

# امتحان نهایی ریاضی ۳

خرداد ۹۹

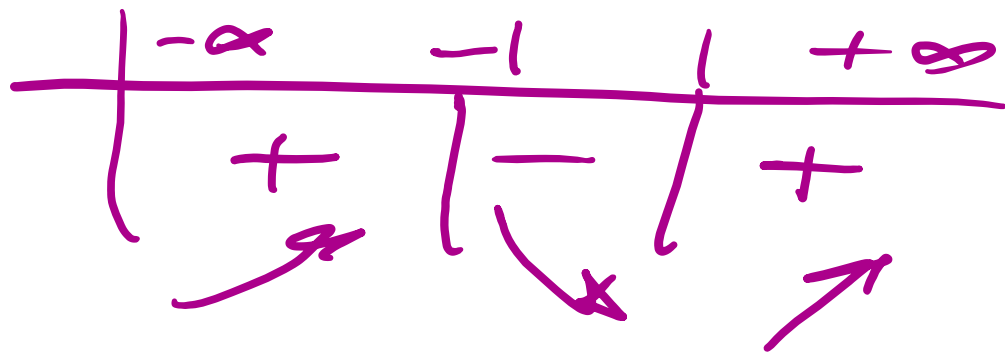
علی هاشمی

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱

- الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. **درست**
- ب) اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد، آنگاه  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است. **نادرست**
- ج) تابع  $f(x) = x^3 - 3x$  در بازه  $(-1, 1)$  اکیداً صعودی است. **نادرست**

$$f' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

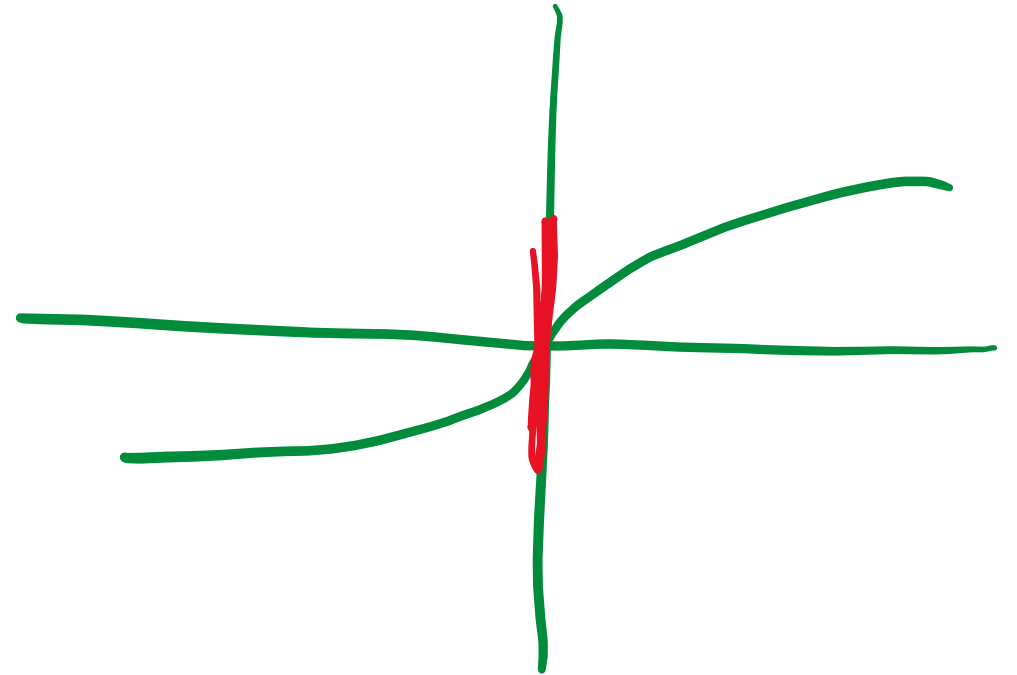
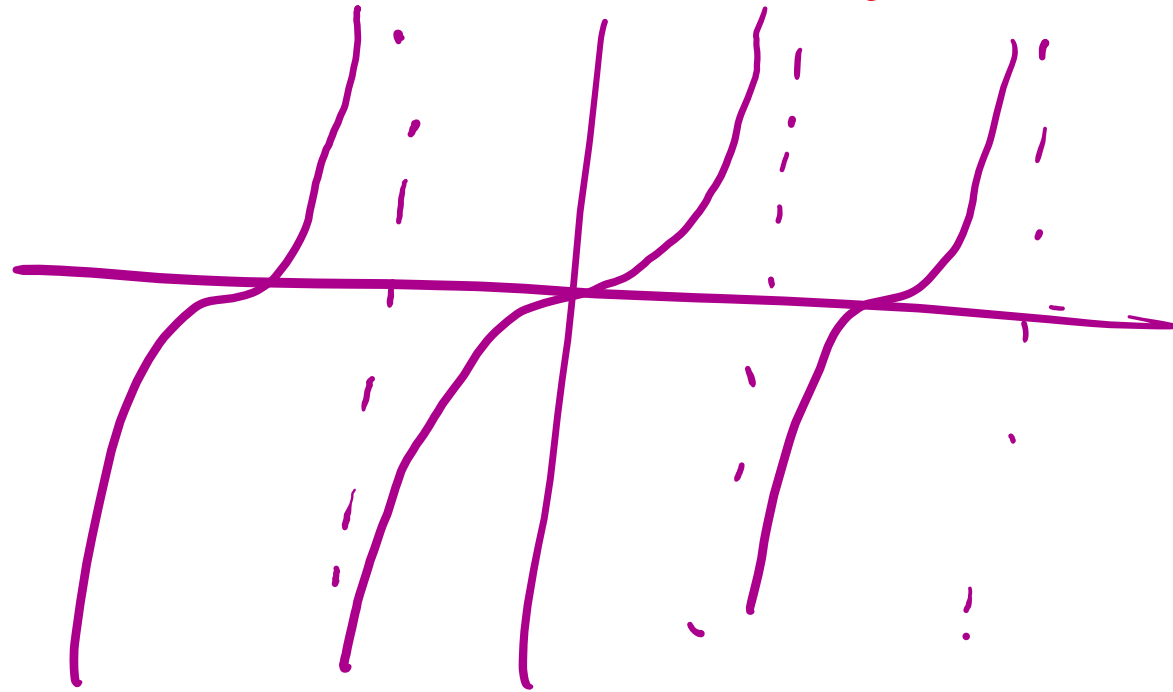


در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

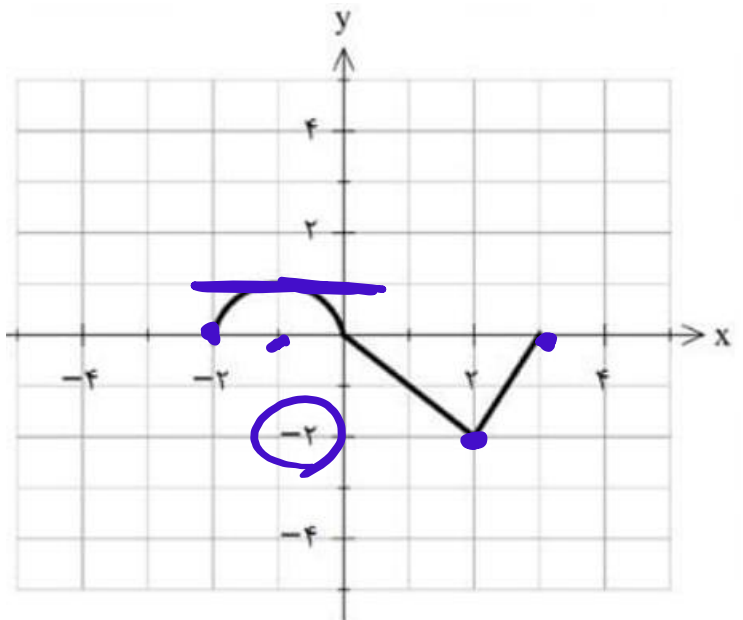
الف) برد تابع  $y = \tan x$  برابر ..... است.  $\mathbb{R}$

ب) حد تابع  $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$  وقتی که  $x \rightarrow -\infty$  برابر ..... است.  $0$

ج) تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  در  $x = 0$  مشتق پذیر نیست. خط  $x = 0$  را ..... منحنی می نامیم.  $\infty$

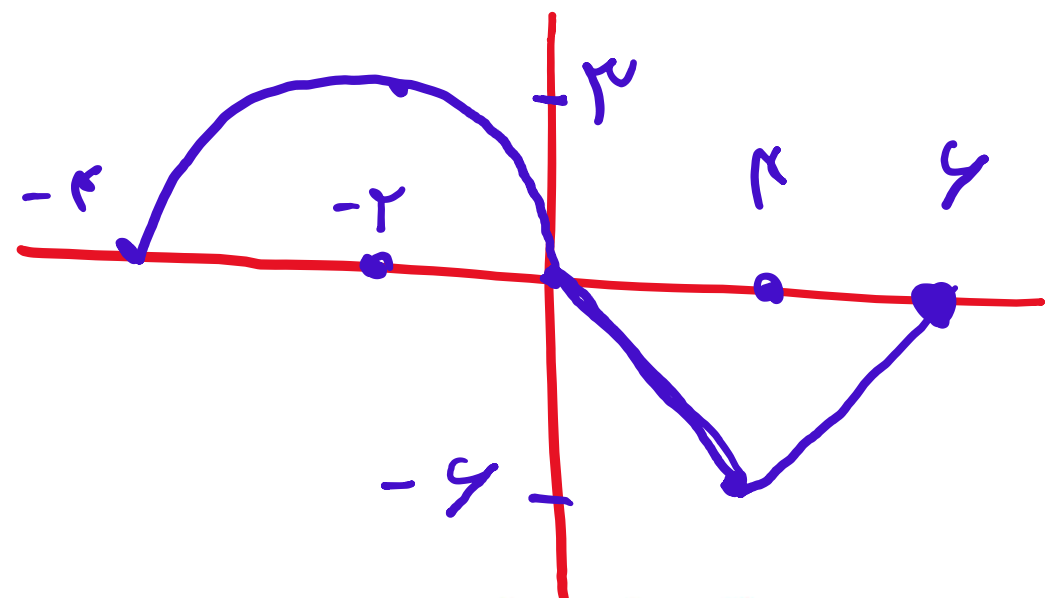


نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است.



الف) نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} f(x)$  را رسم کنید.

ب) دامنه تابع  $y = \frac{1}{2} f(x)$  را تعیین کنید.



$D = [-4, 4]$

اگر  $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$  و  $f(x) = 3x - 4$  ضابطه تابع  $g(x)$  را به دست آورید

۴

$$3g - 4 = 3x^2 - 6x + 14$$

$$3g = 3x^2 - 6x + 18$$

$$g = x^2 - 2x + 6$$

$$y = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x + 1$$

$$y_{\max} = \sqrt{3} + 1$$

$$y_{\min} = -\sqrt{3} + 1$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-1}{2} \\ \cos x = 5 \quad \times \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

الف)  $\frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}} \cdot \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(x+\sqrt{x+6})}{(x-\sqrt{x+6})(x+\sqrt{x+6})}$

$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 6}$

$= \frac{3 \times 6}{0} = \frac{18}{0}$

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(x+\sqrt{x+6})}{(x-3)(x+3)}$

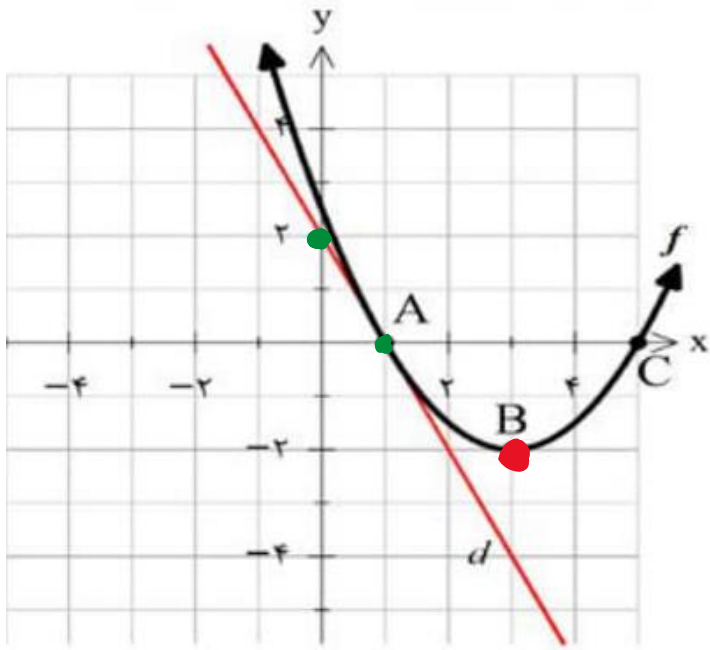
$\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)$



در نمودار مقابل خط  $d$  در نقطه  $x=1$  بر نمودار  $f$  مماس شده است:

الف) مشتق تابع  $f$  را در نقطه  $x=1$  محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط  $C, B$  مقایسه کنید.



$$f'(1) = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

$$b) m_C > m_B$$

به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 4|$  را در نقطه  $x = -2$  بررسی کنید.

نویسند  $x = -2$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2}$$

+	-	+
---	---	---

= +ε

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{-x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{-x + 2} = -\varepsilon$$

$f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف)  $f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^4$

ب)  $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})$

$$f'(x) = 4 \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^3 \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2}\right)$$

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot \sqrt{3x+2} + \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \cdot \frac{1}{x}$$

یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$  گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی  $1 \leq t \leq 4$  چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t = 4$  چقدر است؟

$$m(4) - m(1) = (2 + 128) - (1 + 2) = 127$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \quad t=4 \rightarrow m'(4) = \frac{1}{4} + 96$$

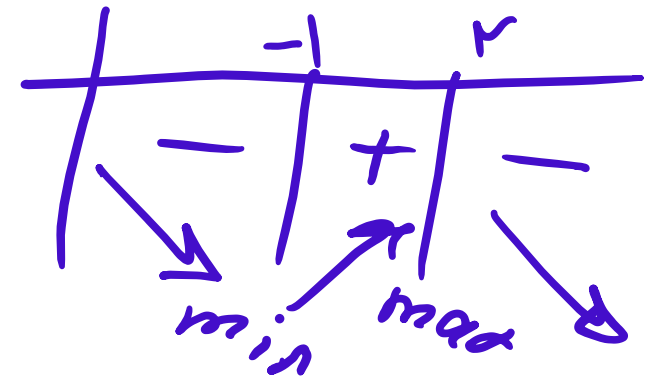
تابع  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$  در نظر بگیرید:

الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.  
 ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f$  در بازه  $[0, 3]$  در صورت وجود به دست آورید.

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0$

تولیس  $(-2, -1)$  / صورت  $(-1, 2)$

$x = -1$   
 $x = 2$



$f(0) = -9$   
 min

$f(2) = 0$

$f(2) = 11$   
 max

هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت  $۳۲\text{cm}^2$  خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایین هر صفحه  $۲\text{cm}$  و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتیمتر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

$$xy = 32$$

$$S = (x + 2)(y + 2) = (x + 2)\left(\frac{32}{x} + 2\right)$$

$$S = 32 + 2x + \frac{64}{x} + 4 \rightarrow S' = 2 - \frac{64}{x^2} = 0$$

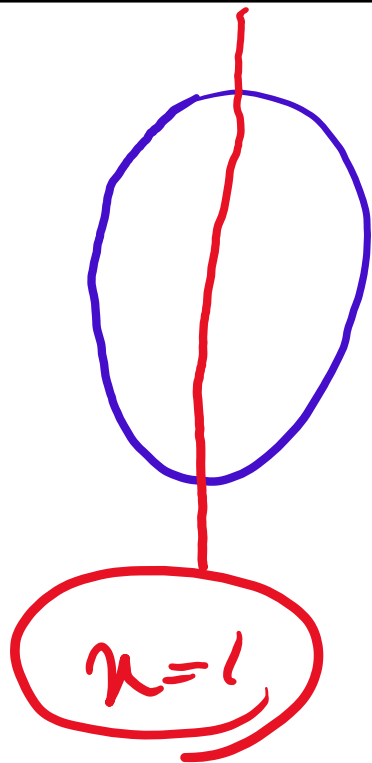
$$\rightarrow x^2 = 32 \rightarrow \underline{x = 4} \rightarrow \underline{y = 8}$$

$$S = (4 + 2)(8 + 2) = 48 \checkmark$$

کانونهای یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  است.

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.

ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



$$0 \quad | \quad 1 \\ -1$$

$$FF' = 1 = 2c \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{12}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 36 = b^2 + 1 \rightarrow b^2 = 35 \rightarrow b = \sqrt{35}$$

$$BB' = 2b = 2\sqrt{35}$$

اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر  $0/08$  و نوزاد دختر  $0/03$  باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$$



اگر  $f(x) = \sqrt{4-2x}$  و  $g(x) = x^2 + 2x - 1$  باشد،  
الف) دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار  $\frac{f}{g}(0) - g \circ f(2)$  تعیین کنید.

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \leq 2 \mid \sqrt{4-2x} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= (-\infty, 2]$$

$$g(f(2)) - \frac{f(0)}{g(0)} = -1 - \frac{2}{-1} = -1 + 2 = 1$$

اگر نقطه  $(۲, ۱)$  ، نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$  باشد، مقادیر  $b$  و  $d$  را به دست آورید.

$$f'(x) \rightarrow 3x^2 + 2bx + d = 0 \rightarrow 12 + 2b + d = -1$$

$$f''(x) = 6x + 2b = 0 \quad x=2 \rightarrow 12 + 2b = 0 \rightarrow b = -6$$

$$-12 + d = -1 \rightarrow d = 11$$

مجموعه کامل ویدیوهای آموزشی در

سایت علی جبرا

ALIGEBRA.COM



Freemath



Alihashemi\_math