.

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f(0) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(2) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(1) = \sqrt{3}$$

$$y_{\max} = 2$$

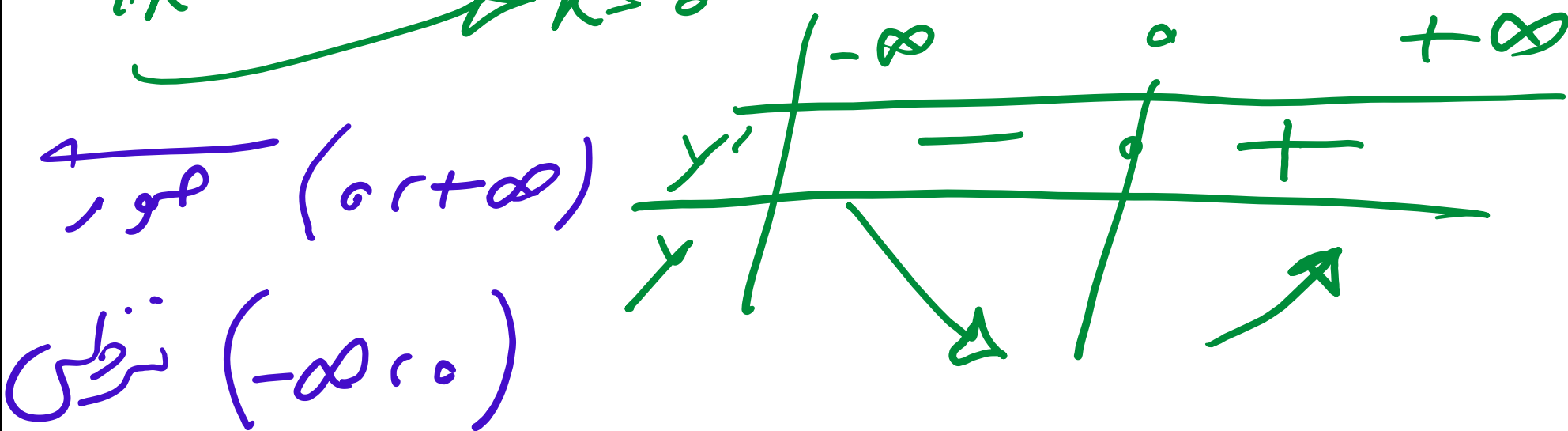
$$y_{\min} = \sqrt{3}$$

تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است.

$$y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow \frac{2x(x^2 + 1 - x)}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$\Delta < 0$

$$2x = 0 \rightarrow x = 0$$



مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ چنان بیابید که $A(1,1)$ نقطه عطف منحنی باشد.

$$f(1) \rightarrow a + b - 1 = 1 \rightarrow a + b = 2$$

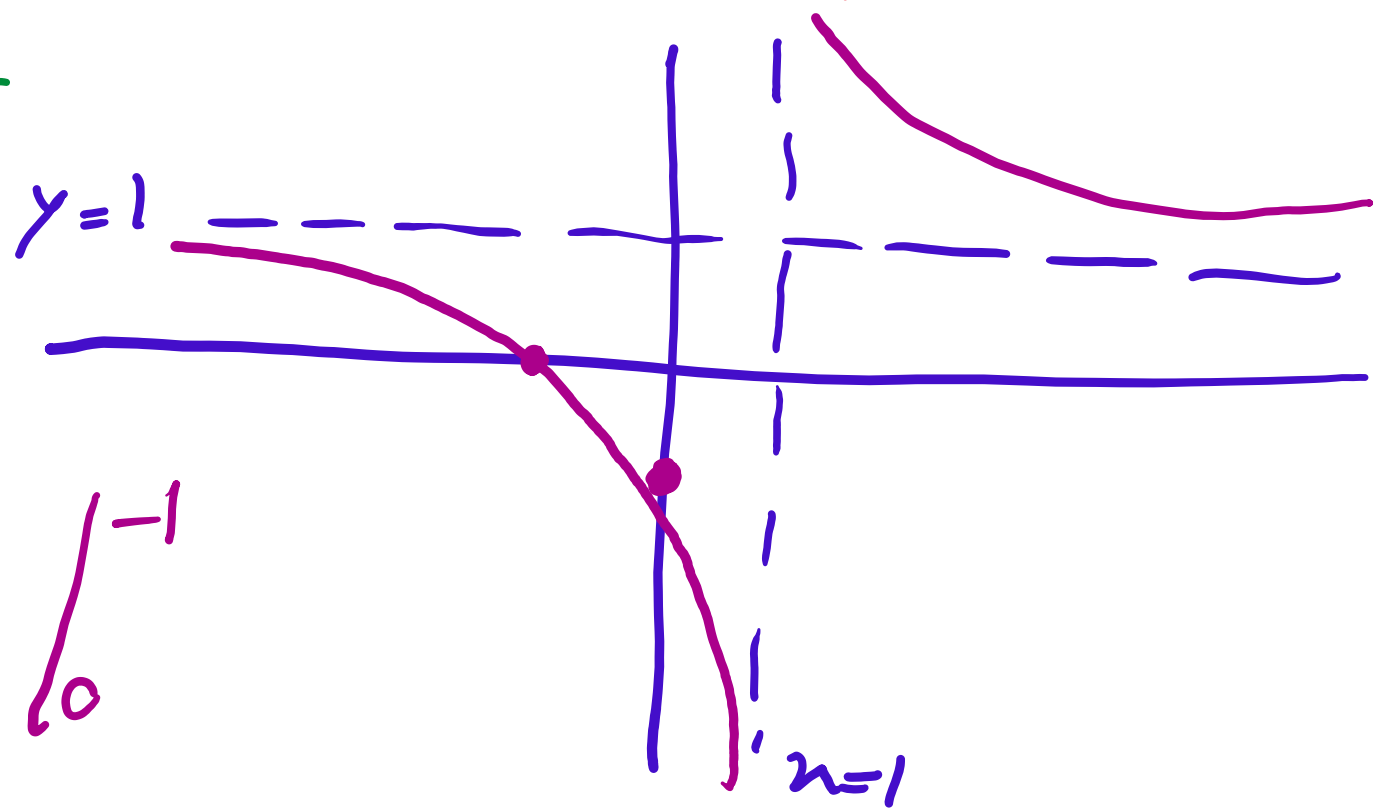
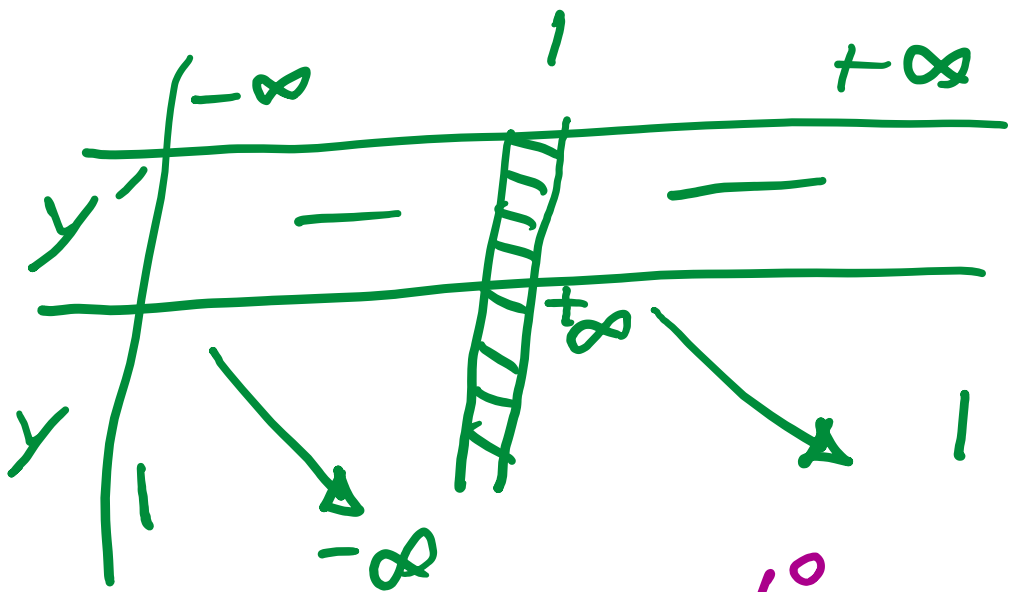
$$y' = 3ax^2 + 2bx \rightarrow y'' = 6ax + 2b \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y''=0}} 6a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow -2a = 2 \rightarrow a = -1 \rightarrow b = 3$$

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید.

۳
 $x=1$ قائم
 $y=1$ افقی

$$f'(x) = \frac{-1-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$



مجموعه کامل ویدیوهای آموزشی در

سایت علی جبرا

ALIGEBRA.COM



Freemath



Alihashemi_math