امتحان نهایی ریاضی ۳

خرداد ۱۴۰۰

علی هاشمی

۰/۵	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است. درست. ب) هرچه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.	۱

درست.

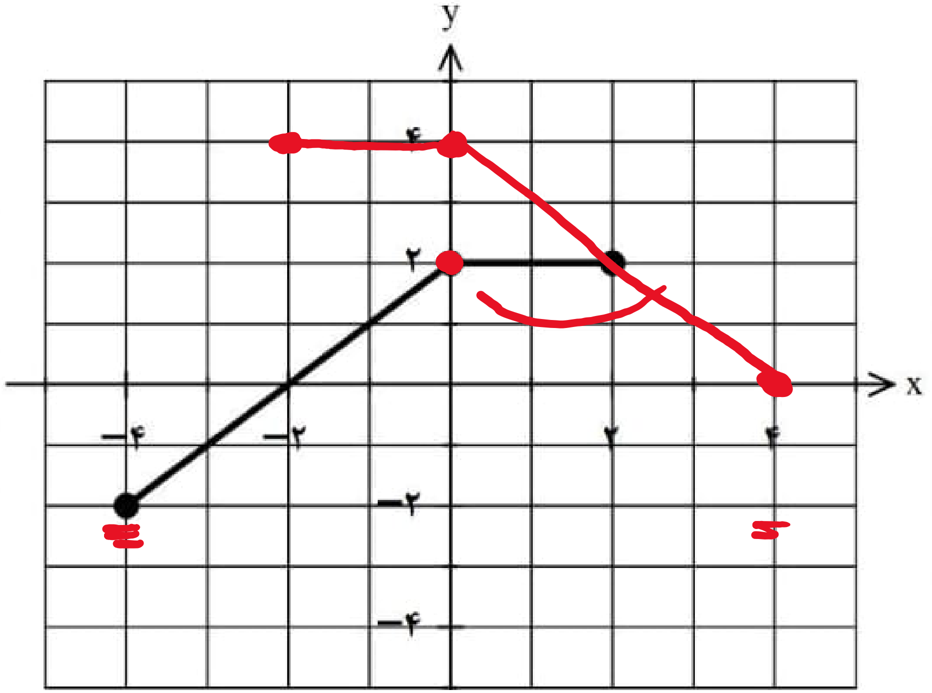
$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

۰/۵	درجاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) بزرگترین بازه ای که تابع $f(x)=x^{3}-3x$ در آن اکیدا نزولی است برابر .... است. $(-1,1)$ ب) شعاع دایره ای به معادله $x^{2}+y^{2}-2x-3=0$ برابر ....2.... است.	۲

$y'=3x^2-3=0 \longrightarrow x=\pm 1$

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	
			ج			

$x^2-2x+1-1+y^2-3=0 \longrightarrow (x-1)^2+y^2=4$

۳	با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$، نمودار تابع $y = f(-x) + ۲$ را رسم کنید.		۰/۷۵

نمره	سؤال	ردیف
۱/۲۵	اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد. الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب)مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.	۴

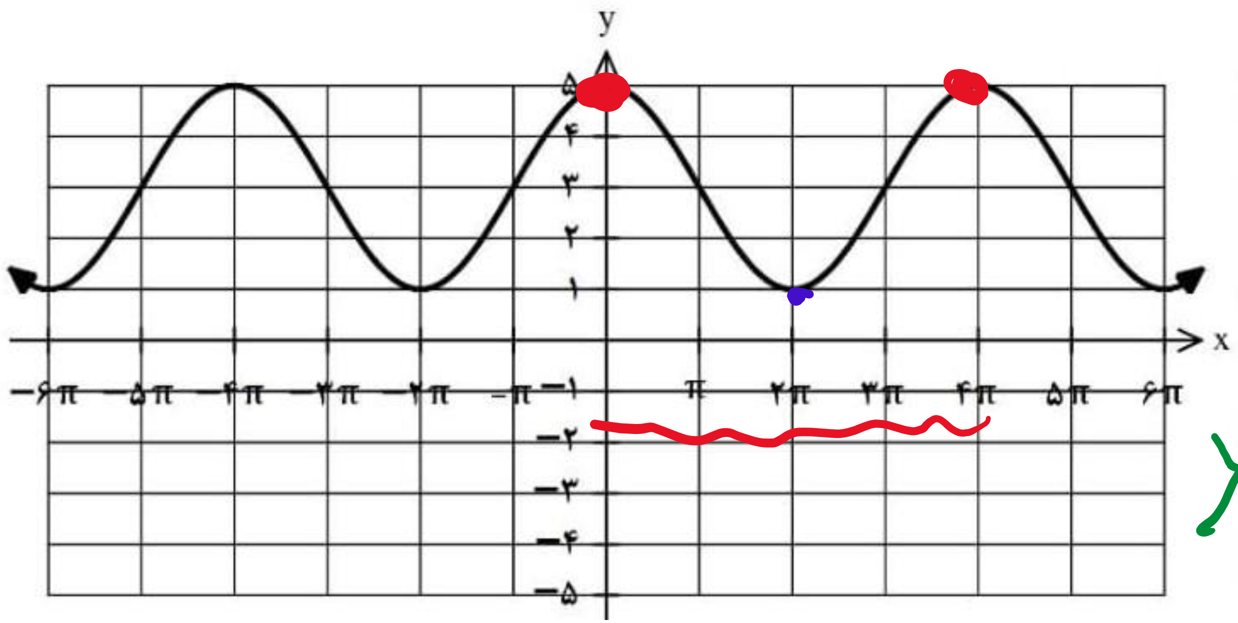
$D_f=[1,\infty)$

$D_g=R$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{R \mid 2x^2-1\geq 1\}$

$2x^2\geq 2 \longrightarrow x^2\geq 1 \longrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq -1 \end{cases}$ $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

ب) $g(f(2))=g(1)=1$

۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a\cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید. 	۱

$$y = 2\cos\frac{1}{2}x + 3$$

$$\begin{cases} a + c = 5 \\ -a + c = 1 \end{cases} \longrightarrow 2c = 6 \longrightarrow \boxed{c = 3} \longrightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \longrightarrow |b| = \frac{1}{2} \longrightarrow b = \pm\frac{1}{2}$$

۱	معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.	۶

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \longrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad ; \quad k \in Z$$

$$2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad . \quad k \in Z$$

۷	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to ۵} \frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ ب) $\lim\limits_{x\to (-\frac{۱}{۳})} \frac{[x]}{\|۳x+۱\|}$ ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}$	۲

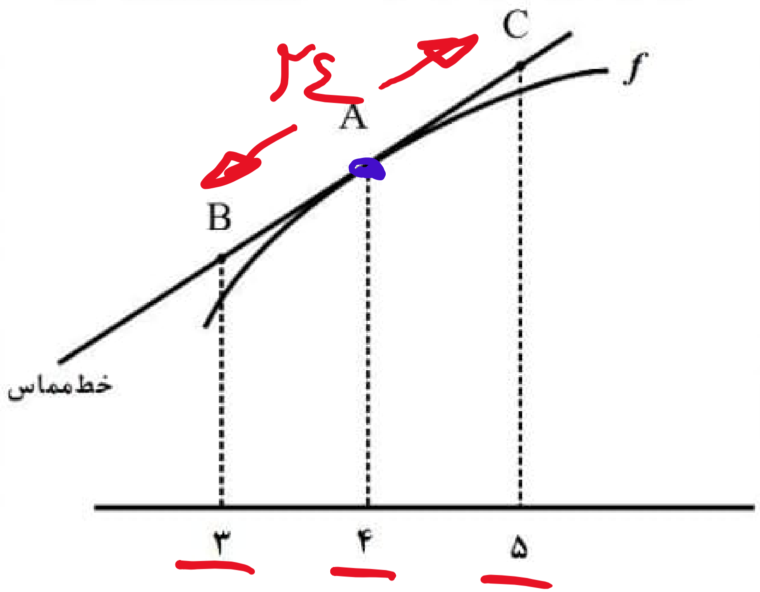
الف) $\frac{0}{0} \to \lim\limits_{x\to 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} = \lim \frac{\overset{-1}{\cancel{4-x+1}}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$ ✓

ب) $\frac{-1}{0^+} = -\infty$ ✓

ج) $\frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$ ✓

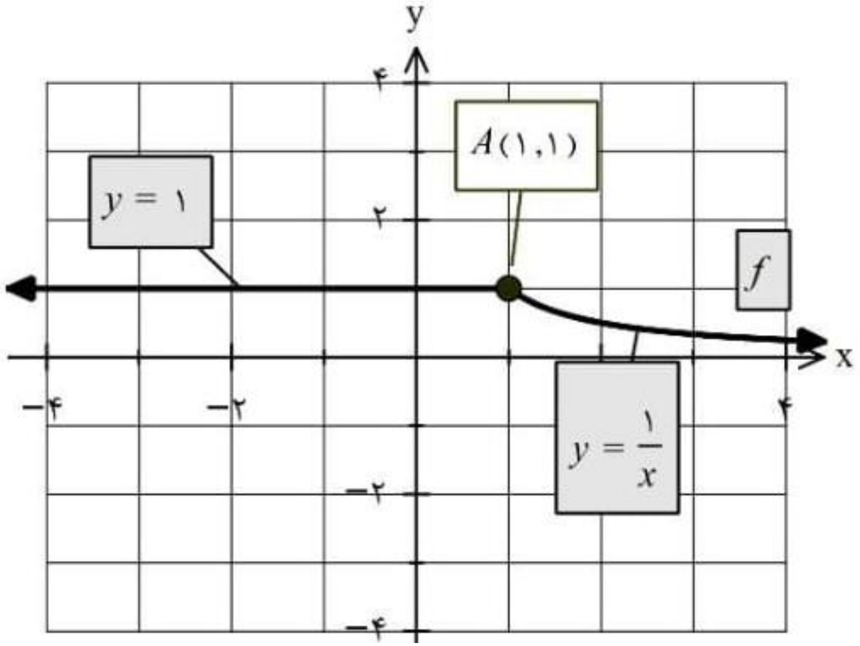
سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۱		برای تابع f در شکل روبرو داریم $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۴$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.	۸

$$\frac{f(۵)-f(۴)}{۵-۴}=۱/۵ \longrightarrow f(۵)=۲۵/۵ \longrightarrow C\left|\begin{matrix}۵\\ ۲۵/۵\end{matrix}\right.$$

$$\frac{f(۴)-f(۳)}{۴-۳}=۱/۵ \longrightarrow f(۳)=۲۲/۵ \longrightarrow B\left|\begin{matrix}۳\\ ۲۲/۵\end{matrix}\right.$$

۹	با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطه A، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق پذیر نیست. 	۱

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$

$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=-1$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0$

۱۰	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x)=\frac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$	۱/۵

الف) $f'(x)=\dfrac{۹\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}$

ب) $g'(x)=۶x(۲x-۵)^{۳}+۳(۲x-۵)^{۲}(۲)(۳x^{۲}-۴)$

۱۱	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $\boxed{h(t)=-۵t^{۲}+۴۰t}$ به دست می آید: الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[۵,۸]$ به دست آورید. ب) مشخص کنید در چه لحظه ای سرعت جسم $۳۵m/s$ است.	۱/۵

الف) $\text{متوسط} = \dfrac{f(۸)-f(۵)}{۸-۵} = \dfrac{۰-۷۵}{۳} = -۲۵$

ب) $h'(t) = -۱۰t+۴۰ = ۳۵ \longrightarrow t = ۰/۵$

۱۲	اگر نقطه $(2,1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	۱/۵

$\binom{2}{1} \longrightarrow 8+4b+d=1 \longrightarrow 4b+d=-7 \longrightarrow d=5$

$f'(x)=3x^2+2bx \xrightarrow{x=2} 12+4b=0 \longrightarrow b=-3$

۱۳	در بین تمام مستطیل هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیش ترین مساحت را بیابید.	۱/۵

$$2x+2y=14 \Rightarrow x+y=7 \Rightarrow y=7-x \Rightarrow y=\frac{7}{2}$$

$$S=xy=x(7-x)=7x-x^2 \quad S'=0 \Rightarrow 7-2x=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

۱۴	کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است. الف) فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب) اگر $a=6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک را پیدا کنید.(a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است.)	۱/۵

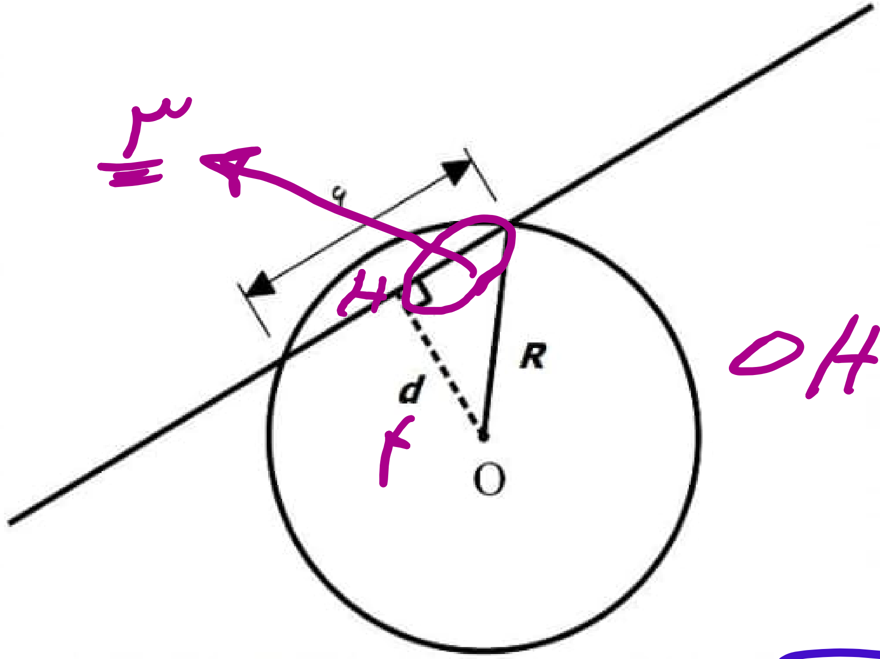
$$O\begin{cases}\frac{1+1}{2}=1\\ \frac{-5+3}{2}=-1\end{cases}$$

$$FF'=8 \longrightarrow 2c=8 \longrightarrow c=4$$

$$a^2=b^2+c^2 \longrightarrow 36=b^2+16 \longrightarrow b^2=20 \longrightarrow b=\sqrt{20}$$

$$\longrightarrow BB'=2b=2\sqrt{20}$$

۱/۵	مرکز دایره ای، نقطه $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می کند. معادله دایره را بنویسید.	۱۵



$$OH=\frac{|۶+۱۲+۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

$$R=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

$$\boxed{(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۲۵}$$

۲	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟	۱۶

$$P(A)=P(B_1)\times P(A|B_1)+P(B_2)\times P(A|B_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{100}=\frac{11}{200}$$