

# جمع بندی ریاضی کنکور

## هندسه

### فصل دوازدهم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

دوران

۱) استوانه مخروطی مربع

۲) مخروط مست

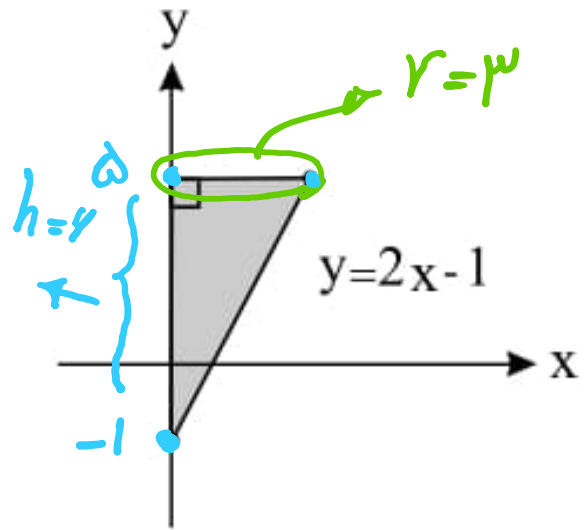
۳) کره

$$V = \pi r^2 h \quad \text{استوانه}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{مخروط}$$

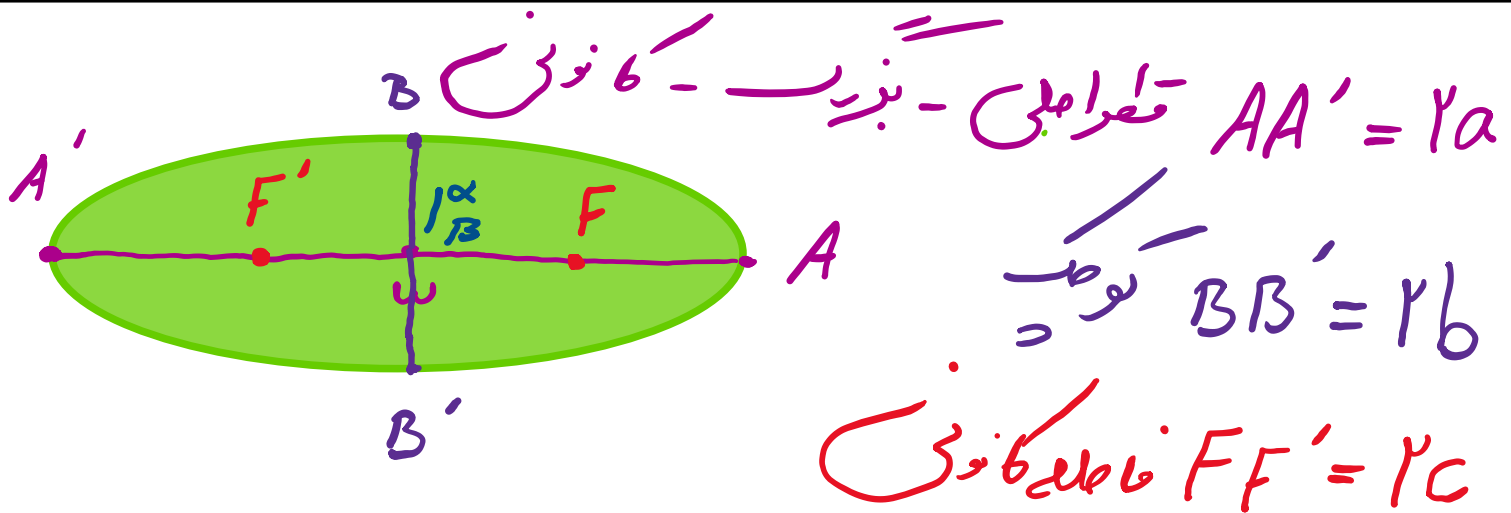
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{کره}$$

۱- مطابق شکل وتر مثلث به معادله  $y = 2x - 1$ ، با شرط  $0 \leq x \leq 3$  مفروض است. اگر مثلث را حول محور  $y$  ها دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$



$$\rightarrow \underline{\underline{a^2 = b^2 + c^2}}$$

خرج از مرکز  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$$A \Big|_B^{\alpha + a}$$

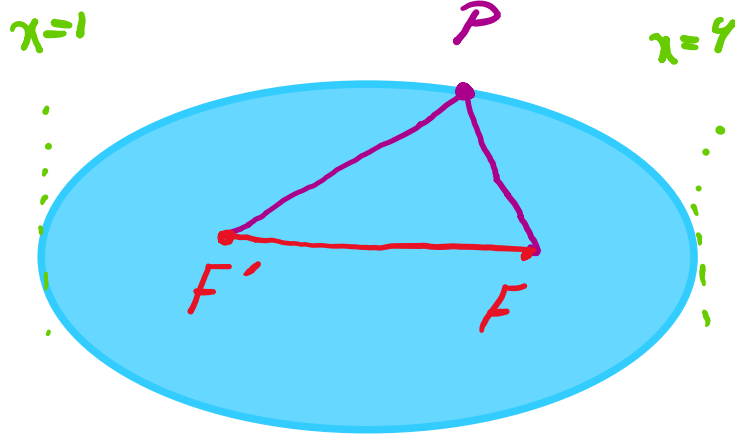
$$A' \Big|_B^{\alpha - a}$$

$$F \Big|_B^{\alpha + c}$$

$$F' \Big|_B^{\alpha - c}$$

$$B \Big|_{B+b}^{\alpha} \quad B' \Big|_{B-b}^{\alpha}$$

۲- چهار خط به معادله  $x = 1$ ,  $x = 6$ ,  $y = -1$  و  $y = 3$  بر یک بیضی به کانون‌های  $F$  و  $F'$  مماس هستند. اگر نقطه‌ای واقع بر این بیضی باشد، به طوری که  $P$ ،  $F$  و  $F'$  رأس‌های یک مثلث باشند، محیط این مثلث کدام است؟



$$PF' + PF = 2a$$

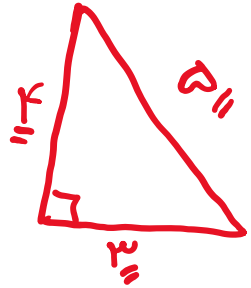
$$\underline{P} = 2a + 2c = ?$$

$$\begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 8 \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{2c = 6}}$$

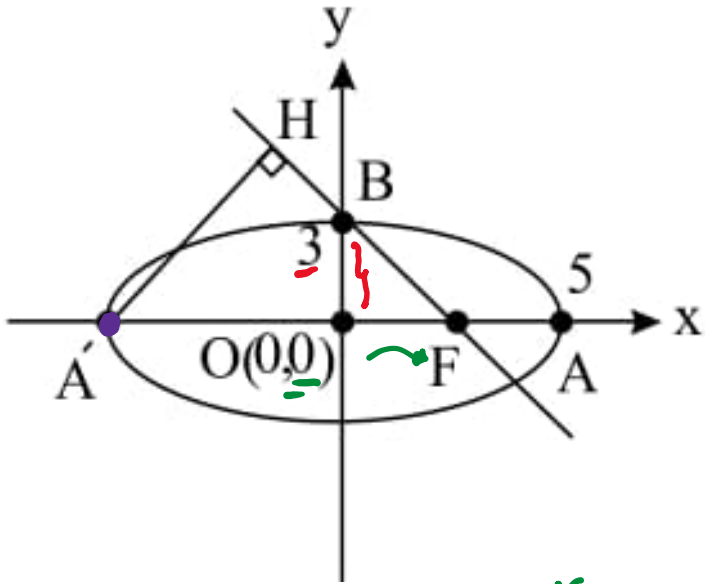
$$\underline{P} = 10 + 6 = 16$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



۳- در بیضی شکل زیر طول  $A'H$  چه قدر است؟



$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 5 \end{cases} \rightarrow c = 4$$

خط:  $3x + 4y - 12 = 0$

$$A'H = \frac{|-15 + 0 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{27}{5}$$

$$\begin{cases} F | 0 \\ B | 0 \\ \quad | 3 \end{cases}$$

$$m_{BF} = \frac{3 - 0}{0 - 4} = -\frac{3}{4}$$

معادله خط:  $y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4) \rightarrow 4y = -3x + 12$

۴- مجموع فواصل نقطه‌ی  $P$  روی بیضی از دو نقطه‌ی ثابت  $M$  و  $N$  به طول‌های  $-3$  و  $4$  روی محور  $x$ ‌ها برابر  $9$  است. اندازه‌ی قطر کوچک

این بیضی کدام است؟

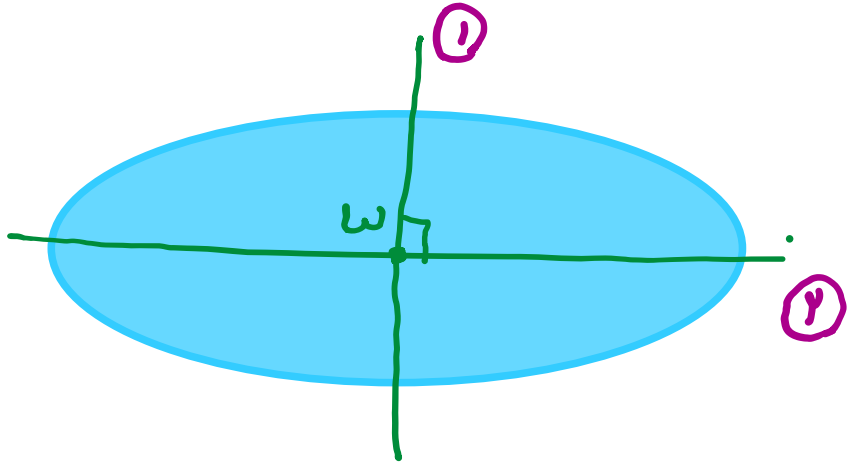
$$F \left| \begin{array}{c} r \\ 0 \end{array} \right. \quad F' \left| \begin{array}{c} -r \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow FF' = 2c \rightarrow 2c = 9 \rightarrow c = \frac{9}{2}$$

$$PF + PF' = 2a \rightarrow 2a = 9 \rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$a^r + b^r = c^r \rightarrow b = \sqrt{a^r - c^r} = \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{32}{4}} = \sqrt{8}$$

$$\rightarrow BB' = 2b = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

۵- خط به معادله  $x + 2y = 3$  یکی از قطرهای بیضی به مرکز  $W \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$  است. قطر دیگر این بیضی محور طولها را با چه طولی قطع می‌کند؟



$$m_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow m_2 = +2$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$y + 1 = 2(x - 2)$$

$$y = 0 \rightarrow 1 = 2x - 4 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$



۶- در یک بیضی با کانون‌های  $F \begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$  و  $F' \begin{vmatrix} -۱ \\ ۴ \end{vmatrix}$  که در آن طول قطر بزرگ برابر ۶ واحد است، کدام گزینه وضعیت قرارگیری نقطه  $M \begin{vmatrix} -۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$  را به درستی نشان می‌دهد؟

① درون بیضی

② بیرون بیضی

③ روی بیضی

④ مرکز بیضی

$$MF + MF' = 2a \rightarrow \text{روی بیضی}$$

$$MF + MF' > 2a \rightarrow \text{خارج بیضی}$$

$$MF + MF' < 2a \rightarrow \text{داخل بیضی}$$

$$MF = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$MF' = \sqrt{0+4} = 2$$

$$AA' = 2a = 6 \rightarrow 2a = 6$$

$$MF + MF' = \sqrt{10} + 2 < 6 = AA'$$

۷- در یک بیضی افقی با مرکز  $W \begin{vmatrix} -4 \\ -1 \end{vmatrix}$ ، طول قطر کوچک و خروج از مرکز آن به ترتیب ۶ واحد و  $\frac{4}{5}$  است. کدام نقطه زیر بر روی این بیضی قرار ندارد؟

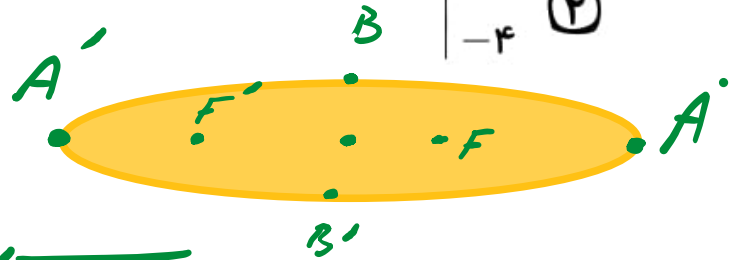
قرار ندارد؟

$\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$  (۱) ✓

$\begin{vmatrix} -4 \\ -4 \end{vmatrix}$  (۲)

$\begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$  (۳)

$\begin{vmatrix} -9 \\ -1 \end{vmatrix}$  (۴)



$BB' = 6 = 2b \rightarrow b = 3$  ✓

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \rightarrow \frac{4}{5} = \sqrt{1 - \frac{9}{a^2}} \rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{9}{25} \rightarrow a = 5$  ✓

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \rightarrow c = 4$  ✓

$A' \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$    
  $A \begin{vmatrix} -9 \\ -1 \end{vmatrix}$    
  $F \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$    
  $F' \begin{vmatrix} -8 \\ -1 \end{vmatrix}$    
  $B \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$    
  $B' \begin{vmatrix} -4 \\ -4 \end{vmatrix}$

۸- مختصات دو سر قطر کوچک یک بیضی  $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$  است. این بیضی از نقطه  $\begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$  می‌گذرد، خروج از مرکز آن کدام است؟

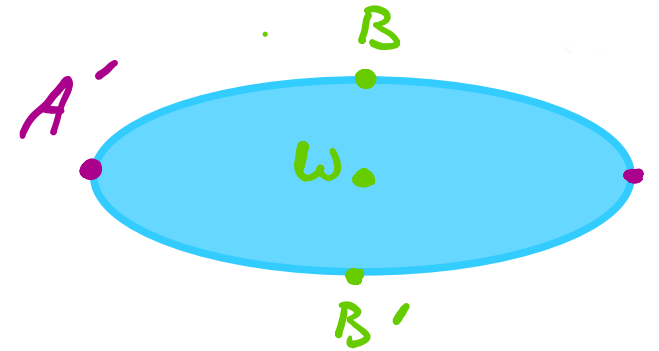
$$B \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$BB' = 2b = 2 \rightarrow b = 1$$

$$w \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$A' \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow a = 3$$



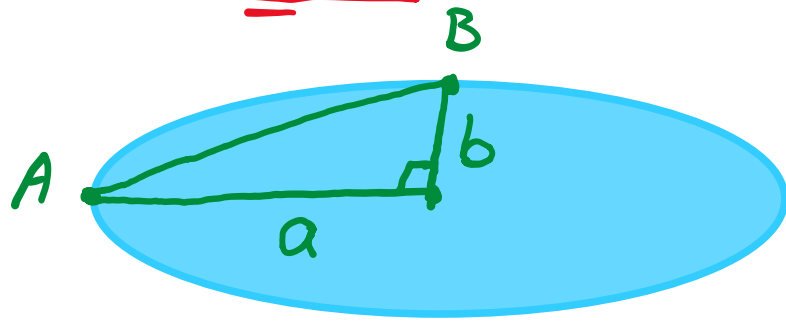
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۹- در یک بیضی، فاصله یک رأس کانونی از یک رأس ناکانونی، نصف مجموع فاصله کانونی و اندازه قطر بزرگ است. خروج از مرکز این بیضی

کدام است؟



$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = \frac{c}{a} = ?$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{r} (rc + ra) = a + c \rightarrow a^2 + b^2 = a^2 + c^2 + 2ac$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow a^2 - c^2 = c^2 + 2ac$$

$$\div a^2 \rightarrow 1 - e^2 = e^2 + 2e \rightarrow 2e^2 + 2e - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(2)(-1) = 12 \rightarrow e = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

$$(x-\alpha)^r + (y-\beta)^r = R^r \quad \begin{array}{l} 0 \\ \hline \alpha \\ \beta \end{array} \quad \text{نقطه} = R$$

$$x^r + y^r + ax + by + c = 0$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ \hline -a/r \\ -b/r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ \hline f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 \\ \hline \alpha \\ \beta \end{array}$$

$$R^r = \frac{a^r + b^r - rc}{r}$$

$$R = \alpha + \beta - c$$

شرط دایره:   
 ۱)  $x^r + y^r = \dots$    
 ۲)  $R > 0$

۱۰ - شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات  $(0, 0)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(2, 1)$  می‌گذرد کدام است؟

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$A \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$B \left| \begin{array}{c} -2 \\ 4 \end{array} \right. \rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \rightarrow -2a + 4b = -20$$

$$C \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right. \rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -5$$

$$\left| \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -5 \end{array} \right.$$

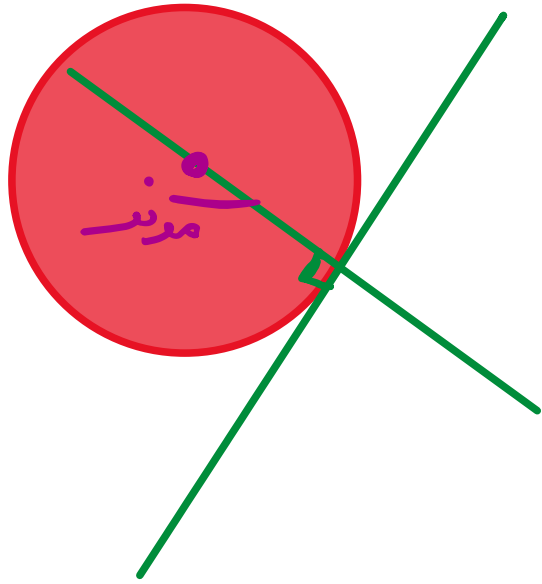
$$R = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 25 - 0}{4} \rightarrow R = \frac{25}{4} = \frac{5}{2}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۱۱- به ازای کدام مقدار  $a$ ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  و خط به معادله‌ی  $3x + 2y = a$  در نقطه‌ی تلاقی

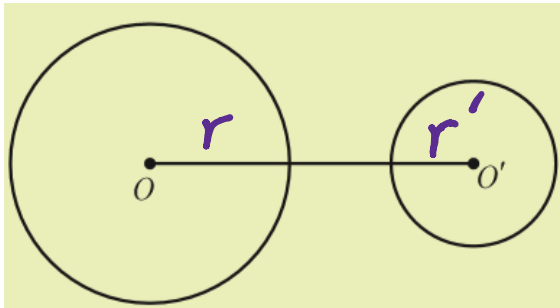
آنها،  $90^\circ$  درجه است؟



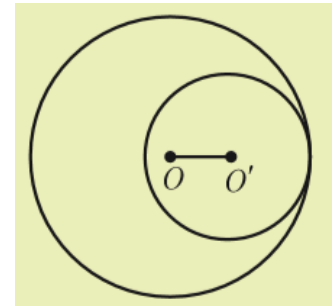
$$\omega \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = +1 \\ \beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{aligned} \rightarrow 3-1 = a \rightarrow a=2$$

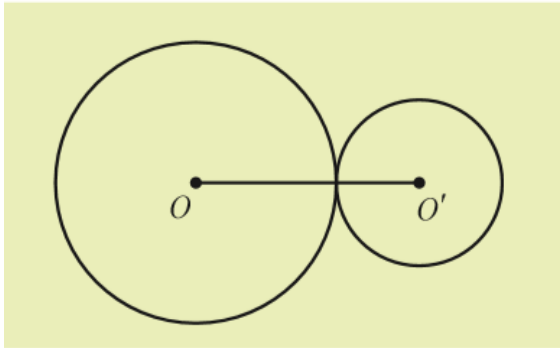
$$OO' = L$$



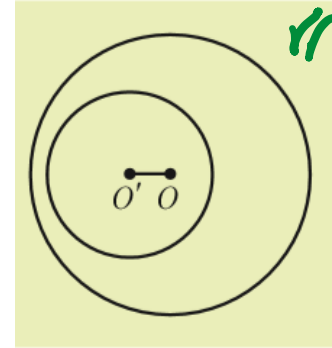
$$L > r + r'$$



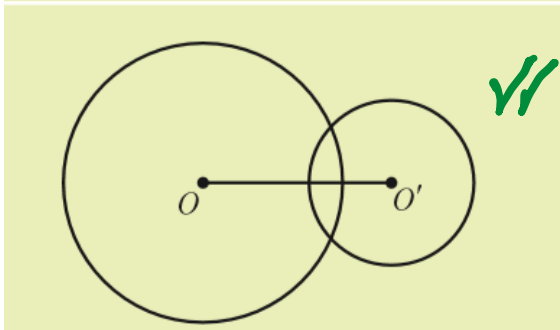
$$L = r - r' \quad (2)$$



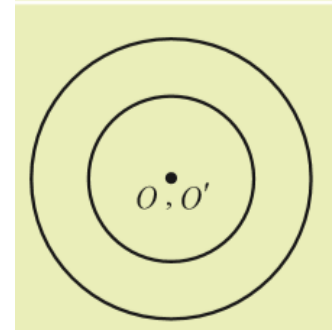
$$L = r + r' \quad (1)$$



$$L < r - r'$$



$$r - r' < L < r + r' \quad (3)$$



$$L = 0$$



۱۲- دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$  و  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{4} = 1 \\ \beta = -\frac{6}{4} = -3 \\ R^2 = \frac{4 + 36 + 32}{4} = 1 + 9 + 8 \rightarrow R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha' = -\frac{8}{4} = -2 \\ \beta = \frac{4}{4} = 1 \\ R'^2 = \frac{64 + 16 - 48}{4} = 16 + 4 - 12 \rightarrow R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

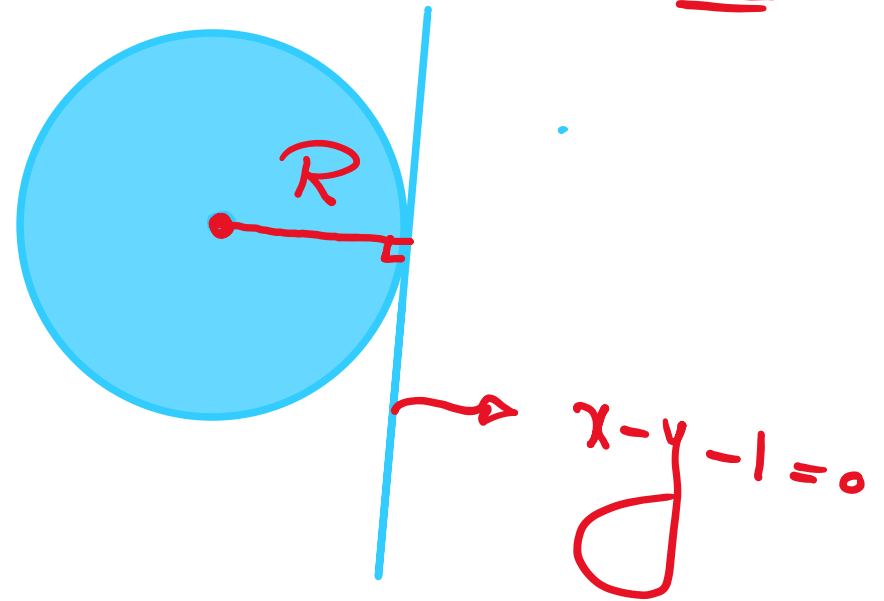
$$L = \alpha\alpha' = \sqrt{20 + 20} = 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow L = 2\sqrt{2} = R + R' = 5\sqrt{2}$$

مماس خارج

۱۳- هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه  $(-2, 1)$  می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله  $y = x - 1$  مماس است. شعاع دایره کدام است؟

$$\frac{0}{1} \quad x - y - 1 = 0$$

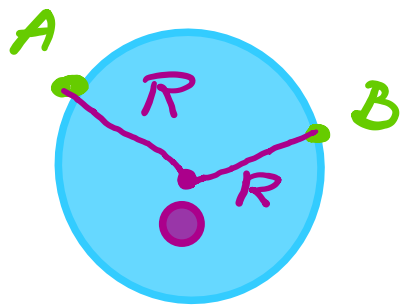


$$A/B \quad ax + by + c = 0$$

$$L = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$L = \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

۱۴- دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟



$$\begin{array}{l} O / \alpha = x \\ \quad \quad \quad \beta = x - 2 \end{array}$$

$$R = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$OA = OB \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (x-3)^2}$$

$$\rightarrow (x-3)^2 + (x-2)^2 = x^2 + (x-3)^2$$

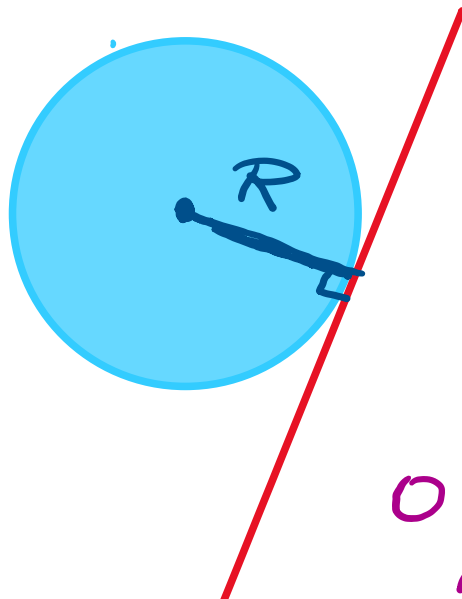
$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 \rightarrow x = 1$$

۱۵- به ازای کدام مقدار  $m$  خط  $2x - 3y + m = 2$  بر دایره  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$  مماس است؟

خط مماس بر دایره:

فاصله مرکز تا خط برابر شعاع است.

$R = L$



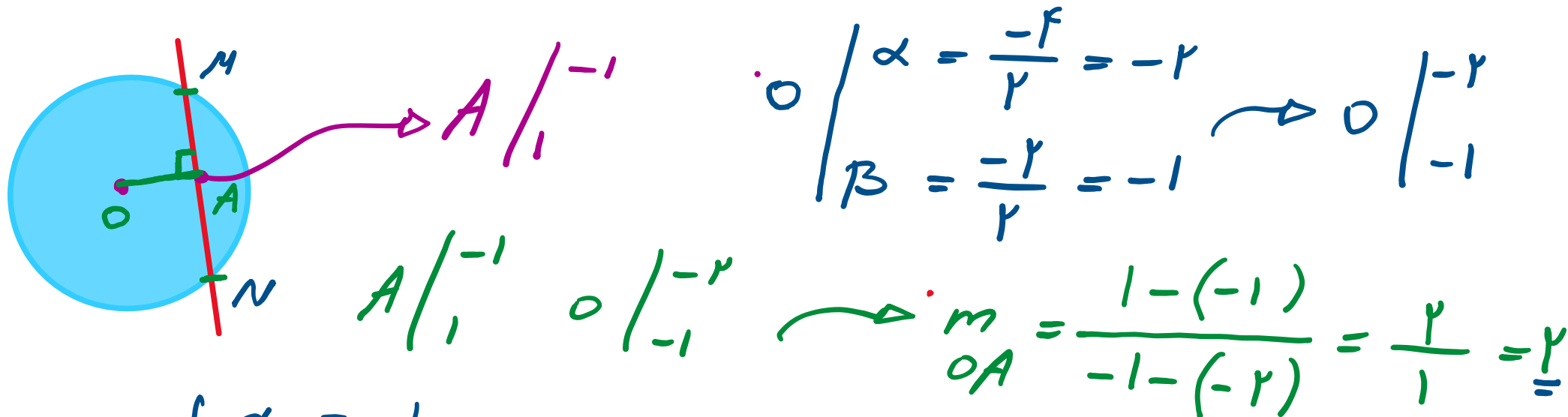
$\alpha = \frac{4}{2} = 2$   
 $\beta = \frac{-6}{2} = -3$

$R = 4 + 9 - 0 \rightarrow R = \sqrt{13}$

$2x - 3y + m - 2 = 0 \rightarrow L = \frac{|4 + 9 + m - 2|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|11 + m|}{\sqrt{13}}$

$|11 + m| = 13 \rightarrow$   
 $m + 11 = 13 \rightarrow m = 2$   
 $m + 11 = -13 \rightarrow m = -24$

۱۶- معادله‌ی کوتاه‌ترین وتر از دایره  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$  که از نقطه  $(-1, 1)$  می‌گذرد کدام است؟



$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-f}{r} = -2 \\ \beta &= \frac{-r}{r} = -1 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \beta &= -1 \end{aligned}$$

$$m_{OA} = \frac{1 - (-1)}{-1 - (-2)} = \frac{2}{1} = \underline{2}$$

$$MN \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \\ m = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow y - 1 = \frac{-1}{2}(x + 1)$$

$$\begin{aligned} 2y - 2 &= -x - 1 \rightarrow 2y + x = 1 \end{aligned}$$