

امتحان ریاضی (شماره ۱)

دوازدهم تجربی

علی هاشمی

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت خانه ریاضی علی هاشمی است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

Alihashemi-math.com

۱) در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

الف) تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه‌ی تعریف خود..... (صعودی، نزولی) است.

ب) هرچه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

پ) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد..... (مستقل، ناسازگار) هستند.

$$f = x^{\text{فرد}} \quad \left\{ \begin{array}{l} f = x^{\text{صود}} \\ f = -x^{\text{نزولی}} \end{array} \right.$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \rightarrow \quad 0 < e < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} e \rightarrow 0 \quad \text{دایره} \\ e \rightarrow 1 \quad \text{خط کشیده} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مستقل} \\ \text{مترتب} \end{array} \right. \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0$$



درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{7}$ و $g(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)

ب) دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است. (درست، نادرست)

پ) شکل حاصل ازدوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخروط توپر می‌باشد. (درست، نادرست)

$$f = \frac{-7}{2}x - 3 \quad \text{و} \quad g = \frac{-7}{2}x - 3 \quad \text{و} \quad y + 6 = -7x \quad \text{و} \quad x = -\frac{y+6}{7}$$

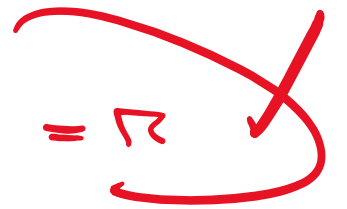
$$y = \sin ax$$

$$y = \cos ax$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$$



دوره تناوب
از دوران

مخروط
مستقیم



۱ | دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. | ۳

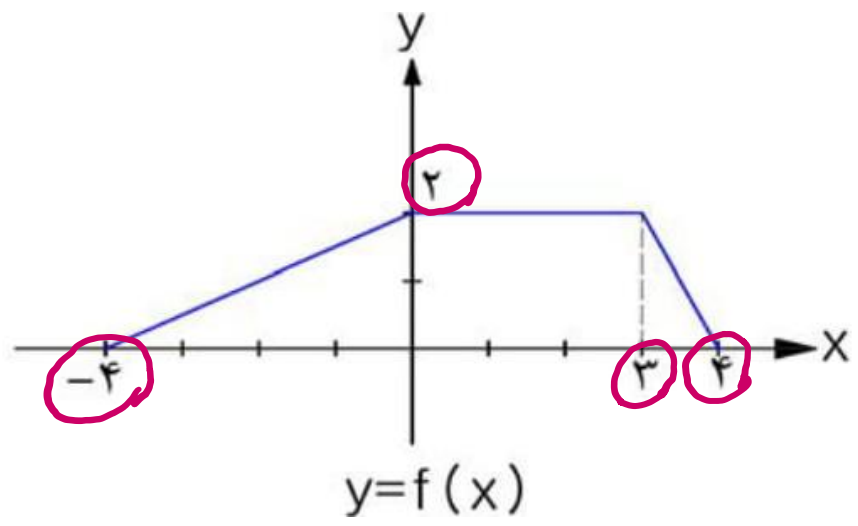
$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid \underline{f(x)} \in D_g \right\}$$

$$x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \rightarrow D_f : x \geq 4$$

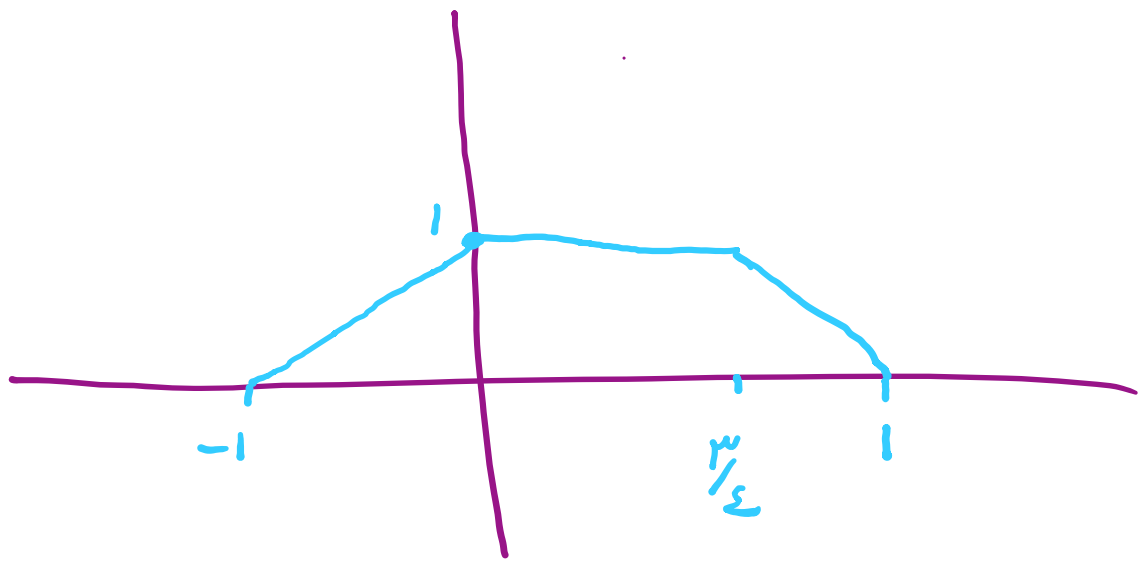
$$x^2-1 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1$$

$$\sqrt{x-4} \neq 1 \rightarrow x-4 \neq 1 \rightarrow x \neq 5$$

$$D_{g \circ f} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$$



با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{4}f(4x)$ را رسم کنید.



الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right)$ را به دست آورید.

۰/۱۵

۱/۲۵

ب) معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + x = x$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید.

$$y_{\max} = 1 - 2(-1) = 3 \quad y_{\min} = 1 - 2(1) = -1$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad -2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad / \quad \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$



الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱/۵

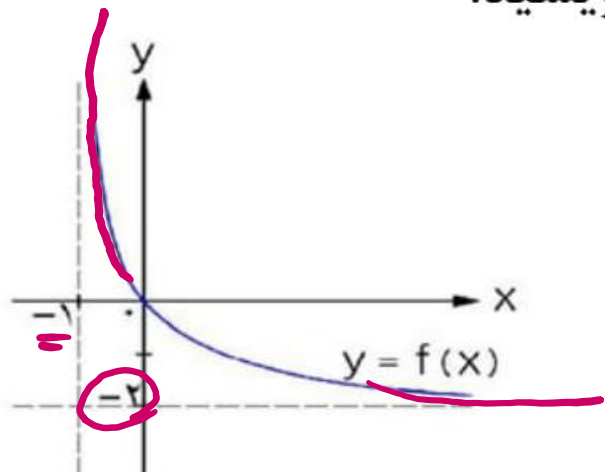
ا) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} = \frac{0}{0}$ *بعم*

۰/۵

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



ا) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{4}$

مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x = -1$ به دست آورید.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \rightarrow \quad f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x + 1} = \frac{0}{0}$$

از فرمول \rightarrow $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

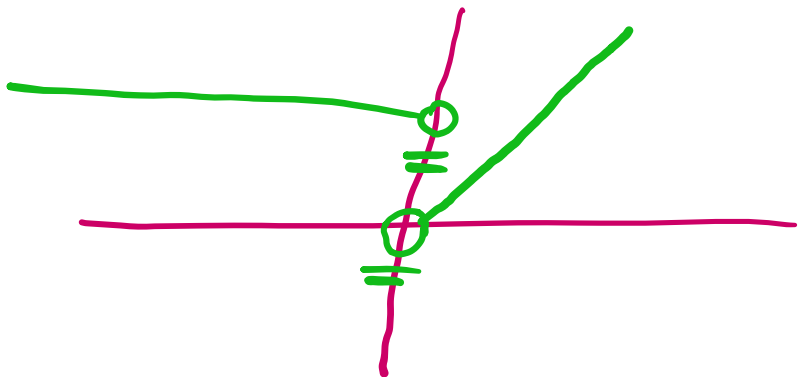
$$f(0) = -1$$

پیوسته

$$f'_+(0) = 0$$

$$f'_-(0) = 2$$

مشخص و ثابت برابر نیست



الف) $f(x) = (x^4 - 3x)^5$

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

$$f'(x) = \underbrace{5}_{\text{۵}} \cdot \underbrace{(x^4 - 3x)^4}_{\text{}} \cdot \underbrace{(4x^3 - 3)}_{\text{}} \rightarrow \underline{\underline{۵/۷۵}}$$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$$



۱ معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند.

متوسط:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon - 0} = \frac{21 - 0}{\varepsilon - 0} = \underline{\underline{v}}$$

لحظه‌ا:
$$f'(t) = 4t - 1$$

$$4t - 1 = v \rightarrow 4t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{4}$$



اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر v باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = v \end{cases} \rightarrow f(1) = v \rightarrow \underline{\underline{a + b = v}}$$

$$f'(x) = 2ax + b \quad \underline{\underline{f'(1) = 0}} \rightarrow \underline{\underline{2a + b = 0}} \rightarrow \underline{\underline{b = -2a}}$$

$$a - 2a = v \rightarrow -a = v \rightarrow \underline{\underline{a = -v}} \rightarrow \underline{\underline{b = 1v}}$$



۱۲ | اکستریم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه ی $[-1, 3]$ به دست آورید. | ۱/۲۵

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \checkmark \\ x = -2 \times \end{cases}$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 = \underline{\underline{-7}}$$

$$f(-1) = -2 + 3 + 12 = 13$$

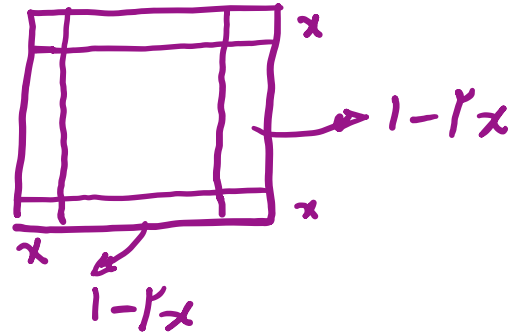
$$f(3) = \underline{\underline{45}}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{max} & x=3 \\ \hline \text{مطلق} & y=45 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{min} & x=1 \\ \hline \text{مطلق} & y=-7 \end{array}$$



۱/۲۵ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x بر می گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.



$$V = (1-2x)(1-2x)x = (1-2x)^2 \cdot x$$

$$V = (1-4x+4x^2)x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 8x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1/4 & \times \\ x = 1/9 & \checkmark \end{cases}$$

$$x = 1/9$$



وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۲

$$1) \quad \begin{cases} O_1 \\ R_1 = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array} \right\}$$

$$2) \quad \begin{cases} O_2 \\ R_2 = 2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = -a/r = -1/2 = 1 \\ y = -b/r = -4/2 = -2 \end{array} \right\}$$

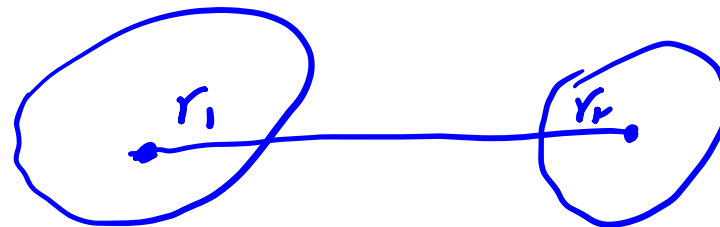
$$R_2 = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16 - 4} = 2$$

$$O_1 O_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}$$

$$R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3$$

$$O_1 O_2 > R_1 + R_2$$

متقاطع



در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ $\underline{r_a}$ و طول قطر کوچک $\underline{r_b}$ واحد است. فاصله ی کانونی بیضی را $\underline{r_c}$ به دست آورید.

$$r_a = 1 \rightarrow \underline{a = 1}$$

$$r_b = 9 \rightarrow \underline{b = 3}$$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2$$

$$19 = 9 + c'^2$$

$$c'^2 = 10$$

$$c = \sqrt{10}$$

$$FF' = r_c = r \times \sqrt{10} = \underline{r\sqrt{10}}$$



سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره‌ی سبز و ۳ مهره‌ی آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}}_{0.15} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}}_{0.15} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{0}{10}}_{0.15}$$

$$P(A) = \frac{4}{27} + \frac{1}{10} = \frac{97}{270}$$



خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math