

امتحان نهایی ریاضی ۳

خرداد ۱۴۰۱

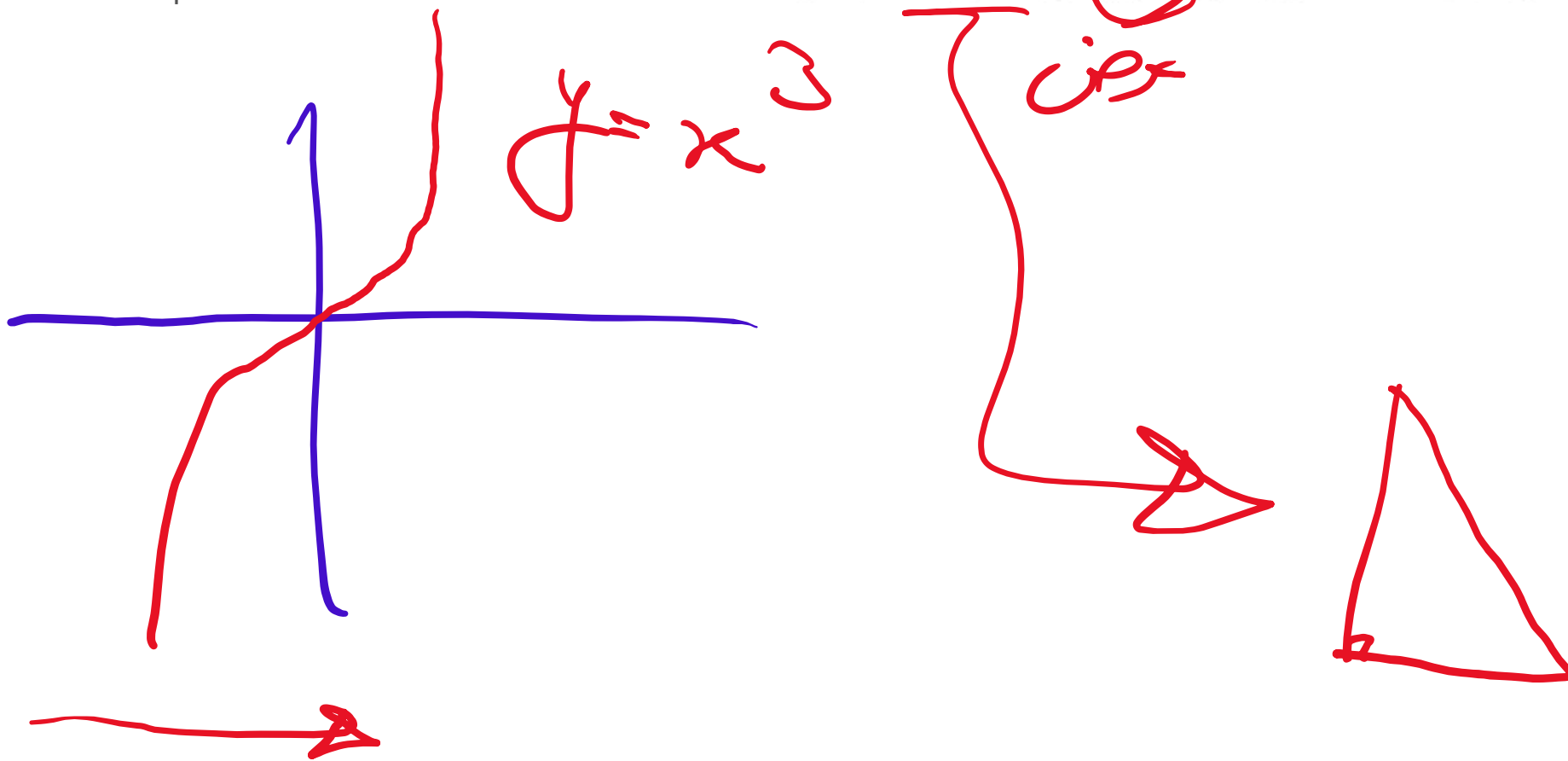
علی هاشمی

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ یک تابع درجه دوم است. درست

ب) تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیدا صعودی است. درست

پ) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.



الف) اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.

ب) باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر است.

پ) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر است.

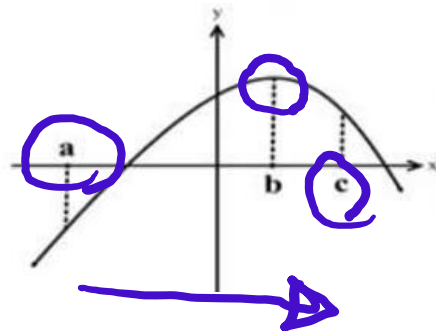
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow 1 - 15 + 1 = \Sigma$$

$$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$2c = 6 \rightarrow c = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

- I. برد تابع f بازه $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ کدامیک از موارد زیر است؟
 (الف) $[-8, 0]$ (ب) $[-12, 0]$ (پ) $[1, 9]$ (ت) $[-10, 2]$
- II. کدامیک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟
 (الف) $(-1, 0)$ (ب) $(1, 0)$ (پ) $(0, -1)$ (ت) $(-1, 0)$
- III. با توجه به نمودار تابع f ، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_c, m_b, m_a نمایش داده شود. کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟



(ب) $m_b > m_a > m_c$

(ت) $m_c = m_b = m_a$

(الف) $m_c > m_b > m_a$

(پ) $m_a > m_b > m_c$

$$1 + 0 - 2 + 0 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟

۰/۷۵

$$x \text{ ورودی} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \text{خروجی}$$

۳

↓
4

$$\frac{4}{3}$$

معادله ی یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن 2 است.

$$c = 0$$

$$a = 4$$

$$y = -4 \sin(-\pi x)$$

$$y = -4 \sin \pi x$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2 \rightarrow |b| = \pi \rightarrow b = \pm \pi$$

$$y = 4 \sin \pi x$$

$$y = 4 \sin(-\pi x)$$

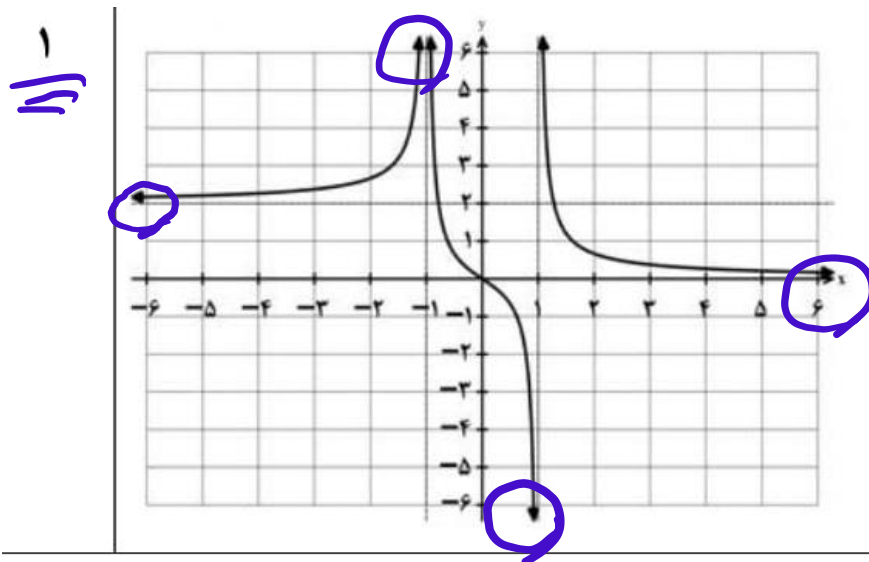
$$\sin 2x = \sin x \rightarrow 2x = 2k\pi + x$$

$$\underline{\underline{2x = 2k\pi + \pi - x}}$$

$$x = 2k\pi$$

$$x = \frac{2k\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu}$$

نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) =$

۲
الف) 2

ب) 2

پ) $+\infty$

ت) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(2x-1)(x-3)} = \frac{1}{5}$$

$$A = 2x^2 - 7x + 3 \Rightarrow \underline{2}A = \underline{2}x^2 - \underline{7}(2x) + \underline{6} = (\underline{2x-6})(\underline{2x-1})$$

اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.

$$f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$5 \times 8 + (-6)(3) = 40 - 18 = 22$$

۱۰ اگر $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x < 0 \\ x^2 + 3x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

$f'_- = a$
 $f'_+ = 2x + 3$
 پس $a = 3$

پس $f'_- = a$
 $f'_+ = 2x + 3$
 $a = 3$

پس $f'_- = a$
 $f'_+ = 2x + 3$
 $a = 3$

$f'_-(0) = a$
 $f'_+(0) = 3$
 $a = 3$

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

$$y' = \frac{9(x+1) - (9x-2)}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

۱/۲۵

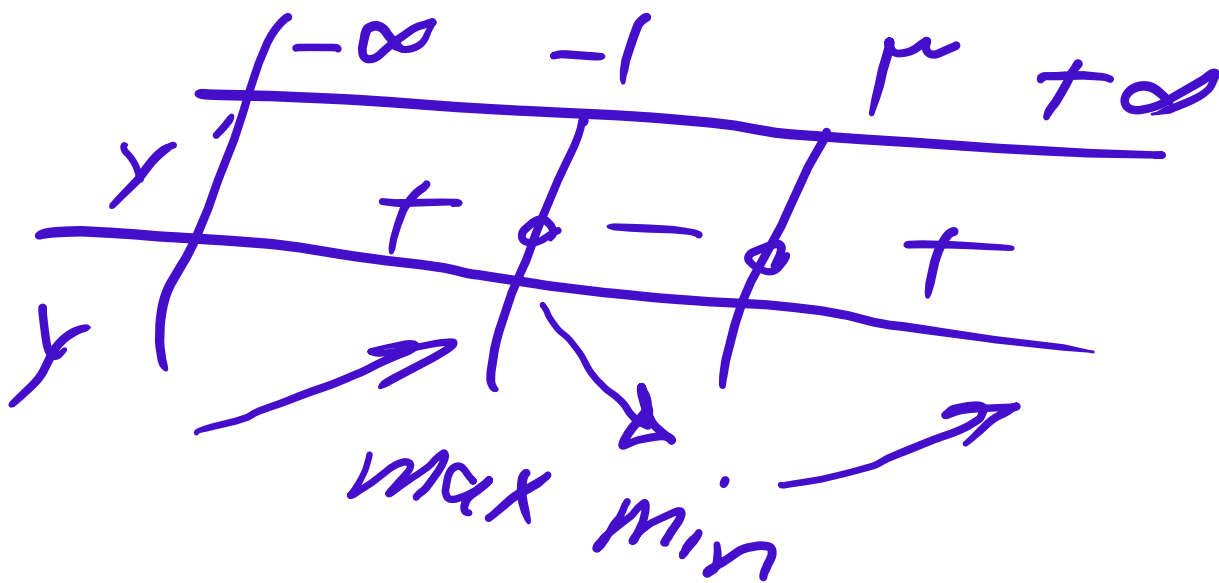
معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط را در بازه زمانی $[0, 5]$ و سرعت لحظه ای را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{15 - 10}{5 - 0} = 1$$

$$\text{سرعت لحظه ای} \quad f'(2) = 2 - 1 = 1$$

$$f'(t) = 2t - 1$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$



$$x = -1$$

max

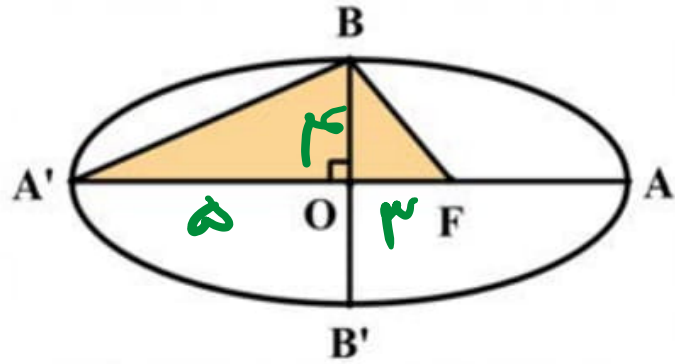
$$x_{\min} = 3$$

اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه ی $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.

$$5x - y = 10 \rightarrow y = \underline{5x - 10}$$

$$xy = x(5x - 10) = 5x^2 - 10x \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 10x - 10 = 0$$

$$\rightarrow x = 1 \rightarrow y = -5$$



اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:

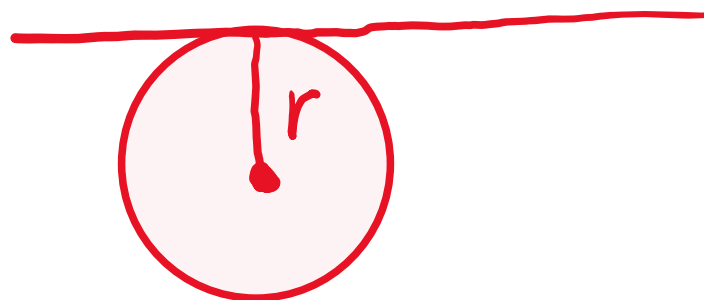
الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)

ب) مساحت مثلث هاشور خورده ($\triangle BFA'$) چقدر است؟

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{25 - 16} = \underline{3}$$

$$A'F = 5 + 3 = 8$$

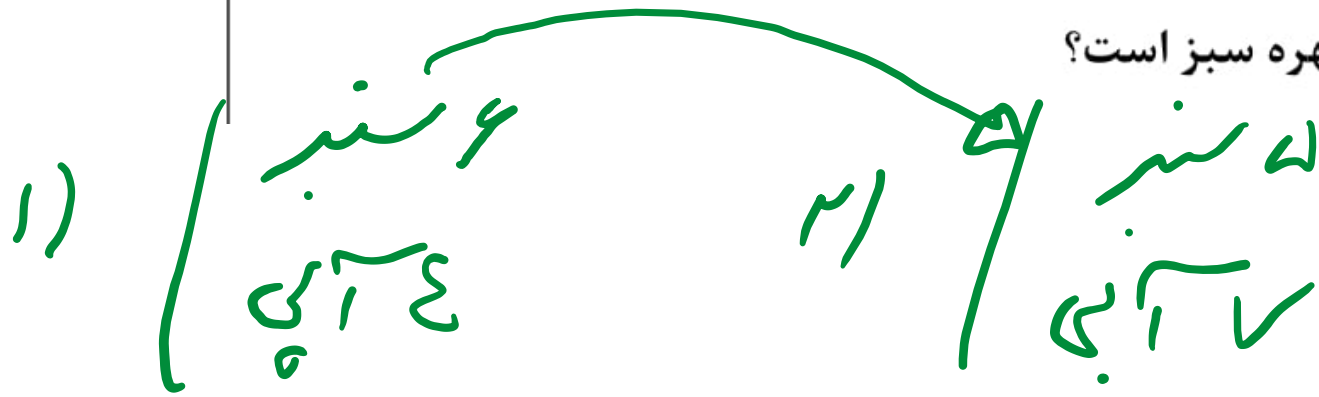
$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$$



$$r = \frac{|0 - 12 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟



$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$

مجموعه کامل ویدیوهای آموزشی در

سایت علی جبرا

ALIGEBRA.COM



Freemath



Alihashemi_math