امتحان نهایی ریاضی ۳

خرداد ۹۸

علی هاشمی

۱ در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

الف) تابع $y=(x+1)^3$ در دامنه‌ی تعریف خود..... (صعودی، نزولی) است.

ب)هرچه خروج از مرکزبیضی ..... (کوچکتر، بزرگتر)شود شکل بیضی به دایره نزدیکترخواهد شد.

پ)دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد..... (مستقل، ناسازگار) هستند.

سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۲ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دوتابع $f(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$ و $g(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$ وارون یکدیگرند. (درست) نادرست)

ب) دوره‌ی تناوب تابع $y=\tan x$ برابر ۲π است. (درست) نادرست)

(۲)

$$y=-\frac{۲x+۶}{۷} \longrightarrow -۷y=۲x+۶ \longrightarrow -۷y-۶=۲x$$

$$\longrightarrow x=\frac{-۷}{۲}y-۳ \longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$$

سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۳ دوتابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$D_{gof(x)}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

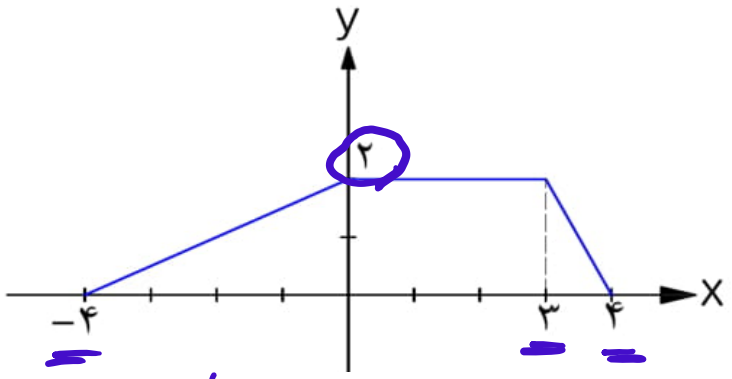
$$=\{x\geq ۴ \mid \sqrt{x-۴}\neq ۱\}$$

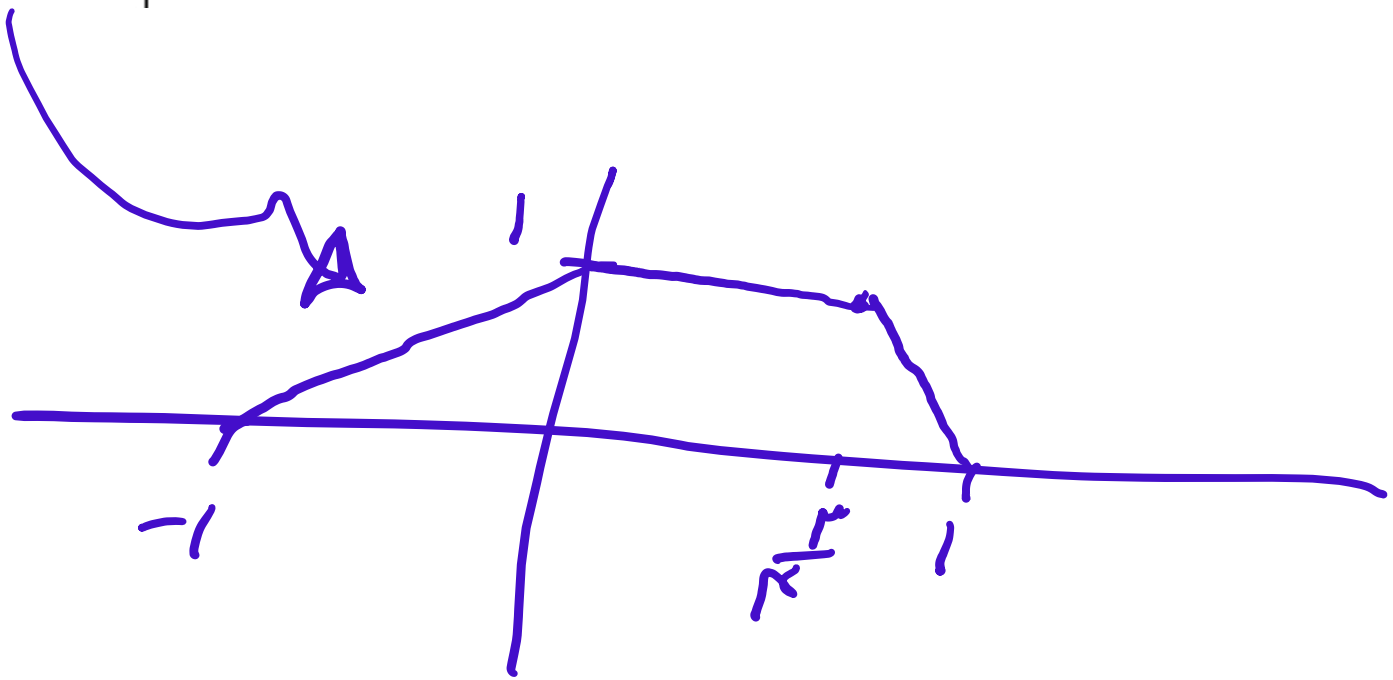
$$x\neq ۵$$

$$D_{gof}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$$

سایت علی جبرا
Aligebra.com
مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۴ با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.





سایت علی جبرا
Aligebra.com
مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۵ الف)مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۱-۲\sin(\frac{-\pi}{۳}x)$ را به دست آورید.

ب) معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۲\alpha - \sin\alpha + ۱ = ۱$ را حل کرده ،جواب‌های کلی آن را بنویسید.

$y_{max} = ۱-۲(-۱) = ۳$ $y_{min} = ۱-۲(۱) = -۱$

$۱-۲\sin^۲ x - \sin x = ۰ \rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$

$\sin x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$

$\sin x = \frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$

سایت علی جبرا
Aligebra.com
مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

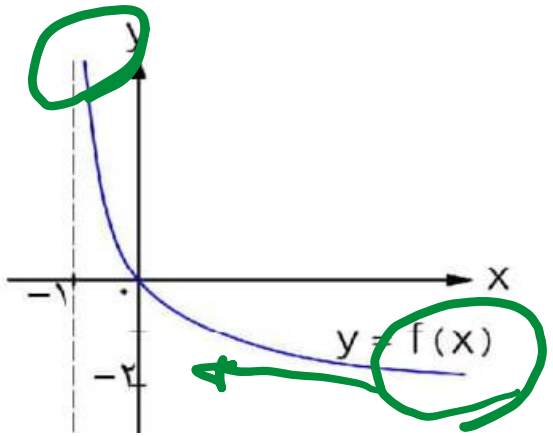
۶ الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

آ) $\lim_{x \to 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} = \frac{0}{0}$

$$\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{6}$$

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



آ) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

ب) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

سایت علی جبرا
Aligebra.com
مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۷ | مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x=-1$ به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=3$$

سایت علی جبرا
Aligebra.com
مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۸ تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ x^{۲}-۱ & x\geq ۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

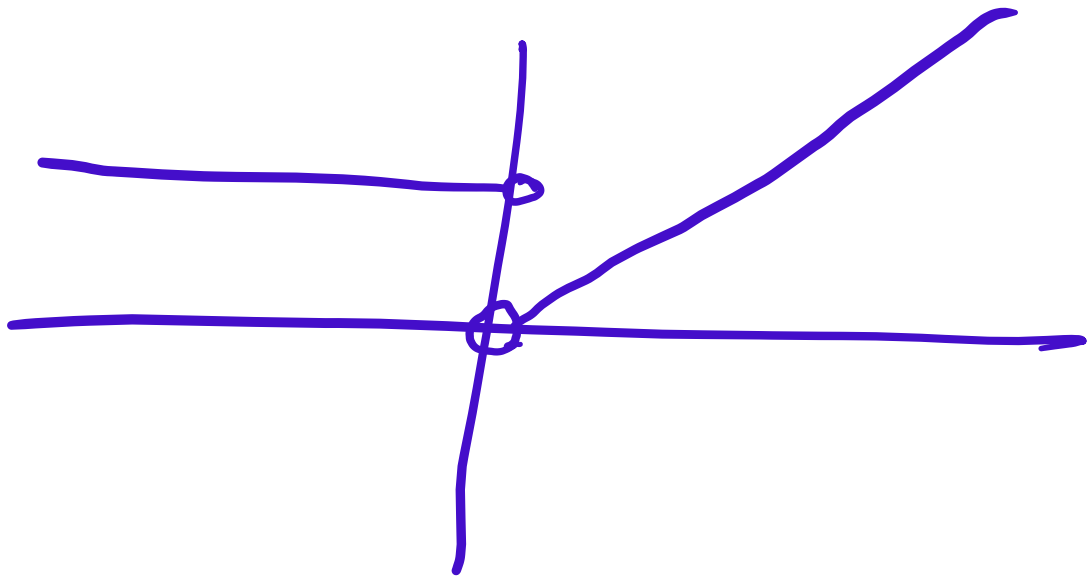
$x=۰$ نقطه بحرانی

$f'(x)=\begin{cases}۲ & x<۰\\ ۲x & x>۰\end{cases}$

$x<۰ \rightarrow f'_{-}(۰)=۲$

$x>۰ \rightarrow f'_{+}(۰)=۰$

$f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$



سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۹ مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=(x^4-3x)^5$

ب) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}$

$$f'(x)=5(x^4-3x)^4(4x^3-3)$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)-(-1)(\sqrt{x})}{(1-x)^2}$$

سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۱۰ معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=۲t^۲-t$، بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[۰,۴]$ با هم برابرند.

$$\text{متوسط} = \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{۲۸-۰}{۴} = ۷$$

$$f'(t) = ۴t-۱ = ۷ \longrightarrow ۴t = ۸$$

$$\longrightarrow t = ۲$$

سایت علی جبرا
Aligebra.com
مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۱۱ | اگر تابع $f(x)=ax^{۲}+bx$ در $x=۱$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد ، مقادیر a و b را به دست آورید.

$f(۱)=۷ \longrightarrow a+b=۷$

$f'(x)=۲ax+b \xrightarrow{x=۱} ۲a+b=۰$

$\begin{cases} a+b=۷ \\ ۲a+b=۰ \end{cases} \longrightarrow a=-۷ \longrightarrow b=۱۴$

سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۱۲ | اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه ی $[-1,3]$ به دست آورید.

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2+6x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$ ✓ ✗

$f(1)=-7$

$f(-1)=13$

$f(3)=45$

$\max \begin{cases} 3 \\ 45 \end{cases}$

$\min \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$

سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۱۳ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید.می خواهیم از چهار گوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم وآن ها را کنار بگذاریم.سپس لبه جعبه را به اندازه x بر می گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود.مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثرمقدار ممکن گردد.

$$V=(1-2x)(1-2x)x=(1-4x+4x^2)x$$

$$V=4x^3-4x^2+x \longrightarrow V'=12x^2-8x+1=0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6} \quad \surd \\ x=\frac{1}{2} \quad \times \end{cases}$$

سایت علی جبرا
Aligebra.com
مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

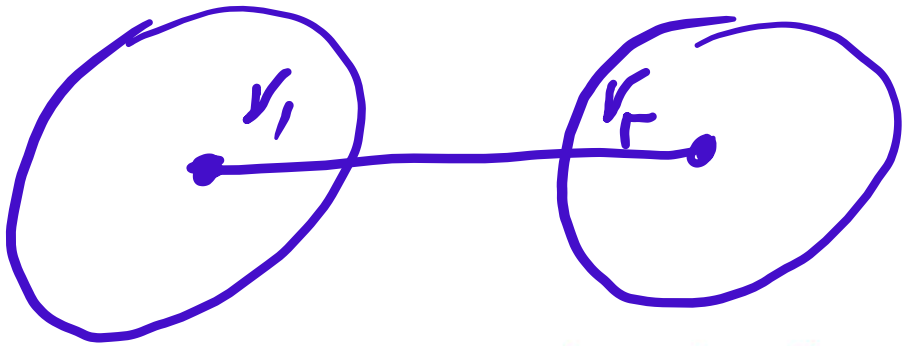
۱۴ وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

$O_2\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}\quad r_2=2$

$O_1\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}\quad r_1=1$

$x^2-2x+1+y^2+4y+4-4=0 \rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$

$O_1O_2=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$ > $r_1+r_2=3$



سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۱۵ دریک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است.فاصله ی کانونی بیضی را به دست آورید.

$2a=8 \rightarrow a=4 \qquad 2b=6 \rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$FF'=2c=2\sqrt{7}$

سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۱۶ سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره‌ی سبز و ۳ مهره‌ی آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره ی سبز و۴ مهره ی قرمزاست. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

۱) ۵ سبز / ۴ آبی

۲) ۷ سبز / ۳ آبی

۳) ۶ سبز / ۴ قرمز

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)$$

$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{67}{270}$$

سایت علی جبرا
Aligebra.com

مشاوره پکیج ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹
کلاس خصوصی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

مجموعه کامل ویدیوهای آموزشی در

سایت علی جبرا

ALIGEBRA.COM

Freemath

Alihashemi_math