

۱) تار که بین دو تکیه‌گاه محکم شده است در هماهنگ اول خود با بسامد f به نوسان درمی‌آید. شکل زیر جابه‌جایی تار در $t = 0$ را نشان می‌دهد.



پاسخ:

الف) جابه‌جایی تار را در $t = \frac{1}{4f}$ و $t = \frac{1}{2f}$ را رسم کنید.

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{1}{T}$$

$$t = \frac{1}{4f} = \frac{1}{4(\frac{1}{T})} \rightarrow t = \frac{1}{4}T \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2f} \rightarrow t = \frac{1}{2(\frac{1}{T})} = \frac{T}{2} \Rightarrow$$

ب) فاصله بین تکیه‌گاه‌ها 1 m است. اگر تندی موج عرضی در تار $240 \frac{m}{s}$ باشد، بسامد نوسان تار چقدر

می‌شود؟

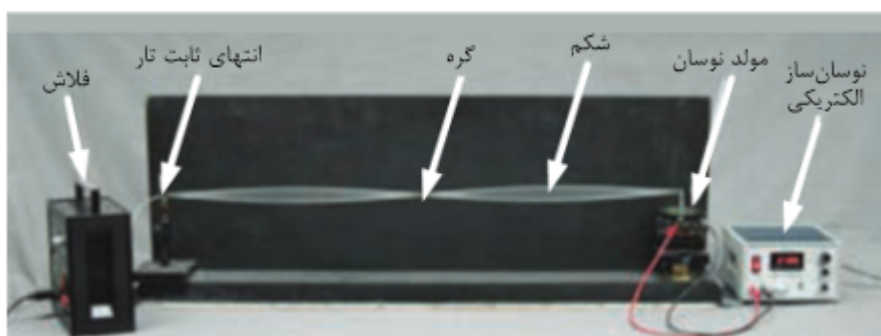
فاصله هر دو گره متوالی در یک موج ایستاده برابر $\frac{\lambda}{2}$ است. از طرفی هماهنگ اول تولید شده است و روی تکیه‌گاه‌ها گره

تشکیل می‌شود:

$$\frac{\lambda}{2} = 1\text{ m} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2\text{ m} \\ v = 240 \frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{240}{2} = 120\text{ Hz}$$

۲) شکل زیر تصویری از اسباب آزمایشی را نشان می‌دهد که در آن تار به طول 40 سانتی‌متر کشیده شده است.

این تار از یک سر به یک مولد نوسان و از سر دیگر به گیره‌ای متصل است و در آن دو شکم دیده می‌شود:



پاسخ:

الف) این شکل هماهنگ چندم تار را نشان می‌دهد؟

پاسخ: دوم

ب) بسامد اصلی این تار چند هرتز است؟

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow f_1 = \frac{200}{0.8} = 250 \text{ Hz}$$

۳) شکل زیر، موج ایستاده‌ای را نشان می‌دهد که در یک تار دو سر بسته به طول 60 cm تشکیل شده است. اگر تندی انتشار موج در تار $240 \frac{m}{s}$ باشد:



پاسخ:

الف) بسامد موج حاصل چند هرتز است؟

$$f = \frac{nv}{2L}$$

$$f = \frac{3 \times 240}{2 \times 0.6} = 600 \text{ Hz}$$

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

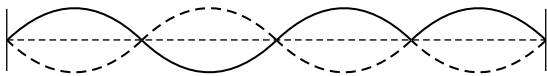
$$\lambda = \frac{2 \times 60}{3} = 40 \text{ cm}$$

ب) طول موج حاصل را به دست آورید.

۴) در طنابی با دو انتهای ثابت، موج ایستاده‌ای با ۵ گره تشکیل شده است. اگر طول موج 20 سانتی‌متر و سرعت انتشار موج در طناب $300 \frac{m}{s}$ باشد:

وضعیت نوسانی طناب را رسم کنید؟

الف)



ب) طول طناب چند سانتی‌متر است؟

$$L = n \frac{\lambda}{2} = 40 \text{ cm}$$

پ) بسامد اصلی این طناب چند هرتز است؟

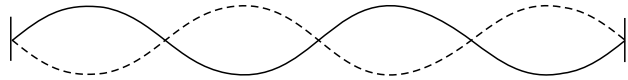
$$f = \frac{nv}{2L} = 375 \text{ Hz}$$

۵) در یک تار دو سر بسته به طول 0.8 m ، موج ایستاده به گونه‌ای تشکیل می‌شود که ۵ گره در طول تار به وجود می‌آید.

اگر تندی انتشار موج در تار 120 m/s باشد:

پاسخ:

الف شماره هماهنگ را تعیین کنید و شکل تار را در این حالت رسم کنید.



چهارم

ب بسامد موج حاصل چند هرتز است؟

$$f = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f = \frac{4 \times 120}{2 \times 0.8} = 300 \text{ Hz}$$

۶ در یک تار دو سر بسته یکی از بسامدهای تشدید 325 Hz و بسامد تشدید بعدی 390 Hz است.

بسامد تشدید پس از 195 Hz این تار چیست؟

هماهنگ مربوط به بسامد 325 Hz را n و هماهنگ تشدید بعدی یعنی 390 Hz را $n+1$ در نظر می‌گیریم. طبق رابطه بسامد تار مرتعش در هماهنگ n داریم:

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad f_{n+1} = (n+1) \frac{v}{2L} \rightarrow f_{n+1} - f_n = \frac{v}{2L}$$

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

$$\rightarrow f_1 = 390 - 325 = 65 \text{ Hz}$$

که این همان بسامد اصلی تار است.

بنابراین بسامد دوم تار برابر $f_2 = 2 \times 65 = 130 \text{ Hz}$ ، بسامد سوم $f_3 = 3 \times 65 = 195 \text{ Hz}$ و اولین بسامد پس از 195 Hz ، بسامد چهارم تار است که برابر است با $f_4 = 4 \times 65 = 260 \text{ Hz}$ که پاسخ مسأله است.

۷ رشته‌ای از بسامدهای تشدید یک تار با دو انتهای بسته عبارتند از: 150 Hz ، 225 Hz ، 300 Hz و 375 Hz . در این رشته یک بسامد (کمتر از 400 Hz) جا افتاده است.

الف این بسامد کدام است؟

ب بسامد هماهنگ هفتم چقدر است؟

الف در تار مرتعش، بسامد هر هماهنگ به اندازه بسامد اصلی از هماهنگ قبلی بیشتر و از هماهنگ بعدی کمتر است. یعنی بسامدهای تشدید تار مرتعش، جملات یک دنباله (تصاعد) حسابی با قدرنسبت بسامد اصلی ($f_1 = \frac{v}{2L}$) هستند که جمله اول هم برابر با بسامد اصلی است. همانطور که از بسامدهای داده‌شده در صورت مسأله پیداست، هر بسامد با بسامد بعدی خود به اندازه 75 Hz تفاوت دارد؛ بنابراین 75 Hz هرتز همان جمله اول دنباله و بسامد اصلی تار مرتعش است که جا افتاده است.

ب بسامد هماهنگ هفتم، 7 برابر بسامد اصلی است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$f_7 = 7 \times 75 = 525 \text{ Hz}$$

۸ در یک تار دو سر بسته، بسامد هماهنگ‌های سوم و چهارم به‌ترتیب 270 Hz و 360 Hz است.

پاسخ:

الف بسامد اصلی و بسامد تشدید پس از 450 Hz هر کدام چند هرتز هستند؟

$$f_{n+1} - f_n = f_1 \Rightarrow f_1 = 360 - 270 = 90 \text{ Hz} \Rightarrow f_6 = 6f_1 = 540 \text{ Hz}$$

ب اگر تندی انتشار موج عرضی در تار 180 m/s باشد، طول تار چند متر است؟

$$f = \frac{nv}{2L} \Rightarrow 90 = \frac{1 \times 180}{2L} \Rightarrow L = 1m$$

۹) تار ویولنی به طول $30.7cm$ و چگالی خطی جرمی $0.65 \frac{g}{m}$ در نزدیکی بلندگویی قرار داده شده است که توسط یک نوسان ساز صوتی با بسامد متغیر به کار می افتد. معلوم شده است که وقتی بسامد نوسان ساز در گستره $150 - 500 Hz$ تغییر می کند تار فقط هنگامی به نوسان درمی آید که بسامد آن $880 Hz$ و $1320 Hz$ باشد.

الف) چه پدیده ای سبب به نوسان در آمدن تار شده است؟

ب) بسامد اصلی تار چقدر است؟

پ) کشش تار چقدر است؟

پاسخ: الف) پدیده تشدید سبب به نوسان در آمدن تار شده است.

ب) اختلاف دو بسامد متوالی برابر با بسامد اصلی تار است: $f_1 = 1320 - 880 = 440 Hz$

پ) از رابطه بسامد اصلی یعنی $f = \frac{v}{2L}$ تندی موج را به دست می آوریم:

$$440 = \frac{v}{2 \times 0.30} \rightarrow v = 264 \frac{m}{s}$$

سپس از رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ (چگالی خطی جرمی تار μ) کشش تار محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \mu = 0.65 \times 10^{-3} \frac{kg}{m} \\ v = 264 \frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \rightarrow (264)^2 = \frac{F}{0.65 \times 10^{-3}} \rightarrow F \simeq 45.3 N$$

۱۰) چرا با سفت کردن سیم گیتار، بسامدی که هنگام نواختن می شنوید زیاد می شود؟

با سفت کردن سیم گیتار نیروی کشش F افزایش می یابد، در نتیجه طبق رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ، تندی موج افزایش می یابد.

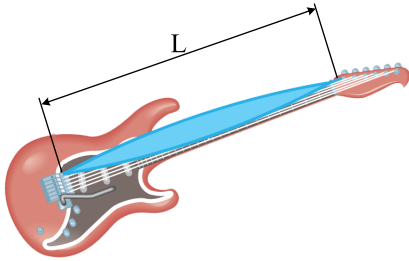
پس طبق رابطه $f_n = \frac{nv}{2L}$ ، بسامد موج نیز افزایش می یابد.

۱۱) چرا نوازندگان گیتار پیش از نواختن روی صحنه نمایش، گیتار را به حد کافی می نوازند و سپس آن را مجدداً کوک می کنند؟

زیرا زمانی که گیتار نواخته می شود گرم می شود و افزایش طول پیدا می کند که باعث کاهش نیروی کشش و در نتیجه کاهش بسامدهای تولیدی می شود. بنابراین قبل از آمدن روی صحنه نمایش آنقدر می نوازند تا سیم ها گرم شوند و کشش سیم ها را تنظیم کنند تا روی سن کوک بماند.

۱۲) سنگین‌ترین تار یک گیتار الکتریکی دارای چگالی خطی جرمی $\frac{kg}{m} \times 10^{-3} \times 5,28$ است و تحت کشش $226N$ قرار دارد. این تار در هنگام ارتعاش، تندی با بسامد $164,8Hz$ را ایجاد می‌کند که بسامد اصلی تار است.

الف) طول تار را به دست آورید.



ب) پس از مدتی که یک نوازنده، این گیتار را می‌نوازد، در نتیجه گرم شدن و شل شدن تارها، نیروی کشش تار موردنظر کاهش می‌یابد و به $209N$ می‌رسد. در این حالت بسامد اصلی این تار چقدر شده است؟

پاسخ: الف)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\mu = 5,28 \times 10^{-3} \frac{kg}{m}} v = \sqrt{\frac{226}{5,28 \times 10^{-3}}} = 206,98 \frac{m}{s}$$

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow L = \frac{206,98}{2 \times 164,8} = 0,63m$$

ب)

$$v' = \sqrt{\frac{F'}{\mu}} = \sqrt{\frac{209}{5,28 \times 10^{-3}}} = 198,96 \frac{m}{s}, \quad f'_1 = \frac{v'}{2L} = \frac{198,96}{2 \times 0,63} = 157,9Hz$$

۱۳) اگر بسامد اصلی یک تار ویولن به جرم $800mg$ و طول $22,0cm$ برابر $920Hz$ باشد،

الف) تندی موج عرضی در این تار را به دست آورید.

ب) کشش تار چقدر است؟

پاسخ: الف) با استفاده از رابطه بسامد اصلی تار، داریم:

$$f = \frac{v}{2L} \rightarrow 920 = \frac{v}{2 \times 0,22}$$

$$\rightarrow v = 404,8 \frac{m}{s}$$

ب)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} \rightarrow 404,8 = \sqrt{\frac{F \times 0,22}{800 \times 10^{-6}}}$$

$$\rightarrow F = \frac{(404,8)^2 \times 8 \times 10^{-4}}{0,22} = 595,9N$$

۱۴) تار ویولنی که طول آن $15cm$ است و در مُد دو انتها بسته شده است در مُد $n = 1$ خود نوسان می‌کند. تندی موج عرضی در این تار $250 \frac{m}{s}$ و تندی صوت در هوا $348 \frac{m}{s}$ است.

الف) بسامد

ب) طول موج امواج صوتی گسیل‌شده از تار چقدر است؟

الف) چون در مُد $n = 1$ نوسان داریم، بنابراین بسامد تار برابر خواهد شد با:

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{250}{2 \times 0.15} = \frac{2500}{3} \text{ Hz}$$

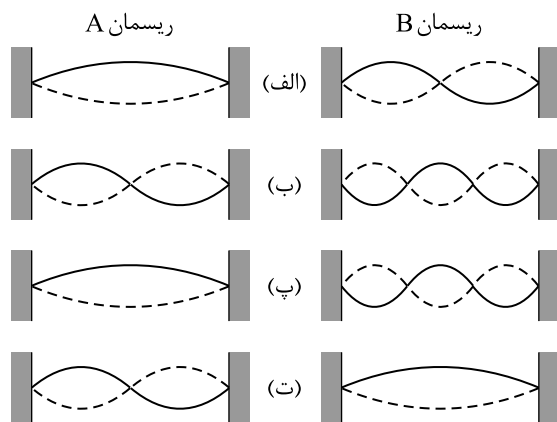
بنابراین بسامد امواج صوتی نیز $\frac{2500}{3}$ هرتز می‌شود.

(ب) طول موج امواج صوتی در تار برابر است با:

$$\lambda_{\text{تار}} = \frac{v_{\text{تار}}}{f} \rightarrow \lambda_{\text{تار}} = \frac{250}{\frac{2500}{3}} = 0.3 \text{ m}$$

و در هوا:

$$\lambda_{\text{هوا}} = \frac{v_{\text{هوا}}}{f} \rightarrow \lambda_{\text{هوا}} = \frac{348}{\frac{2500}{3}} = 0.42 \text{ m}$$



۱۵) ریسمان‌های A و B ، طول و چگالی خطی جرمی یکسانی دارند، ولی ریسمان B تحت کشش بیشتری نسبت به ریسمان A قرار دارد. شکل زیر چهار وضعیت (الف) تا (ت) را نشان می‌دهد که در آنها نقش‌های موج ایستاده در دو ریسمان وجود دارند. در کدام وضعیت‌ها احتمال دارد که ریسمان‌های A و B در بسامد تشدید یکسانی نوسان کنند؟

با توجه به رابطه سرعت انتشار موج در تار داریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow[\substack{\mu_A = \mu_B \\ F_B > F_A}]{\mu_A = \mu_B} v_B > v_A$$

برای تشدید تارهای A و B ، باید بسامد نوسان آنها یکسان باشد به کمک رابطه بسامد امواج ایستاده داریم:

$$f_A = f_B \rightarrow \frac{n_A v_A}{2L_A} = \frac{n_B v_B}{2L_B} \xrightarrow{L_A = L_B}$$

$$n_A v_A = n_B v_B$$

از آنجایی که $v_B > v_A$ است، برای برقراری تساوی باید $n_A > n_B$ باشد. یعنی شماره هماهنگ تار A بیشتر از تار B باشد که این موضوع تنها در شکل (ت) برقرار است.

۱۶) در یک تار مرتعش، موج ایستاده ایجاد شده است. اگر بسامد این موج ۴۰۰ هرتز و سرعت انتشار موج در تار $160 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، فاصله بین دو گره متوالی در این تار چند سانتی‌متر است؟

۴۰ (۴)

۳۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

فاصله بین دو گره متوالی، معادل نصف طول موج است. بنابراین داریم:

$$f = 400 \text{ Hz} \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{160}{400} = 0.4 \text{ m}$$

$$v = 160 \text{ m/s} \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{160}{400} = 0.4 \text{ m}$$

$$\text{فاصله دو گره متوالی} = \frac{\lambda}{2} = \frac{0.4 \text{ m}}{2} = 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

۱۷) تار به طول 50 cm بین دو نقطه محکم بسته شده و بسامد هماهنگ سوم آن 210 هرتز است. اگر جرم تار 5 گرم باشد، نیروی کشش آن چند نیوتون است؟

۲۴۱ (۴)

۱۴۷ (۳)

۹۸ (۲)

۴۹ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$L = 50\text{ cm} = \frac{1}{2}m \Rightarrow n = 3 \Rightarrow f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F \cdot L}{m}} \Rightarrow f_3 = \frac{3}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{F \times \frac{1}{2}}{5 \times 10^{-3}}} = 30 \cdot \sqrt{F} = 210 \Rightarrow \sqrt{F} = 7 \Rightarrow F = 49\text{ N}$$

۱۸) رشته‌ای از بسامدهای تشدید یک تار با دو انتهای بسته به صورت $f_1, 160\text{ Hz}, f_3, 320\text{ Hz}$ است. $f_3 - f_1$ چند هرتز است؟

۸۰ (۴)

۱۶۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) می‌دانیم که رشته‌ای از بسامدهای تشدید یک تار با دو انتهای بسته به صورت زیر است. حال با مقایسه رشته اعداد داده شده، با رشته بسامدهای تار داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} f_1, f_2, & f_3, f_4, & f_5, \dots, & f_n = n f_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, 5f_1, \dots, & f_3 - f_1 = 3f_1 - f_1 = 2f_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ f_1, 160, f_3, 320 & , & \xrightarrow{f_3 - f_1 = 160\text{ Hz}} & , & f_3 - f_1 = 160\text{ Hz} \end{array}$$

روش دوم:

$$f_3 - f_1 = f_2 = 160\text{ Hz}$$

۱۹) در یک تار مرتعش دو سر بسته، یکی از بسامدهای تشدید 375 Hz و بسامد تشدید بعدی 500 Hz است. بسامد تشدید پس از 750 Hz چند هرتز است؟

۹۷۵ (۴)

۹۲۵ (۳)

۸۷۵ (۲)

۸۲۵ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) اختلاف دو بسامد متوالی، f_1 یا بسامد اصلی تار است. بنابراین:

$$\begin{cases} f_n = n f_1 = 375 \\ f_{(n+1)} = (n+1) f_1 = 500 \end{cases} \Rightarrow 500 - 375 = f_1 \Rightarrow f_1 = 125\text{ Hz}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & +125 & & +125 & & +125 & & +125 \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ 375\text{ Hz}, & 500\text{ Hz}, & 625\text{ Hz}, & 750\text{ Hz}, & 875\text{ Hz} \end{array}$$

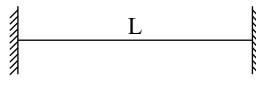
۲۰) مجموع بسامدهای دو هماهنگ نخست یک تار دو انتها بسته 375 هرتز است. اگر طول تار 40 cm و جرم آن 10 گرم باشد، نیروی کشش تار چند نیوتون است؟

۲۵۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۱۸۰ (۱)



$$\Rightarrow f_n = n f_1 = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1 \Rightarrow f_1 = \frac{v}{2L}, \quad n = 2 \Rightarrow f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{v}{L}$$

$$f_2 + f_1 = 375 \text{ Hz} \Rightarrow \frac{v}{L} + \frac{v}{2L} = 375$$

$$L = 0.4 \text{ m} \Rightarrow \frac{v}{0.4} + \frac{v}{0.8} = 375 \Rightarrow 3v = 300 \Rightarrow v = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{F \cdot L}{m}} = 100 \Rightarrow F = \frac{10^4 \times m}{L} = \frac{10^4 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-1}} = \frac{1}{4} \times 10^3 = 250 \text{ N}$$

۲۱ دو بسامد تشدید متوالی یک تار دو انتها ثابت، ۲۴۰ هرتز و ۲۸۰ هرتز است. کدام بسامد برحسب هرتز، از بسامدهای تشدید این تار نیست؟

۳۲۰ (۴)

۱۶۰ (۳)

۸۰ (۲)

۶۰ (۱)

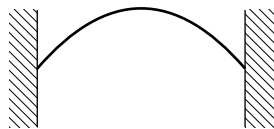
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که اختلاف بسامدهای دو تشدید متوالی در ریسمان کشیده‌شده، با بسامد اصلی تار برابر است؛ بنابراین داریم:

$$f_1 = f_n - f_{n-1} = 280 - 240 \Rightarrow f_1 = 40 \text{ Hz}$$

از طرفی، بسامدهای تشدید تار، مضرب درستی از بسامد اصلی هستند؛ یعنی بسامدهای تشدید این تار می‌تواند برابر عددهای دنباله زیر باشد:

$$40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, \dots$$

و $f = 60 \text{ Hz}$ نمی‌تواند از بسامدهای تشدید این تار باشد.



۲۲ مطابق شکل، تاری که بین دو تکیه‌گاه محکم شده است، در هماهنگ اول خود با بسامد f به نوسان درمی‌آید. اگر فاصله دو تکیه‌گاه 50 cm و تندی موج عرضی در آن $\frac{250 \text{ m}}{\text{s}}$ باشد، چند میلی‌ثانیه طول می‌کشد تا هر یک از ذرات تار یک نوسان انجام دهند؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۲ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم مدت زمانی که طول می‌کشد تا هر ذره از محیط ارتعاشی، یک نوسان کامل انجام دهد، با دوره نوسان برابر است. بنابراین در اینجا کافی است که دوره ارتعاش تار را بیابیم. با توجه به شکل که هماهنگ اول تار را نمایش می‌دهد، داریم:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow f_1 = \frac{250}{2 \times 0.5} \Rightarrow f_1 = 250 \text{ Hz} \xrightarrow{T = \frac{1}{f}}$$

$$T = \frac{1}{250} \text{ s} \Rightarrow T = 4 \text{ ms}$$

۲۳) تار به طول 60 cm با دو انتهای ثابت ارتعاش می‌کند و در طول آن ۳ شکم تشکیل شده است. اگر بسامد ایجادشده ۳۰۰ هرتز باشد، تندی موج عرضی در تار چند متر بر ثانیه است و بسامد صوت اصلی تار چند هرتز است؟

۱۰۰ و ۵۰۰ (۴)

۱۰۰ و ۱۲۰ (۳)

۳۰۰ و ۱۲۰ (۲)

۳۰۰ و ۵۰۰ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) با استفاده از رابطه تعیین بسامد تار مرتعش داریم (دقت کنید که تعداد شکم همان شماره هماهنگ را نشان می‌دهد):

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow 300 = \frac{3v}{2 \times 0.6} \Rightarrow v = 120 \frac{m}{s}$$

و با توجه به رابطه بین بسامد اصلی و بسامد هماهنگ n ام داریم:

$$f_n = nf_1 \Rightarrow 300 = 3f_1 \Rightarrow f_1 = 100\text{ Hz}$$